

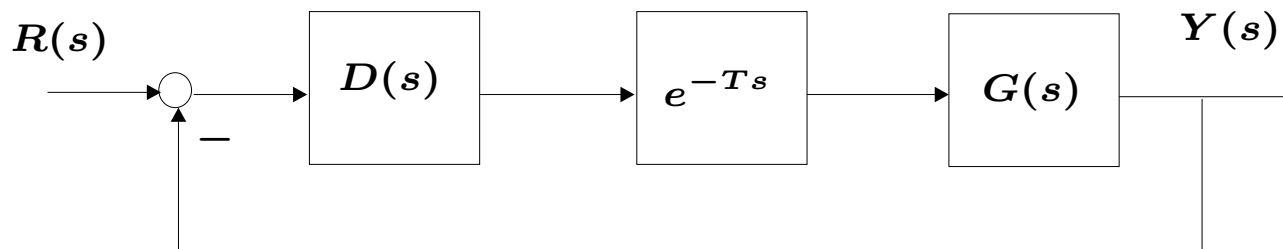
Exemplo de Projeto

1. Retardo no tempo
 - 1.1. Modelo de incerteza ?
2. Controle de velocidade de um fita de áudio digital sujeito a retardo no tempo
 - 2.1. Controle PID
 - 2.2. Estabilidade robusta
3. Exercícios

Retardo no Tempo – Modelo de Incerteza

Retardo no tempo incerto – Uma classe importante de incertezas é descrita por retardos no tempo, e^{-sT} , onde sabe-se que T varia dentro do intervalo $T_1 \leq T \leq T_2$

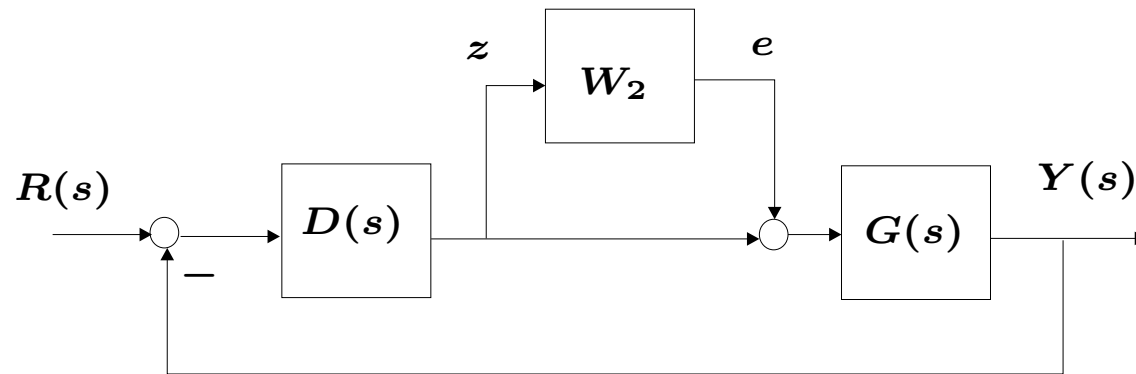
► Considere o sistema de controle realimentado abaixo, com $T_1 \leq T \leq T_2$



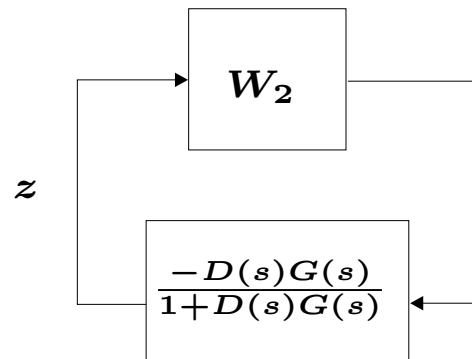
Motivação – **Fenômenos de transporte**, por exemplo, de informação, matéria ou energia. Retardo no tempo como uma função contínua ou variante no tempo ...

