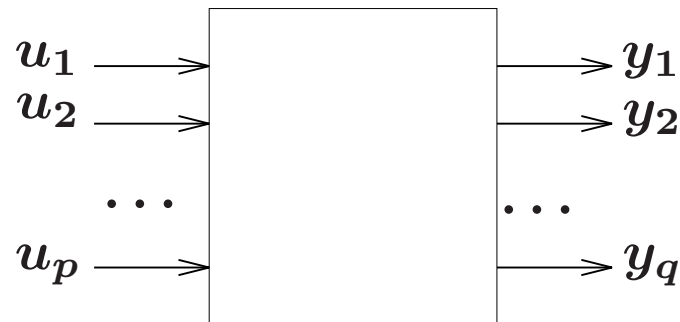


Modelagem Matemática de Sistemas

1. Descrição Matemática de Sistemas
2. Descrição Entrada-Saída
3. Exemplos

Descrição Matemática de Sistemas



$$u' = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_p \end{bmatrix} ; y' = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_q \end{bmatrix}$$

- ▶ 1 entrada/1 saída: monovariável ou SISO (Single input - single output)
- ▶ +1 entrada/+1 saída: multivariável ou MIMO (Multiple input - multiple output)
- ▶ Sistemas a Tempo Contínuo: $u = u(t)$; $y = y(t)$: funções do tempo $t \in (-\infty, \infty)$
- ▶ Sistemas a Tempo Discreto: $u = u(k)$; $y = y(k)$: sequências $k \in \mathbb{Z}$

Relembrando...

↪ Se $u(t) \equiv 0, t \geq t_0$: tem-se resposta à entrada nula

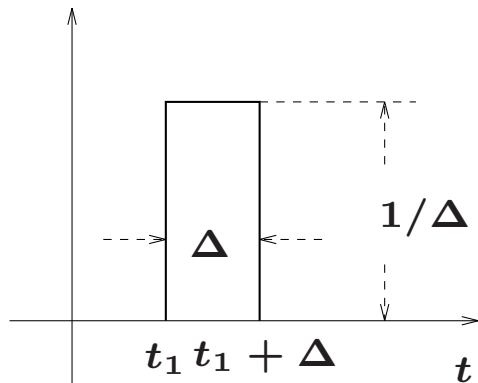
↪ Se $x(t_0) = 0$: tem-se resposta ao estado nulo

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t) \equiv 0, t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_{\text{entrada nula}}(t), t \geq t_0$$

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) = 0 \\ u(t), t \geq t_0 \end{array} \right\} \longrightarrow y_{\text{estado nulo}}(t), t \geq t_0$$

Relembrando...

Sistemas SISO — Pulso unitário



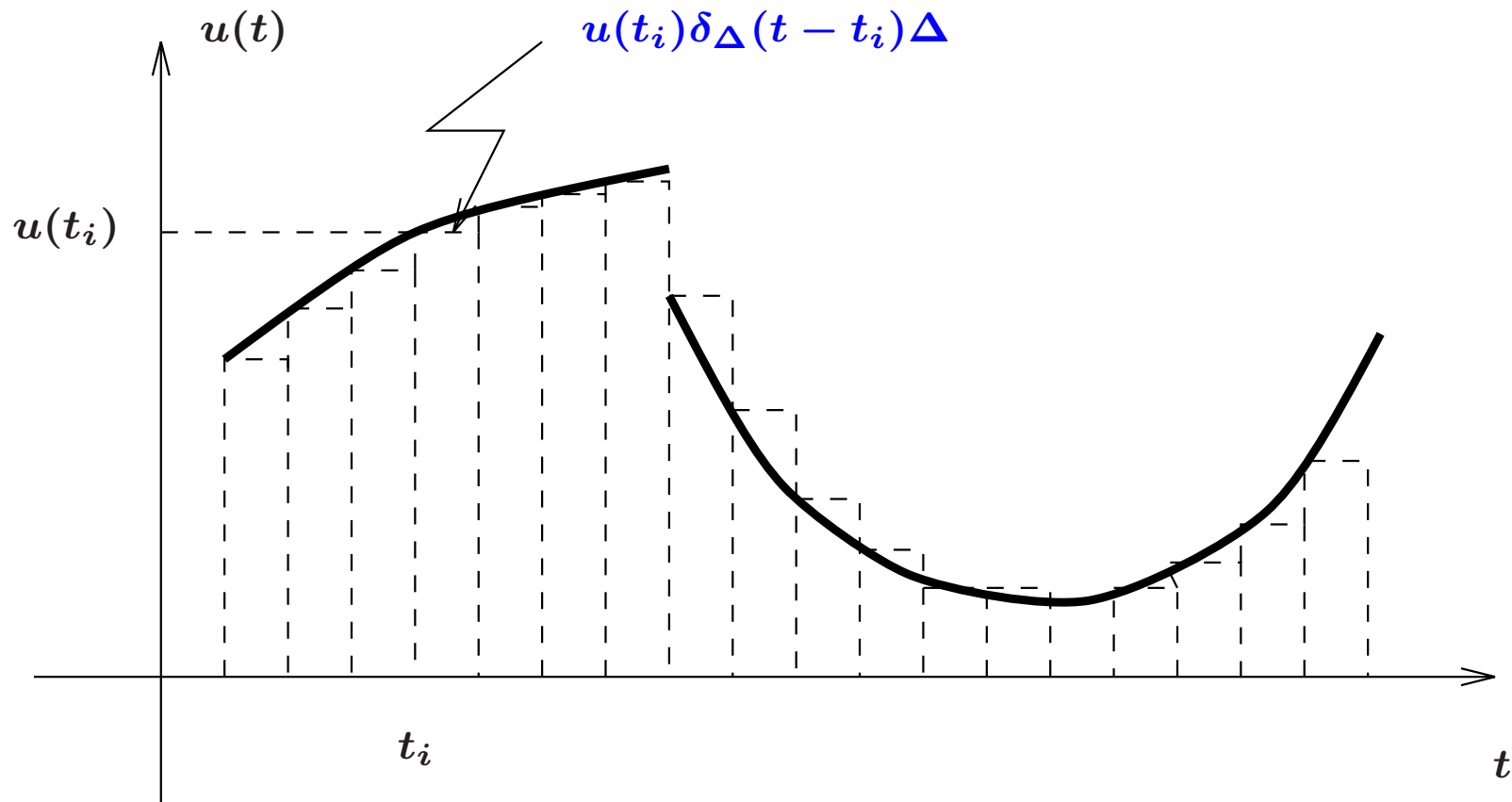
$$\delta_{\Delta}(t-t_1) = \begin{cases} 0 & , t < t_1 \\ 1/\Delta & , t_1 \leq t < t_1 + \Delta \\ 0 & , t \geq t_1 + \Delta \end{cases}$$

$$\delta(t-t_1) \triangleq \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t-t_1) \quad : \text{ pulso ou Delta de Dirac}$$

