Desempenho de Sistemas de Controle Realimentados

1. Análise da resposta temporal
2. Sinais de teste
3. Desempenho de sistemas de segunda ordem
4. Efeitos de um terceiro polo e um zero na resposta de um sistema de segunda ordem
5. Estimação do coeficiente de amortecimento
6. Localização das raízes no plano-s e sua relação com a resposta transitória

Análise da Resposta Temporal de Sistemas de Controle

A resposta temporal $y(t)$ de um sistema de controle é dividida em duas partes:

1. $y_t(t)$, resposta transitória

2. $y(\infty)$, resposta em regime permanente ou estado estacionário ("*steady-state*")

$$y(t) = y_t(t) + y(\infty)$$

▷ Estuda-se primeiramente o comportamento da resposta transitória e posteriormente a resposta em estado estacionário

Análise da Resposta Temporal de Sistemas de Controle

▷ A resposta transitória é definida como a parte da resposta que tende a zero quando o tempo tende a infinito:

$$\lim_{t \to \infty} y_t(t) = 0$$

▷ A resposta em estado estacionário é a parte da resposta que permanece quando a resposta transitória iguala a zero, podendo ser constante ou podendo ser um sinal que varia no tempo com padrão constante, como um sinal senoidal de amplitude, frequência e fase constante, ou um sinal tipo rampa com inclinação constante.

Especificações Temporais de Desempenho?

Trata-se de especificações que se deseja impor ao projeto de controle e envolve requisitos associados à resposta temporal do sistema em malha fechada. Sendo as especificações atendidas, espera-se que o sistema em malha fechada responda adequadamente ao controle projetado

▷ Para uma entrada de comando específica, pode-se considerar diferentes especificações temporais no contexto transitório e em estado estacionário

▷ No geral, no entanto, o problema é que as especificações temporais são concorrentes. Por exemplo, impor que o sistema tenha uma resposta transitória muito rápida irá, provavelmente, gerar uma magnitude elevada no sinal de saída do sistema. Por outro lado, caso se imponha também que a magnitude do sinal de saída não ultrapasse um certo limite, é necessário encontrar uma solução de compromisso já que se deseja também uma resposta transitória muito rápida

▷ O que fazer? Após ajustes sucessivos no controle em malha fechada, pode-se obter um compromisso entre as especificações desejadas. Ajuste fino...

Sinais de Teste

É um conjunto de sinais que podem generalizar vários tipos de entradas que os sistemas de controle estão sujeitos na prática

Degrau $r(t) = \begin{cases} A & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad R(s) = A/s$

Rampa $r(t) = \begin{cases} At & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad R(s) = A/s^2$

Parabólica $r(t) = \begin{cases} At^2/2 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad R(s) = A/s^3$