Retardo no Tempo – Modelo de Incerteza

A incerteza relativa ao retardo no tempo pode ser representada no formato de incerteza multiplicativa, ilustrado abaixo



Como considera-se estabilidade, $R(s) \equiv 0$, pode-se obter a configuração equivalente:



Retardo no Tempo – Modelo de Incerteza

Utilizando um argumento de ganho pequeno para o diagrama equivalente, ou escrevendo diretamente do critério de estabilidade robusta obtido, conclui-se que o sistema é estável se

Estabilidade Robusta



$$|\widetilde{W}_2| \left| \frac{D(s)G(s)}{1+D(s)G(s)} \right| < 1 \quad \text{ou} \quad |\widetilde{W}_2| < \left| 1 + \frac{1}{D(s)G(s)} \right|^{-1} \quad \text{ou} \quad |\widetilde{W}_2| < |\mathcal{T}|^{-1}, \quad \forall \omega$$

Modelo de incerteza \widetilde{W}_2 ?

Retardo no Tempo – Modelo de Incerteza

Define-se $G_{\Delta}(s) = e^{-sT} G(s)$

então

$$G_{\Delta}(s) - G(s) = e^{-sT} G(s) - G(s) = (e^{-sT} - 1) G(s)$$

ou

$$\frac{G_{\Delta}(s)}{G(s)} - 1 = e^{-sT} - 1$$

Define-se

$$\widetilde{W}_2 = e^{-sT} - 1$$

então

$$G_{\Delta}(s) = (1 + \widetilde{W}_2(s)) G(s)$$

Retardo no Tempo – Modelo de Incerteza

↪ O problema é que o retardo no tempo, T , não é precisamente conhecido. Então, pode-se construir um limitante superior, W_2 , tal que

$$\left| e^{-sT} - 1 \right| = \left| \widetilde{W}_2(j\omega) \right| < W_2, \quad \forall \omega \text{ e } T_1 \leq T \leq T_2$$

Nota Naturalmente W_2 pode ser um limitante **conservador** quando representa a incerteza

Nota Como discutido, se a condição de estabilidade robusta com o limitante não é satisfeita, o sistema em malha fechada pode ou não pode ser estável. Introdução do conservadorismo...

Retardo no Tempo – Modelo de Incerteza

Como determinar uma função de ponderação W_2 satisfatória ?

Como exemplo, suponha que se conheça os limites de variações para o retardo no tempo da forma: $0.1 \leq T \leq 1s$

▷ Pode-se construir uma função de ponderação (filtro passa-altas) da forma

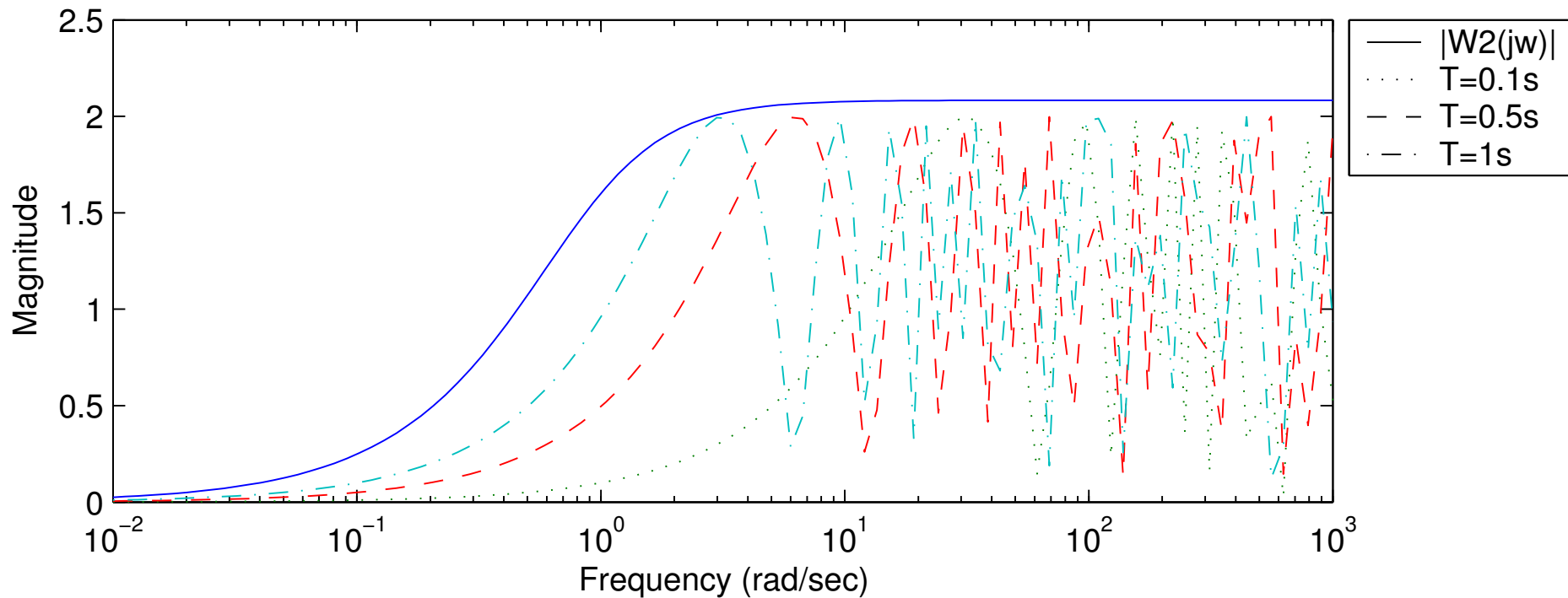
$$W_2(s) = \frac{\tau s + r_0}{(\tau/r_\infty)s + 1}$$