- ▶ A ideia é usar o pulso para obter uma descrição genérica entrada-saída apresentada a seguir

Descrição Entrada-Saída

Considere a entrada: $u(t) \cong \sum_i u(t_i) \delta_{\Delta}(t - t_i) \Delta$, ilustrada abaixo:



Descrição Entrada-Saída

► Denote $g_{\Delta}(t, t_i)$ como sendo a saída no instante t do sistema excitado pelo pulso $u(t) = \delta_{\Delta}(t - t_i)$ aplicado no instante t_i . Então

$$\delta_{\Delta}(t - t_i) \xrightarrow{\text{gera}} g_{\Delta}(t, t_i)$$

E baseado na Linearidade:

$$\delta_{\Delta}(t - t_i)u(t_i)\Delta \xrightarrow{\text{gera}} g_{\Delta}(t, t_i)u(t_i)\Delta \quad (\text{homogeneidade})$$

$$\sum_i \delta_{\Delta}(t - t_i)u(t_i)\Delta \xrightarrow{\text{gera}} \underbrace{\sum_i g_{\Delta}(t, t_i)u(t_i)\Delta}_{\approx \text{Saída: } y(t)} \quad (\text{aditividade})$$

► Quando $\Delta \rightarrow 0$, o pulso $\delta_{\Delta}(t - t_i)$ tende ao impulso aplicado em t_i , denotado por $\delta(t - t_i)$, e a saída correspondente é dada por $g(t, t_i)$

Descrição Entrada-Saída

Resposta ao Impulso

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

▶ Sistema Causal $\iff g(t, \tau) = 0$ para $t < \tau$

▶ Sistema Relaxado em t_0 $\iff x(t_0) = 0$

↪ Então para sistemas causais e relaxados em t_0 , tem-se:

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

Descrição Entrada-Saída

▷ Se o sistema linear é invariante no tempo e relaxado em $t = 0$, então:

$$g(t, \tau) = \underbrace{g(t + T, \tau + T)}_{\text{deslocado...}} = \underbrace{g(t - \tau, 0)}_{\text{instante inicial nulo}} = g(t - \tau)$$

Integral de Convolução

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

↪ $g(t)$: resposta ao impulso aplicado em $t = 0$

↪ Sistema causal invariante no tempo: $g(t) = 0$ para $t < 0$

Descrição Entrada-Saída

Sistema MIMO

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) u(\tau) d\tau$$

$$G_{q \times p}(t, \tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t, \tau) & g_{12}(t, \tau) & \cdots & g_{1p}(t, \tau) \\ g_{21}(t, \tau) & g_{22}(t, \tau) & \cdots & g_{2p}(t, \tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{q1}(t, \tau) & g_{q2}(t, \tau) & \cdots & g_{qp}(t, \tau) \end{bmatrix}$$

Sistema com p entradas e q saídas

$g_{ij}(t, \tau)$: resposta no instante t na i -ésima saída devida ao impulso aplicado no instante τ na j -ésima entrada

$G(\cdot, \tau)$: matriz de resposta ao impulso

Descrição Entrada-Saída

Matriz Função de Transferência – p entradas e q saídas – MIMO

As integrais de convolução são substituídas por equações algébricas via Laplace...

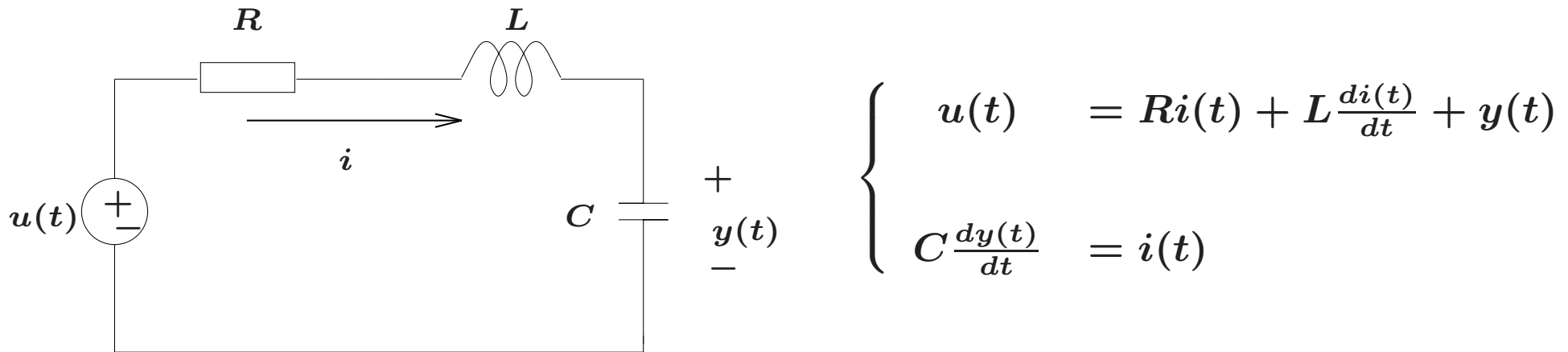
$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} G(t - \tau) u(\tau) d\tau \right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} G(t - \tau) e^{-s(t - \tau)} dt \right) u(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} G(v) e^{-sv} dv \int_0^{\infty} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &\triangleq G(s)U(s) \end{aligned}$$

$G(s)$: Transformada de Laplace da matriz resposta ao impulso $G(t)$

- ▶ Se $p = q = 1$ (SISO) → Função de Transferência
- ▶ Exige que o sistema esteja relaxado em $t = 0$

Descrição Entrada-Saída

Exemplo Circuito RLC série com $R = 3\Omega$, $L = 1H$, $C = 0.5F$



Sistema relaxado: i.e., condições iniciais nulas ($y(0) = \dot{y}(0) = 0$), então:

$$LCs^2Y(s) + RCsY(s) + Y(s) = U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} = G(s)$$

Descrição Entrada-Saída

▶ Resposta ao Impulso: $g(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$, $t \geq 0$

▶ Note que para uma entrada qualquer tem-se

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} g(t - \tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad , \quad t \geq t_0$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_0} g(t - \tau)u(\tau)d\tau &= 2e^{-t} \int_{-\infty}^{t_0} e^{\tau} u(\tau)d\tau - 2e^{-2t} \int_{-\infty}^{t_0} e^{2\tau} u(\tau)d\tau \\ &= 2e^{-t} c_1 - 2e^{-2t} c_2 \quad , \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

Determinação de c_1 e c_2 ?