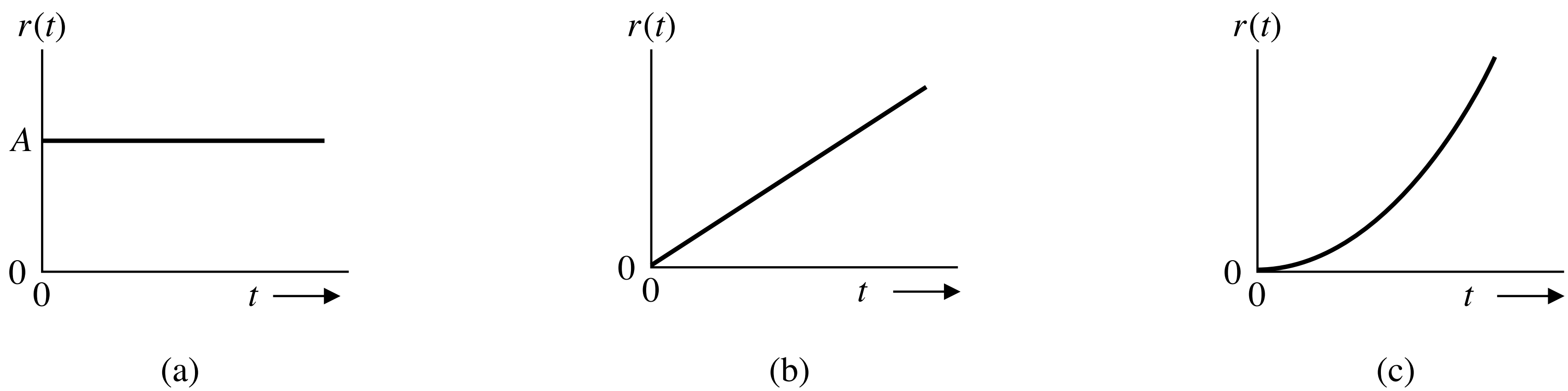


Figure 5.2 Test input signals: (a) step, (b) ramp, (c) parabolic

Resposta Transitória do Sistema de Primeira Ordem

Considere o sistema de primeira ordem $G_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s+a}$

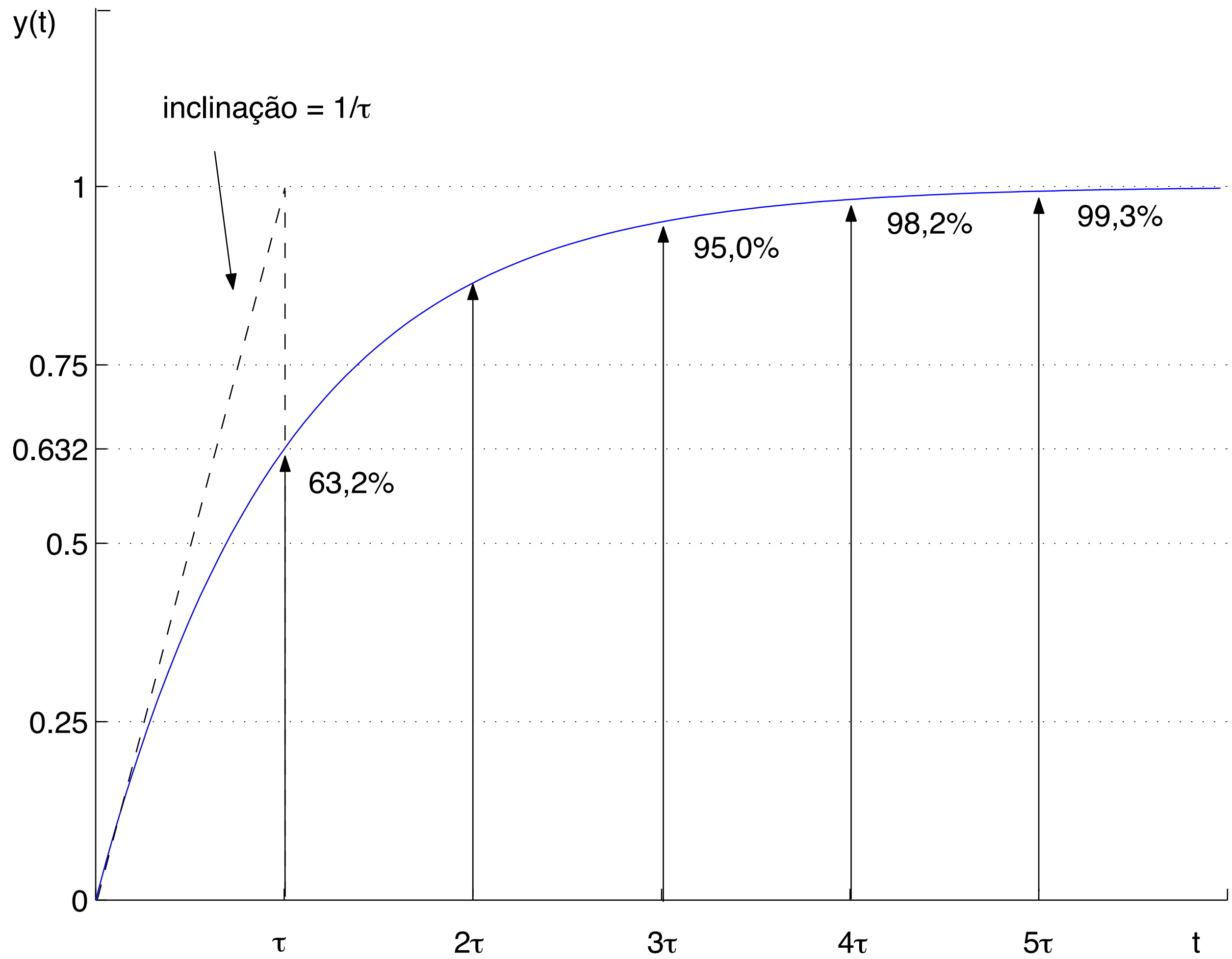
Para uma entrada tipo degrau unitário, a resposta do sistema é