- r_0 – indica a incerteza relativa em estado estacionário
- $\frac{1}{\tau}$ – é (aproximadamente) a freqüência na qual a resposta tem magnitude 1
- r_∞ – é a magnitude da ponderação em altas freqüências (valores típicos, $r_\infty \geq 2$)

Retardo no Tempo – Modelo de Incerteza

Observando o diagrama de Bode para $|e^{-j\omega T} - 1|$ (mostrado abaixo), pode-se construir uma função de ponderação razoável da forma

$$W_2(s) = \frac{2.5s}{1.2s + 1}, \quad \text{com} \quad \frac{1}{\tau} \approx 0.4 \text{ rad/s}$$



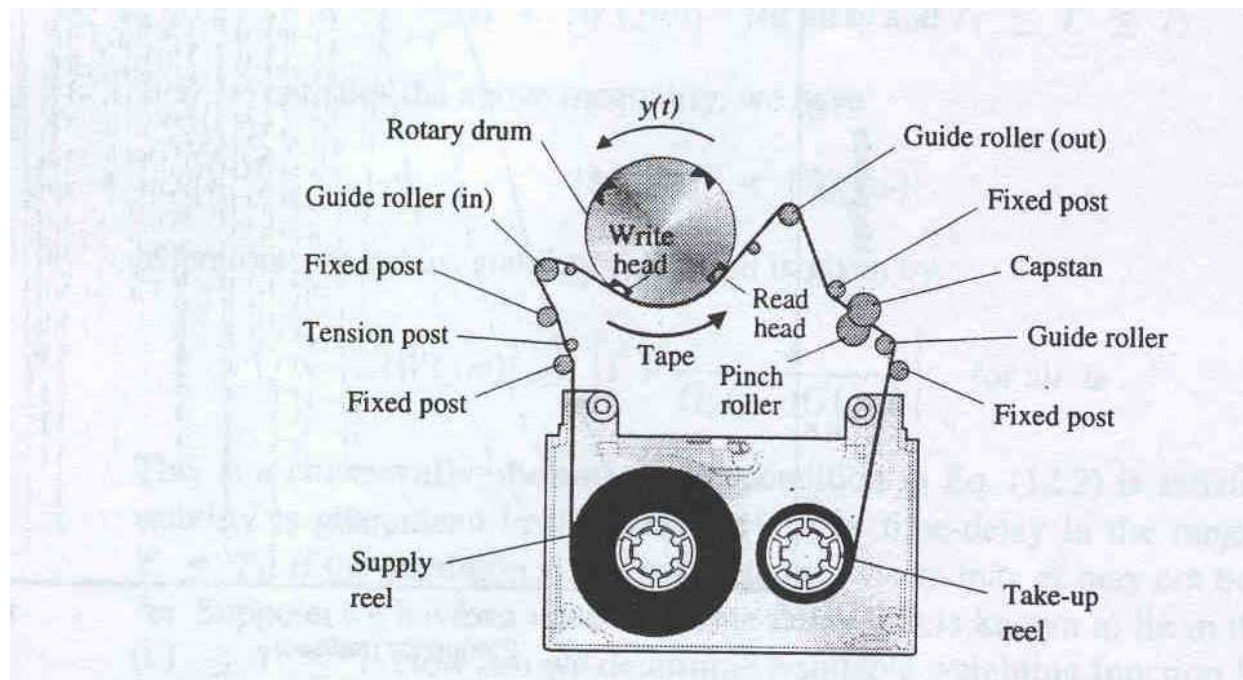
Exemplo de Projeto com Retardo no Tempo

Para este exemplo será considerado o problema de controle de velocidade de uma fita de audio digital adaptado do livro “*Modern Control Systems*”, Dorf & Bishop – DP12.2