Descrição Entrada-Saída

Determinação de c_1 e c_2 . Para $t = t_0$ tem-se:

$$\begin{cases} y(t_0) = 2e^{-t_0}c_1 - 2e^{-2t_0}c_2 \\ \dot{y}(t_0) = -2e^{-t_0}c_1 + 4e^{-2t_0}c_2 \end{cases}$$

► Se $y(t_0)$ (tensão no capacitor) e $C\dot{y}(t_0)$ (corrente no indutor) forem conhecidas, então a saída $y(t)$ pode ser unicamente determinada para $t \geq t_0$ mesmo que o sistema não esteja relaxado em t_0 , ao descrever o estado do circuito:

$$\{y(t_0), \dot{y}(t_0)\} , \{c_1, c_2\} \quad \rightarrow \quad \text{Estado do Circuito em } t_0$$

► Note que a informação (estado do circuito em t_0) necessária para determinar unicamente a resposta do sistema não é única e pode haver redundância....

Funções Racionais em s

Para $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

↷ $G(s)$ é estritamente própria \Leftrightarrow grau de $D(s) >$ grau de $N(s) \Leftrightarrow G(\infty) = 0$

↷ $G(s)$ é própria \Leftrightarrow grau de $D(s) =$ grau de $N(s) \Leftrightarrow G(\infty) = \text{constante} \neq 0$

↷ $G(s)$ é imprópria \Leftrightarrow grau de $D(s) <$ grau de $N(s) \Leftrightarrow |G(\infty)| = \infty$

↷ $p \in \mathbb{C}$ é um **pólo** de $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ se $|G(p)| = \infty$

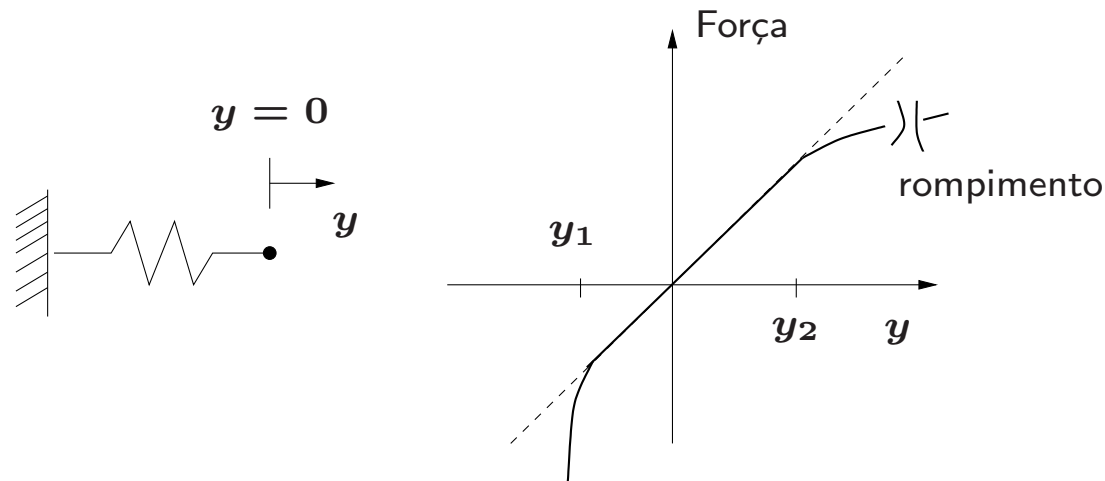
↷ $z \in \mathbb{C}$ é um **zero** de $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ se $|G(z)| = 0$

Linearização

↪ Via Jacobiano (vide Aula 1)

↪ A linearização nem sempre se aplica: para alguns sistemas não lineares, uma diferença infinitesimal nas condições iniciais pode gerar soluções completamente diferentes (hipersensibilidade às condições iniciais, caos)...

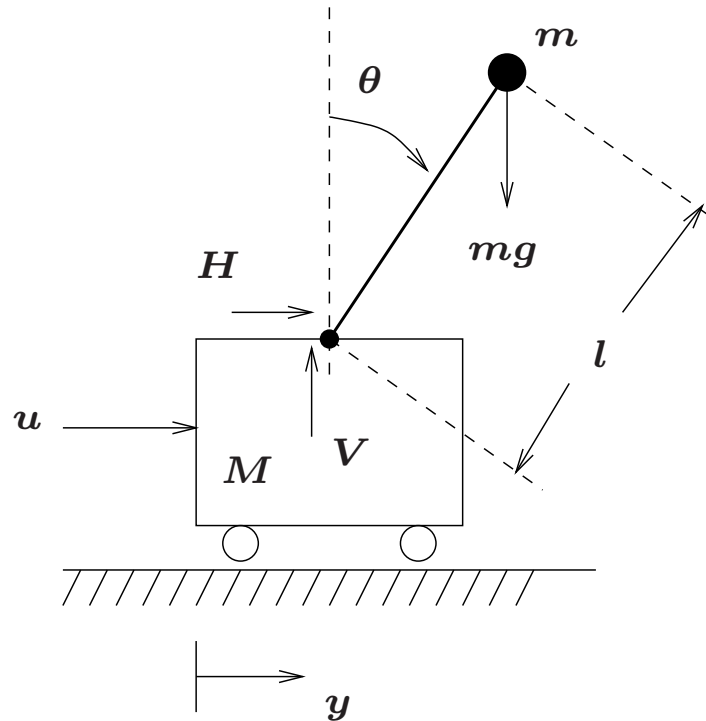
Comportamento linear em uma região. Exemplo: Mola



Comportamento linear para deslocamentos no intervalo $[y_1, y_2]$

Exemplo – Pêndulo Invertido sobre um carrinho

Exemplo Carrinho com Pêndulo Invertido



Assume-se que o movimento se dá no plano e desprezam-se o atrito e a massa da haste. O objetivo é manter o pêndulo na posição vertical. Modelo (linear)?

Modelo (linear)?

- ▶ M é a massa do carrinho e m é a massa da bolinha
- ▶ H, V : forças horizontal e vertical exercidas pelo carro no pêndulo
- ▶ Em relação a M tem-se: $M \frac{d^2 y}{dt^2} + H = u \Rightarrow M \frac{d^2 y}{dt^2} = u - H$
- ▶ Em relação a m :
$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2} (y + l \sin(\theta(t))) = H & : \text{Horizontal} \\ mg = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos(\theta(t))) + V & : \text{Vertical} \end{cases}$$

Note que $\frac{d}{dt}(\sin(\theta)) = \dot{\theta} \cdot \cos(\theta)$ (Vamos omitir a dependência em t)

$$\text{e } \frac{d^2}{dt^2}(\sin(\theta)) = \ddot{\theta} \cdot \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\theta)$$

Da mesma forma: $\frac{d}{dt}(\cos(\theta)) = -\dot{\theta} \cdot \sin(\theta)$

$$\text{e } \frac{d^2}{dt^2}(\cos(\theta)) = -\ddot{\theta} \cdot \sin(\theta) - \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\theta)$$

Modelo (linear)?

► Obtém-se assim as relações de equilíbrio de forças para a massa m (que são equações não lineares!):

$$\Rightarrow H = m\ddot{y} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\Rightarrow mg - V = -ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta$$

► É necessário também aplicar a Lei de Newton ao movimento rotacional do pêndulo ao redor da dobradiça (que é uma relação não linear!):

$$mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \cdot l + m\dot{y}l\cos\theta$$

Modelo (linear)?

- ▶ Pode-se obter um modelo linear ao considerar pequenas variações de ângulo (considerando o pêndulo na posição vertical como ponto de referência). Então para pequenas variações de θ e $\dot{\theta}$ em relação à referência tem-se:

$$\sin \theta \cong \theta \ ; \ \cos \theta \cong 1 \ ; \ \theta^2, \dot{\theta}^2, \theta\dot{\theta}, \theta\ddot{\theta} \rightarrow 0$$

- ▶ Da força vertical em relação a massa m obtém-se:

$$mg - V = -ml\ddot{\theta}\overset{0}{\theta} - ml\dot{\theta}^2\overset{0}{1} = 0, \text{ i.e. } V = mg$$

- ▶ Da força horizontal em relação a massa m obtém-se:

$$H = m\ddot{y} + ml\ddot{\theta}\overset{0}{1} - ml\dot{\theta}^2\overset{0}{\theta} = m\ddot{y} + ml\ddot{\theta}$$

- ▶ Da força em relação a massa M do carrinho, considerando H , obtém-se:

$$M\ddot{y} = u - H = u - m\ddot{y} - ml\ddot{\theta}$$

Modelo (linear)?

- ▶ Da relação do movimento rotacional do pêndulo ao redor da dobradiça tem-se:

$$mgl\sin\theta = ml\ddot{\theta} \cdot l + m\ddot{y}l\cos\theta$$

$$mlg\theta = ml\ddot{\theta} \cdot l + ml\ddot{y}l$$

$$g\theta = l\ddot{\theta} + \ddot{y}$$

- ▶ Em outras palavras, o modelo é dado pelas equações:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} = u \\ l\ddot{\theta} + \ddot{y} - g\theta = 0 \end{cases}$$

Modelo Entrada-Saída do Pêndulo

▷ Aplicando a transformada de Laplace (com condições iniciais nulas) tem-se:

$$\begin{cases} (M + m) s^2 Y(s) + m l s^2 \Theta(s) = U(s) \\ (l s^2 - g) \Theta(s) + s^2 Y(s) = 0 \end{cases}$$

Obtém-se a FT da entrada u para o deslocamento y do carrinho:

$$G_{yu}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{l s^2 - g}{s^2 [(M + m) l s^2 - g(M + m)]}$$

E também a FT da entrada u para o deslocamento angular θ da haste:

$$G_{\theta u}(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-1}{(M + m) l s^2 - g(M + m)}$$

Modelo em Espaço de Estados

▷ Definem-se como variáveis de estado: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$

$$x \triangleq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}'$$

Resolvendo as equações para \ddot{y} e $\ddot{\theta}$ tem-se:

$$\ddot{y} = -\frac{gm}{M+m}\theta + \frac{1}{M+m}u$$
$$\ddot{\theta} = \frac{g(M+m)}{(M+m)l}\theta - \frac{1}{(M+m)l}u$$

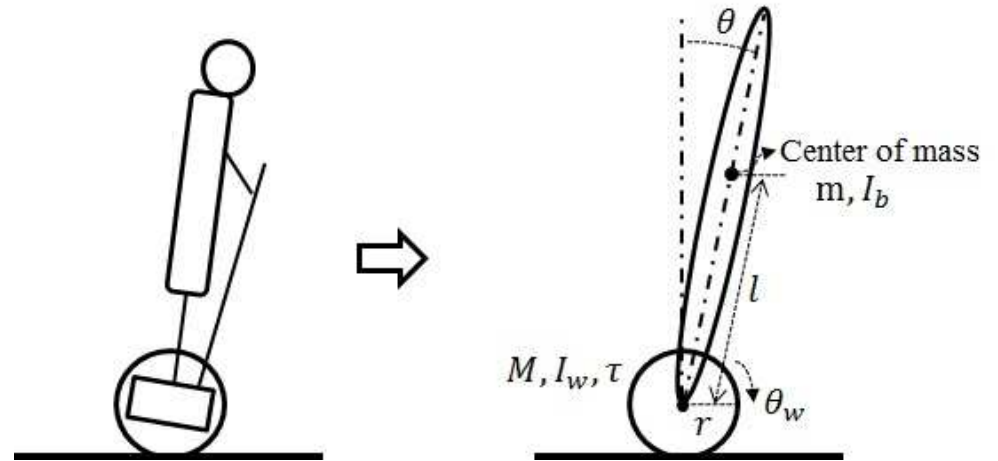
Modelo do Pêndulo Invertido sobre um carrinho

Equações de Estado (tendo como saída o deslocamento do carrinho (x_1) e o deslocamento angular da haste (x_3))

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g(M+m)}{(M+m)l} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M+m} \\ 0 \\ \frac{-1}{(M+m)l} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Inspirações no pêndulo invertido? Segway...



Ao usar um giroscópio, pode-se medir o ângulo do segway em relação a vertical. O torque aplicado as rodas é gerado por motores elétricos e balança o segway fornecendo o movimento desejado para frente ou para trás...

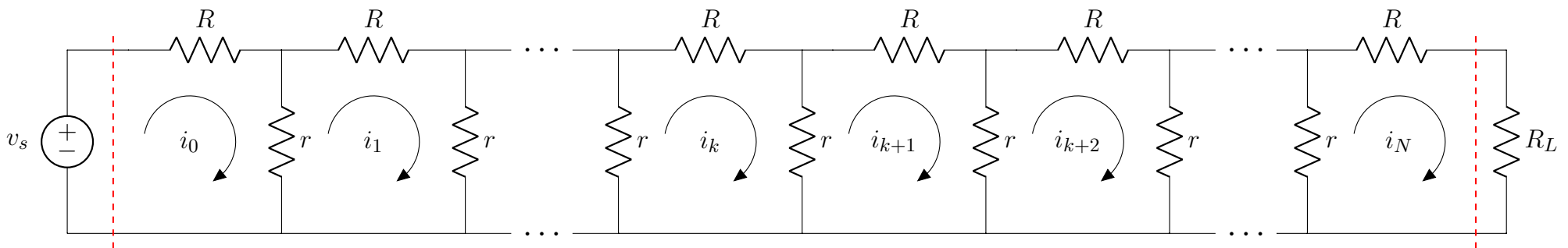
Ryno, the One-Wheeled Segway



Rede Puramente Resistiva

- ↪ Pode representar uma versão em corrente contínua de uma aproximação a parâmetros concentrados de uma linha de transmissão
- ↪ Pode representar, com escolhas apropriadas para R e r , um conversor digital analógico (rede R-2R)