↪ Uma fita de audio digital (FAD) guarda 1.3Gbytes de dados em um dispositivo do tamanho de um cartão de crédito, e é comercializado a preços próximos de um disquete (apesar de poder armazenar 1000 vezes mais dados). Uma FAD permite acesso a um arquivo de dados qualquer, em média, em 20s

Mecanismo da Unidade de Fita de Áudio Digital

A unidade de fita controla eletronicamente a velocidade relativa do tambor e fita, tal que a cabeça “segue” as trilhas na fita como mostrado na figura abaixo



O sistema de controle é mais complexo do que para um CD-ROM pois mais motores devem ser controlados precisamente: rolos de alimentação e chegada; tambor; controle de tensão e *capstan*

Exemplo de Projeto com Retardo no Tempo

Modelo o motor e a função de transferência da carga variam porque a fita move de rolo para outro

Função de transferência (*Dorf & Bishop – DP12.2*):

$$G(s) = \frac{K_m}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

onde os valores nominais são

$$K_m = 4, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 4$$

E o domínio de variação é

$$3 \leq K_m \leq 5$$

$$0.5 \leq p_1 \leq 1.5$$

$$3.5 \leq p_2 \leq 4.5$$

Exemplo de Projeto com Retardo no Tempo

▷ Objetivo de controle

Controlar a velocidade da FAD em um valor desejado na presença de incertezas significativas na planta

▷ Variável a ser controlada

Velocidade da FAD, $Y(s)$

Exemplo de Projeto com Retardo no Tempo

▷ Especificações de projeto

1. $M_p \% \leq 13\%$ e $t_a \leq 2s$ para entrada degrau unitário
2. Estabilidade robusta na presença de retardo no tempo na entrada da planta. O valor do retardo no tempo é incerto porém conhece-se a sua variação $0 \leq T \leq 0.05s$

- A especificação 1 deve ser satisfeita para **todas** as plantas $G(s)$
- A especificação 2 deve ser satisfeita para o **modelo nominal**

Exemplo de Projeto com Retardo no Tempo

- ▷ O sistema de controle considerado é do tipo realimentação unitária

Restrições sobre o projeto

- a.* Tempo de pico rápido
- b.* O controlador é um PID

$$D(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_I}{s}$$

- c.* $K_m K_D \leq 20$ quando $K_m = 4$

- ▷ Parâmetros de sintonia

Ganhos do PID: K_p , K_I e K_D

Projeto do Controlador PID

- Como restringe-se $K_m K_D \leq 20$ quando $K_m = 4$, deve-se selecionar $K_D \leq 5$
- Controlador PID projetado usando valores nominais para K_m , p_1 e p_2
- ▶ Análise de desempenho do sistemas de controle é realizado para vários valores de parâmetros da planta, usando uma simulação para verificar se a especificação (1) é satisfeita... (infelizmente!)

Modelo nominal:

$$G_0(s) = \frac{4}{(s+1)(s+4)}$$

Função de transferência em malha fechada

$$T(s) = \frac{D(s)G_0(s)}{1 + D(s)G_0(s)} = \frac{4K_D s^2 + 4K_p s + 4K_I}{s^3 + (5 + 4K_D)s^2 + (4 + 4K_p)s + 4K_I}$$

Projeto do Controlador PID

selecionando-se, por exemplo, $K_D = 5$, então a equação característica é reescrita como