Questão: Encontre uma equação a diferenças para a rede puramente resistiva:



Rede Puramente Resistiva

↪ Considere a $(k + 1)$ -ésima malha. A equação a diferenças para esta malha (que é de 2a. ordem) é obtida da equação da malha:

$$(2r + R)i_{k+1} - ri_k - ri_{k+2} = 0$$

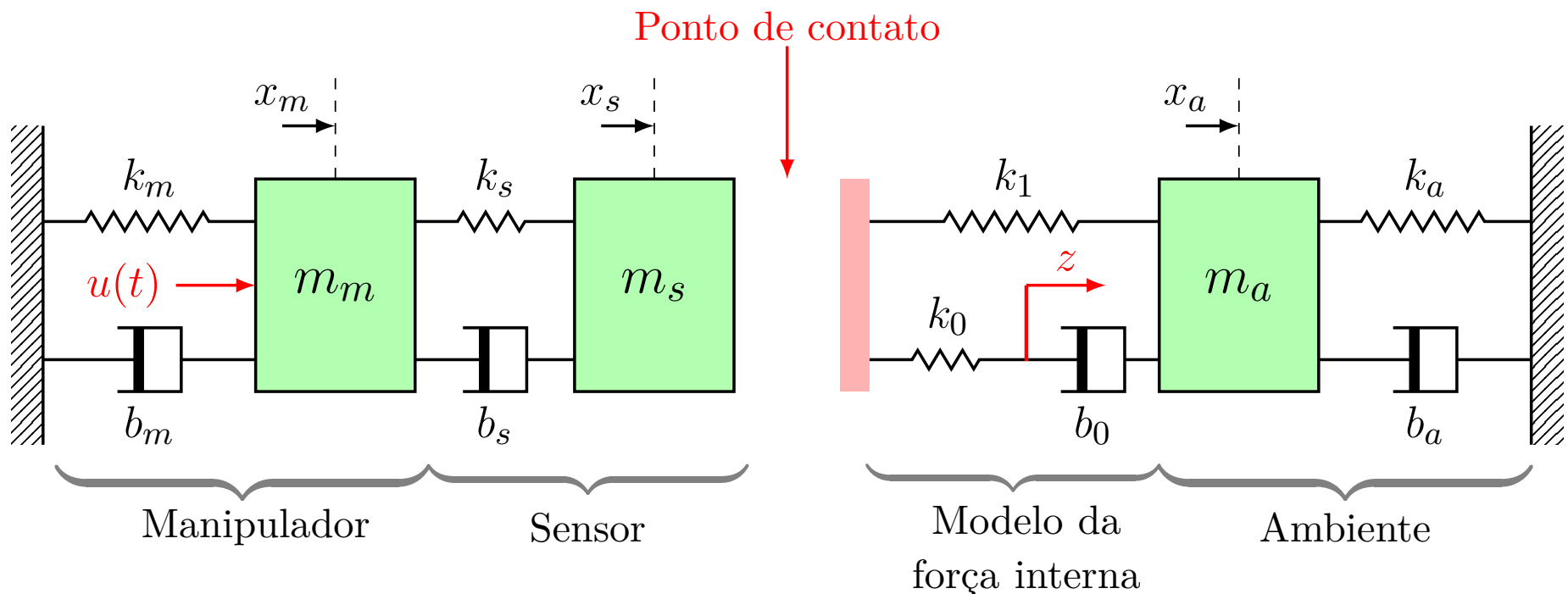
que é válida para $1 \leq k + 1 \leq N - 1$

↪ **Para caracterizar unicamente a solução** desta equação de 2a. ordem, **são necessárias duas condições de contorno**. Note que a primeira malha (com a fonte v_s) e a última malha (com a carga R_L) não satisfazem a equação acima e fornecem as duas condições de contorno necessárias:

$$\begin{aligned} v_s &= (R + r)i_0 - ri_1 \\ 0 &= (r + R + R_L)i_N - ri_{N-1} \end{aligned}$$

Manipulador Interagindo por Contato

A idealização abaixo é para um manipulador robótico que interage com um alvo por contato direto. Neste tipo de aplicação, o problema é ajustar adequadamente tanto o impacto, como a força de contato em regime permanente que garanta desempenho satisfatório. E.g., para um manipulador que checa, em alta velocidade, a condutividade das soldas em um circuito, espera-se que a força do impacto da ponta de prova não danifique as soldas e, ao mesmo tempo, garanta contato suficiente com a força aplicada



Manipulador Interagindo por Contato

Assume-se que a representação no diagrama anterior é adequada após a dinâmica do manipulador ter sido linearizada. A dinâmica do manipulador pode ser descrita por dois conjuntos de sistemas lineares, chaveando entre o regime sem contato com o alvo e o outro do regime em contato. O modelo sem contato é trivial (é de fato uma parcela do modelo em contato). **Objetivo:** obter o modelo do manipulador quando está em **contato constante** com o ambiente descrevendo o alvo

1) Considere o deslocamento do Manipulador (x_m) como referência:

$$m_m \ddot{x}_m + b_m \dot{x}_m + k_m x_m + b_s (\dot{x}_m - \dot{x}_s) + k_s (x_m - x_s) = u(t)$$

ou

$$m_m \ddot{x}_m + (b_m + b_s) \dot{x}_m + (k_m + k_s) x_m - b_s \dot{x}_s - k_s x_s = u(t)$$

Manipulador Interagindo por Contato

2) Considere o deslocamento do Sensor (x_s) como referência:

$$m_s \ddot{x}_s + b_s(\dot{x}_s - \dot{x}_m) + k_s(x_s - x_m) + k_1(x_s - x_a) + k_0(x_s - z) = 0$$

ou

$$m_s \ddot{x}_s + b_s \dot{x}_s - b_s \dot{x}_m + (k_s + k_1 + k_0)x_s - k_s x_m - k_1 x_a - k_0 z = 0$$

3) Considere o deslocamento do modelo do alvo (x_a) como referência:

$$m_a \ddot{x}_a + b_a \dot{x}_a + k_a x_a + b_0(\dot{x}_a - \dot{z}) + k_1(x_a - x_s) = 0$$

ou

$$m_a \ddot{x}_a + (b_a + b_0)\dot{x}_a + (k_a + k_1)x_a - b_0\dot{z} - k_1 x_s = 0$$

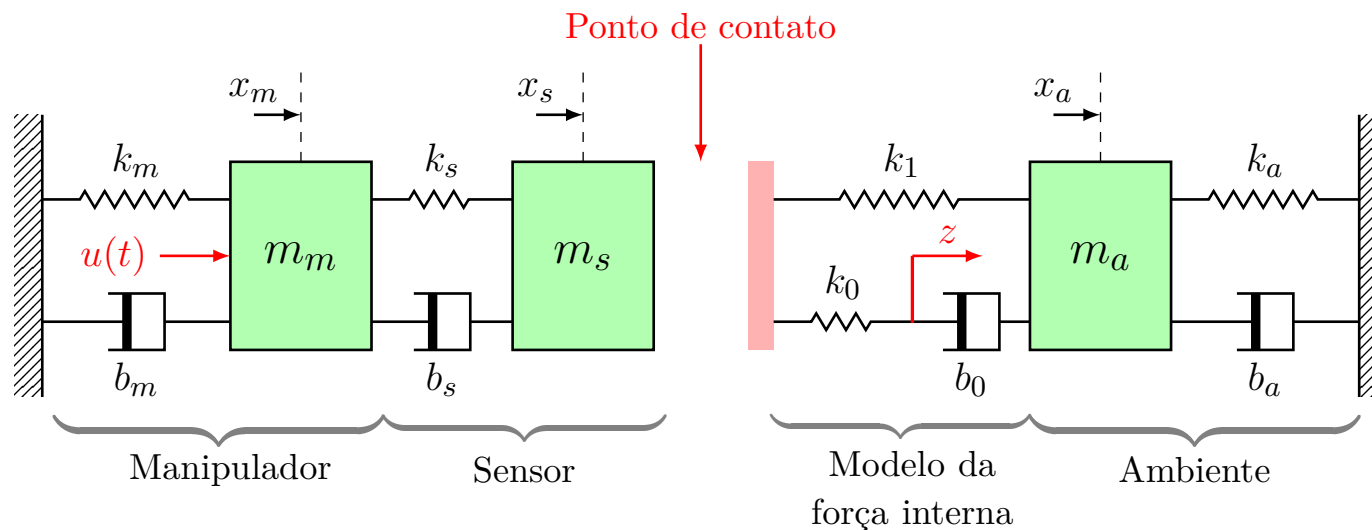
Manipulador Interagindo por Contato

4) Considere o deslocamento em z como referência:

$$b_0(\dot{z} - \dot{x}_a) + k_0(z - x_s) = 0$$

ou

$$b_0\dot{z} - b_0\dot{x}_a + k_0z - k_0x_s = 0$$



Manipulador Interagindo por Contato

↪ Definem-se as variáveis de estado:

$$x_1 = x_m; \quad x_2 = \dot{x}_m$$

$$x_3 = x_s; \quad x_4 = \dot{x}_s$$

$$x_5 = z; \quad x_6 = \dot{z}$$

$$x_7 = x_a; \quad x_8 = \dot{x}_a$$

Note que ainda é preciso algumas considerações para obter a representação no espaço de estados adequada. Para tanto, derive a equação diferencial em z (item 4), tal que:

$$b_0 \ddot{z} - b_0 \ddot{x}_a + k_0 \dot{z} - k_0 \dot{x}_s = 0$$

que é equivalente a:

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 = \ddot{z} &= \ddot{x}_a - \frac{k_0}{b_0} \dot{z} + \frac{k_0}{b_0} \dot{x}_s \\ &= \dot{x}_8 - \frac{k_0}{b_0} x_6 + \frac{k_0}{b_0} x_4 \end{aligned} \quad (\star)$$

Manipulador Interagindo por Contato

Da equação diferencial no [item 3](#) (obtida em relação a x_a), tem-se:

$$\dot{x}_8 = \ddot{x}_a = -\frac{(b_a + b_0)}{m_a} \dot{x}_a - \frac{(k_a + k_1)}{m_a} x_a + \frac{b_0}{m_a} \dot{z} + \frac{k_1}{m_a} x_s$$

que é reescrita da forma:

$$\dot{x}_8 = -\frac{(b_a + b_0)}{m_a} x_8 - \frac{(k_a + k_1)}{m_a} x_7 + \frac{b_0}{m_a} x_6 + \frac{k_1}{m_a} x_3$$

Substituindo \dot{x}_8 em [\(★\)](#) (na lâmina anterior), obtém-se a equação para \dot{x}_6 :

$$\dot{x}_6 = -\frac{(b_a + b_0)}{m_a} x_8 - \frac{(k_a + k_1)}{m_a} x_7 + \left(\frac{b_0}{m_a} - \frac{k_0}{b_0} \right) x_6 + \frac{k_0}{b_0} x_4 + \frac{k_1}{m_a} x_3$$

Manipulador Interagindo por Contato

↪ Considere a saída como sendo o deslocamento do Sensor. Então:

$$y = x_s = x_3$$

↪ O restante das equações são:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{(k_m + k_s)}{m_m} x_1 - \frac{(b_m + b_s)}{m_m} x_2 + \frac{k_s}{m_m} x_3 + \frac{b_s}{m_m} x_4 + \frac{1}{m_m} u(t)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k_s}{m_s} x_1 + \frac{b_s}{m_s} x_2 - \frac{(k_s + k_1 + k_0)}{m_s} x_3 - \frac{b_s}{m_s} x_4 + \frac{k_0}{m_s} x_5 + \frac{k_1}{m_s} x_7$$