$$s^3 + 25s^2 + 4s + 4(K_p s + K_I) = 0$$

colocando ' $s^3 + 25s^2 + 4s$ ' em evidência, obtém-se o formato padrão

$$1 + \frac{4K_p(s + K_I/K_p)}{s(s^2 + 25 + 4)} = 0$$

com raízes: $\{0; -0.1610; -24.8390\}$

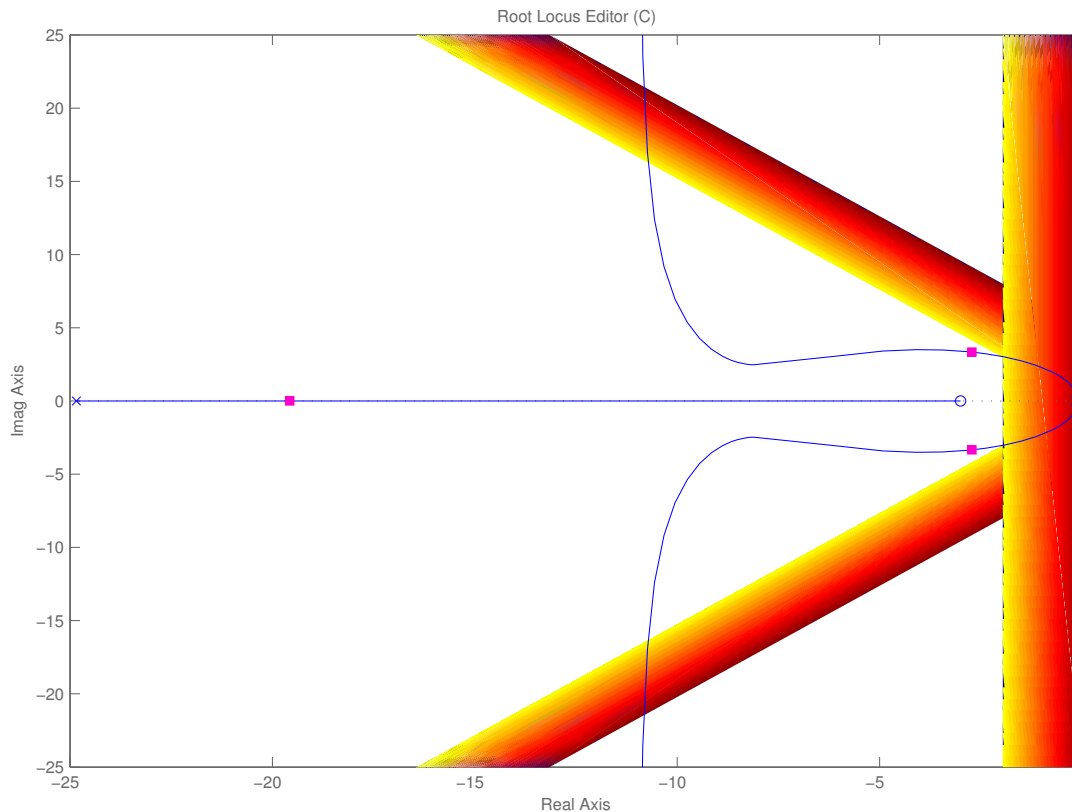
► Pelas especificações de t_a e $M_p\%$ obtém-se para a locação dos pólos dominantes:

$$\zeta\omega_n > 2 \quad \text{e} \quad \zeta > 0.55$$

◇ O que fazer? Selecione um valor para $z_0 = K_I/K_p$, e então pode-se construir o lugar das raízes com o ganho $4K_p$ como o parâmetro variante...

Projeto do Controlador Robusto

▷ Após algumas tentativas (rltool ou sisotool), pode-se escolher um valor razoável para $z_0 = 3$. O lugar das raízes é mostrado abaixo



O ganho que aloca os pólos na posição indicada é $4K_p \approx 120 \Rightarrow K_p = 30$