$$\dot{x}_5 = x_6$$

$$\dot{x}_7 = x_8$$

Modelo em Espaço de Estados

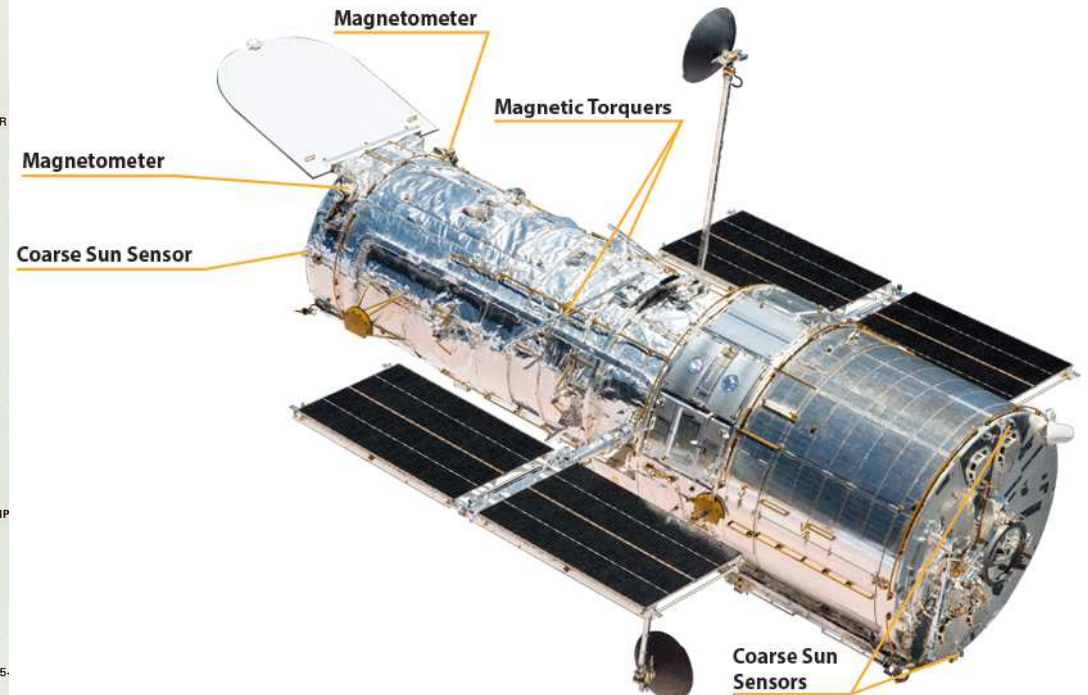
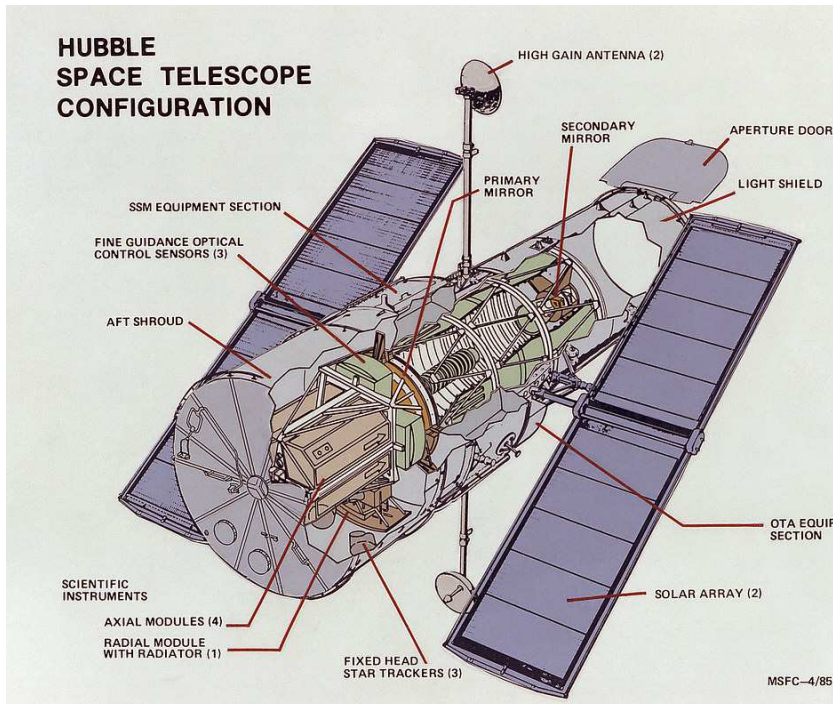
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \frac{k_s}{m_m} & \frac{b_s}{m_m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_s}{m_s} & \frac{b_s}{m_s} & A_{43} & -\frac{b_s}{m_s} & \frac{k_0}{m_s} & 0 & \frac{k_1}{m_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{m_a} & \frac{k_0}{m_a} & 0 & A_{66} & A_{67} & A_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{m_a} & 0 & 0 & \frac{b_0}{m_a} & A_{87} & A_{88} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\text{e } A_{21} = -\frac{(k_m+k_s)}{m_m}, A_{22} = -\frac{(b_m+b_s)}{m_m}, A_{43} = -\frac{(k_s+k_1+k_0)}{m_s}, A_{66} = \frac{b_0}{m_a} - \frac{k_0}{m_a},$$

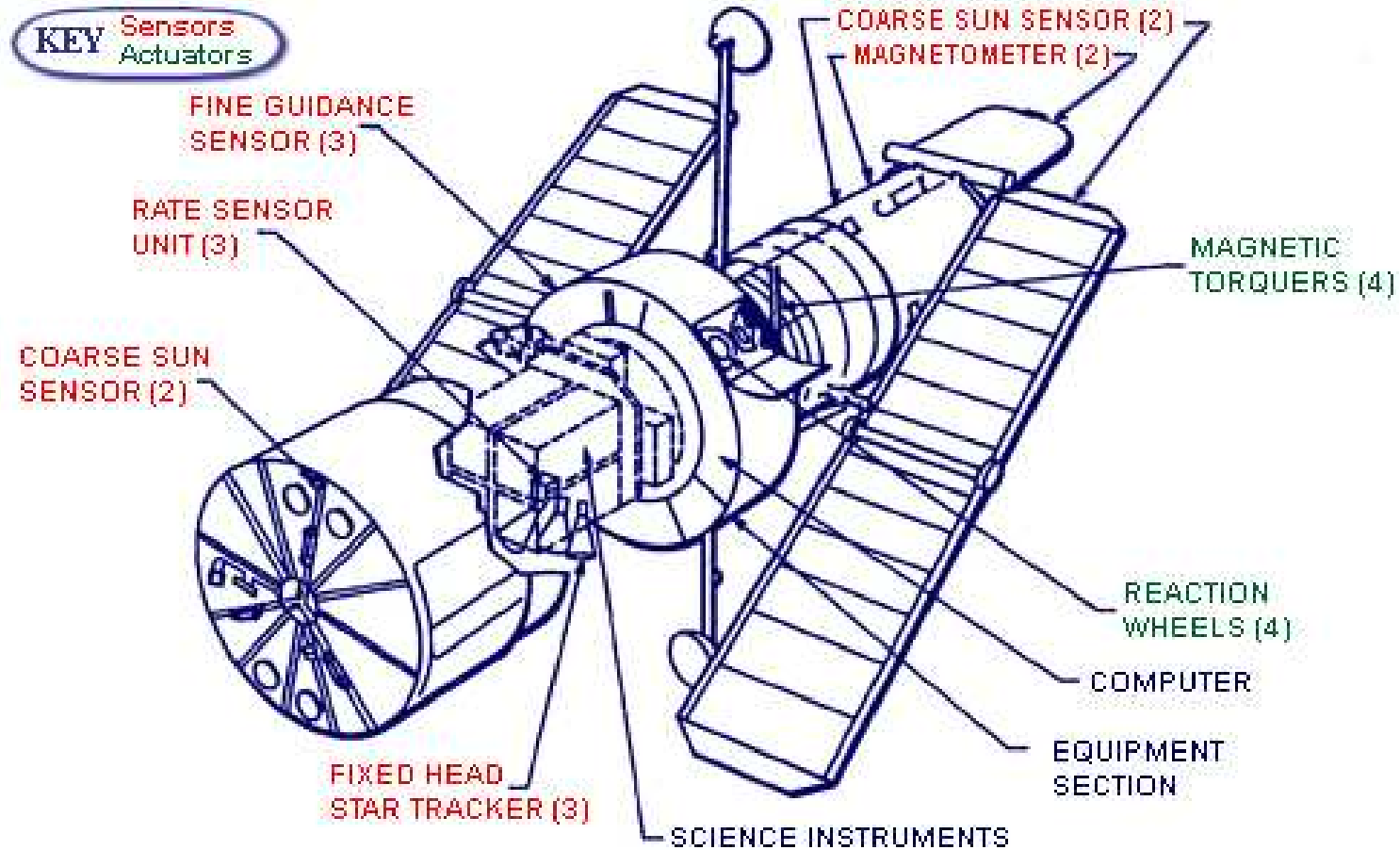
$$A_{67} = -\frac{(k_a+k_1)}{m_a}, A_{68} = -\frac{(b_a+b_0)}{m_a}, A_{87} = -\frac{(k_a+k_1)}{m_a}, A_{88} = -\frac{(b_a+b_0)}{m_a}$$