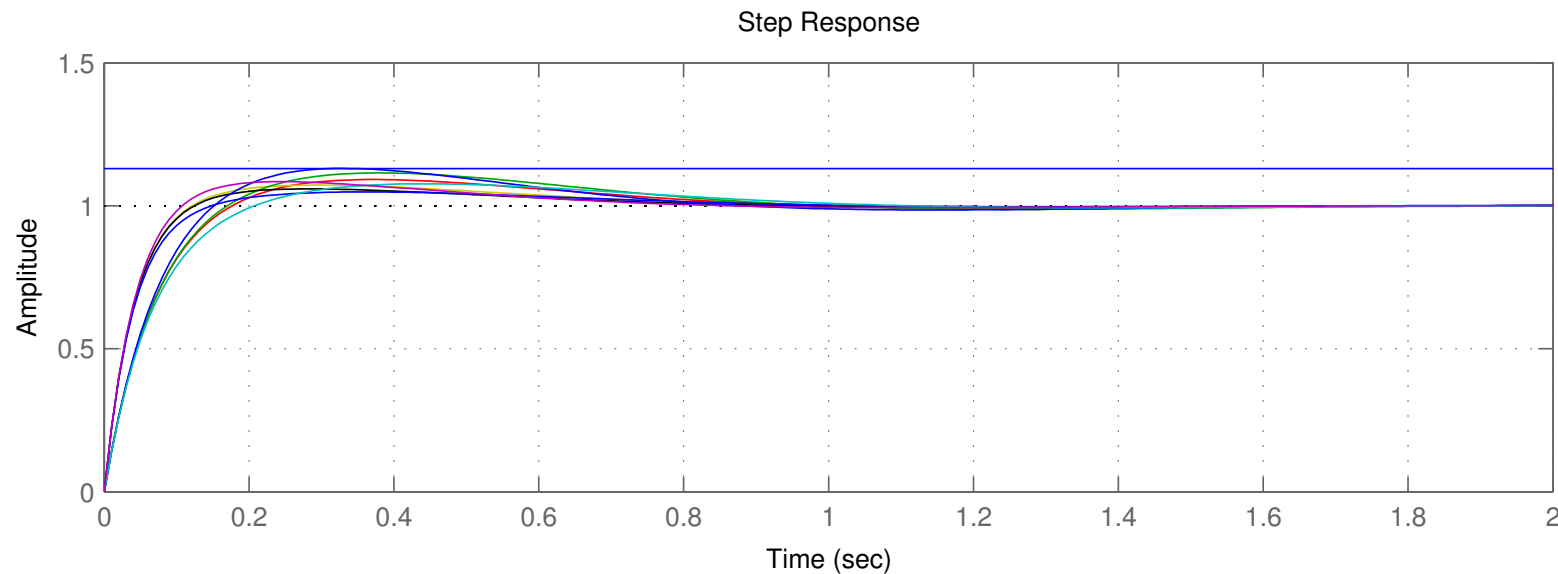
Análise de Desempenho Robusto

Como $K_p = 30$ então $K_I = z_0 K_p = 90$

Controlador PID

$$D(s) = 30 + \frac{90}{s} + 5s$$

Uma família de respostas ao degrau unitário é mostrado na figura abaixo para as 2^3 **combinações** dos valores **extremos (vértices)** de K_m , p_1 e p_2