Modelo do Telescópio Hubble

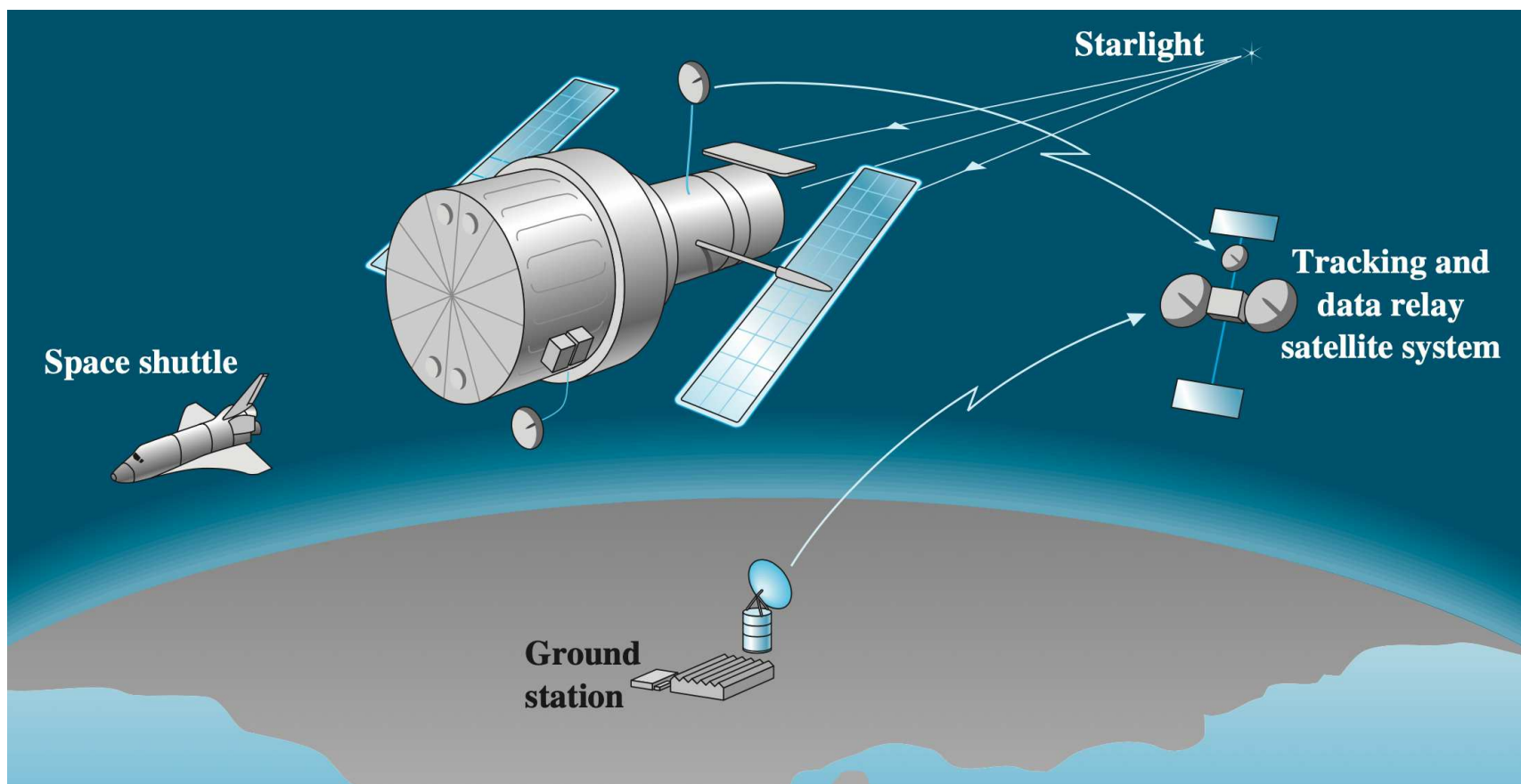


O telescópio tem 2,4 m de comprimento e está orbitando a Terra à ~ 570 Km sendo que a cada 97 minutos realiza uma volta completa ao redor da Terra

Sensores & Atuadores



Visão Geral



Funcionamento do Telescópio Hubble

- ▶ Hubble usa 6 giroscópios para saber exatamente para onde ele está apontando. A ideia é que o giroscópio funcione como se fosse um compasso e sempre aponta na mesma direção mesmo quando o telescópio está orbitando...
- ▶ Há ainda 4 rodas de reação que movem o telescópio. A ideia é usar a 3ª. lei de Newton de movimento, i.e., se a roda gira em um dado sentido então o telescópio gira em outro
- ▶ Além disso, quando Hubble está "observando", o sensor de controle fino irá se referenciar em estrelas próximas tal que garanta que o telescópio fique precisamente "fixado" apontando na mesma direção

Modelo ?

▷ Pode-se usar a segunda lei de Newton ($F = ma$) modificada para sistemas rotacionais em uma dimensão. Neste caso a força F é a soma de todos os momentos externos em relação ao centro de massa do corpo considerado, i.e., \mathcal{M} dado em N·m. Ainda, ao invés da massa m em si tem-se o momento de inércia da massa do corpo em relação ao centro de massa e representado por \mathcal{I} em kg·m². Além disso considera-se a aceleração angular ($\ddot{\theta}(t)$) do corpo em rad/s². Então obtém-se:

$$\mathcal{M} = \mathcal{I}\ddot{\theta}$$

ou, aplicando a transformada de Laplace:

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{\mathcal{I}} \frac{1}{s^2}$$

sendo que a entrada $u(t)$ é dada pela soma de todos os momentos. Neste formato, trata-se de uma planta com dois integradores e é usualmente reduzida para $\frac{1}{s^2}$ (o valor para o momento de inércia da massa do corpo é uma constante...)

Modelo em Espaço de Estados

Para $G(s) = 1/s^2$, note que $\ddot{\theta}(t) = u(t)$. Pode-se definir:

$$x_1 = \theta; \quad x_2 = \dot{\theta} \quad \text{tal que} \quad \dot{x}_1 = x_2 \quad \text{e} \quad \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = u$$

Defina a saída $y = \theta = x_1$ (posição angular). Então o modelo é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t) \end{array} \right.$$