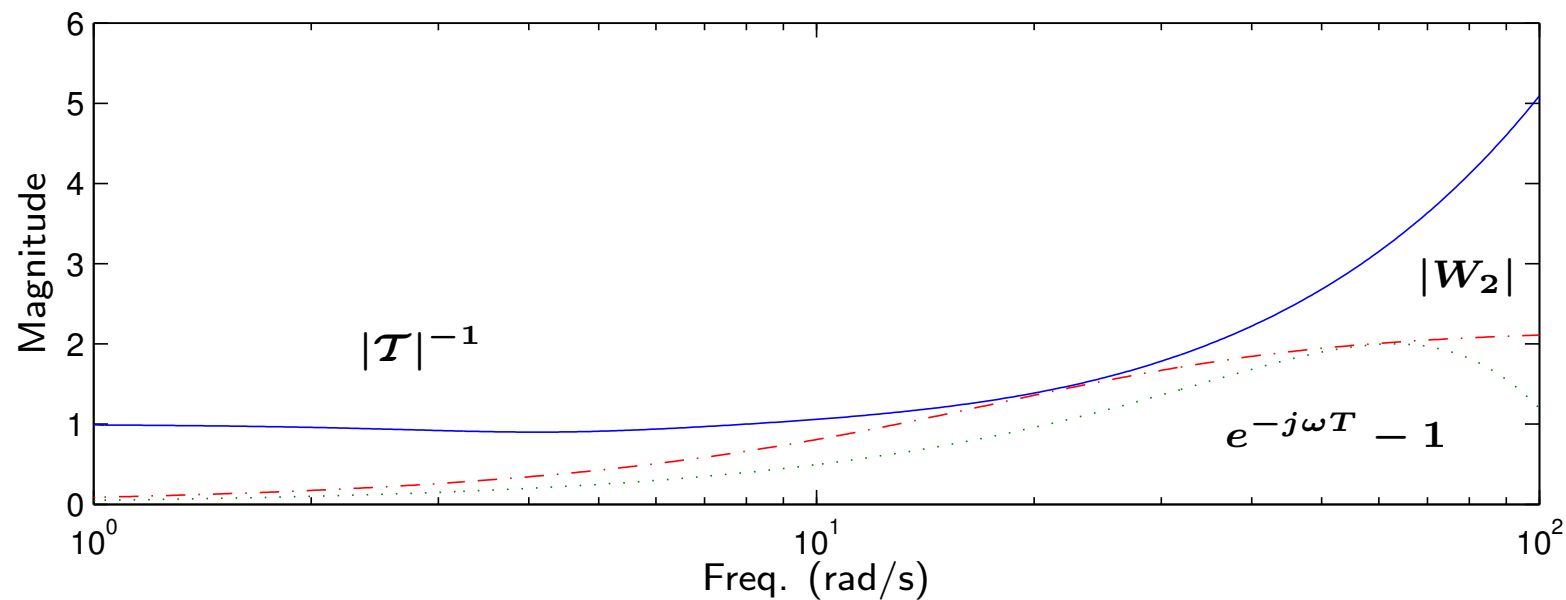


Análise de Estabilidade Robusta

Variação do retardo no tempo, $0 \leq T \leq 0.05s$. Limitante: $W_2(s) = \frac{0.087s}{0.04s + 1}$

$$\text{Critério de Estabilidade Robusta} \Rightarrow |W_2| < |\mathcal{T}|^{-1}, \forall \omega$$

Diagrama de Bode



Exercícios

- 1. (Exercício Computacional)** Repita o projeto para o controle de velocidade da fita de áudio digital utilizando o mesmo modelo incerto e considerando que:
 - 1.1** não há restrição sobre o parâmetro derivativo do PID, isto é, K_D não é fixado a uma faixa;
 - 1.2** o retardo no tempo varia de $0.05 \leq T \leq 0.1s$
- 2.** Obtenha uma função de ponderação que possa ser utilizada na análise de estabilidade robusta e represente um retardo no tempo incerto de $0.1 \leq T \leq 0.5s$

Exercícios

3. Obteve-se uma condição para o **desempenho nominal** (denotada por DP) em termos de uma função de ponderação da forma:

$$\mathbf{DP} \Leftrightarrow |W_1 \mathcal{S}| < 1, \quad \forall \omega \Leftrightarrow |W_1| < |1 + L| \quad (1)$$

onde \mathcal{S} é a função sensibilidade e L é o ganho de malha ($\mathcal{S} = 1/(1 + L)$ e $L = DG$)

Também obteve-se uma condição para a **estabilidade robusta** (ER) em termos de uma função de ponderação, dada por:

$$\mathbf{ER} \Leftrightarrow |W_2 \mathcal{T}| < 1, \quad \forall \omega \Leftrightarrow |W_2 L| < |1 + L| \quad (2)$$

onde \mathcal{T} é a função complementar de sensibilidade ($\mathcal{S} + \mathcal{T} = 1$)

Exercícios

Uma terceira condição, denominada de **desempenho robusto** (DR), pode ser obtida, considerando o sistema incerto descrito por:

$$G = DG_0(1 + W_2\Delta), \quad |\Delta| \leq 1. \quad (3)$$

onde D é um controlador e G_0 o modelo nominal (precisamente conhecido)

A condição de desempenho robusto (DR) pode ser vista como uma combinação dos critérios de desempenho nominal (1) e estabilidade robusta (2), isto é

$$\mathbf{DR} \Leftrightarrow \max_{\omega} (|W_1\mathcal{S}| + |W_2\mathcal{T}|) < 1, \quad \forall \omega \quad (4)$$

(Observe que se $W_1 = W_2 = 1$ então obtém-se a tradicional relação $\mathcal{S} + \mathcal{T} = 1$)

Exercícios

Note que a condição (4) é igual a:

$$\begin{aligned} \text{DR} &\Leftrightarrow \left| \frac{W_1}{1+L} \right| + \left| \frac{W_2 L}{1+L} \right| < 1, \quad \forall \omega \\ &\Leftrightarrow |W_1| + |W_2 L| < |1+L|, \quad \forall \omega \end{aligned} \quad (5)$$

4.1 Esboce a condição de desempenho robusto (5) no diagrama de Nyquist

4.2 Qual a interpretação da condição (5) no diagrama de Nyquist