$$Y(s) = G_1(s)R(s) = \frac{k}{s+a}\frac{1}{s} = \frac{k}{s(s+a)} = \frac{k/a}{s} - \frac{k/a}{s+a}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{k}{a}(1 - e^{-at})$$

Se $e^{-at} \to 0$, a resposta é limitada e o valor $\tau = 1/a$ é chamado de constante de tempo do sistema e corresponde a 63% da resposta transitória (pode ser estimado experimentalmente e, assim, obtém-se um modelo para o sistema...)

Resposta Transitória do Sistema de Primeira Ordem



Desempenho de Sistemas de Segunda Ordem

Considere o sistema abaixo

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s}$$

Note que $G(s)$ em malha fechada com realimentação unitária descreve um sistema de 2a. ordem (com $R(s)$ entrada de referência):

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s)$$

$\Updownarrow$ Degrau: $R(s) = 1/s$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Desempenho de Sistemas de Segunda Ordem

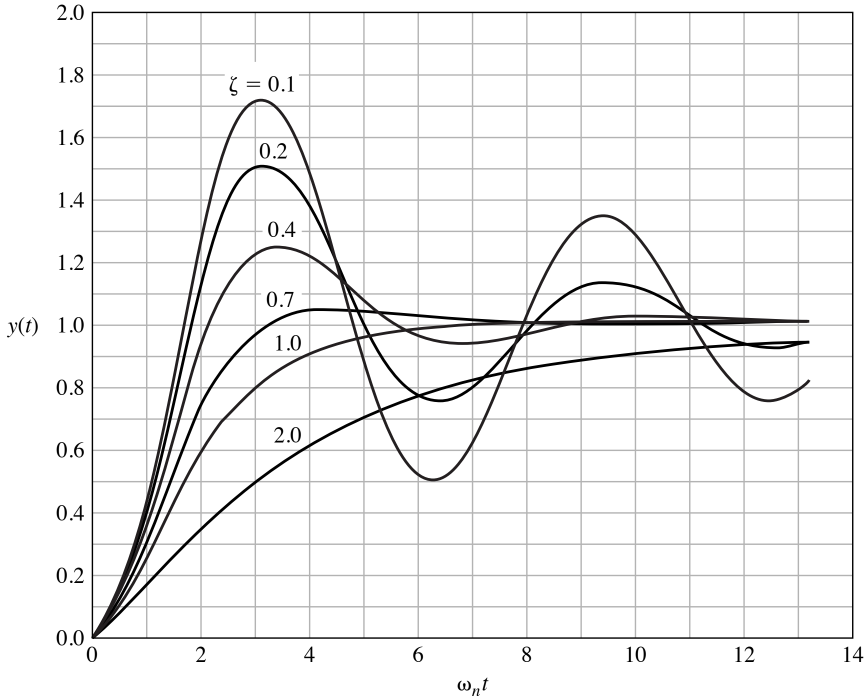
Note que obtivemos na Aula 1 a resposta temporal para o sistema de segunda ordem com entrada degrau unitário, que é dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\beta}\left(\beta\cos\,\omega_n\beta t + \zeta\,\mathrm{sen}\,\omega_n\beta t\right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\beta}\left(\mathrm{sen}\,\omega_n\beta t + \theta\right), \quad \theta = \cos^{-1}\zeta,\; 0 < \zeta < 1 \end{aligned}$$

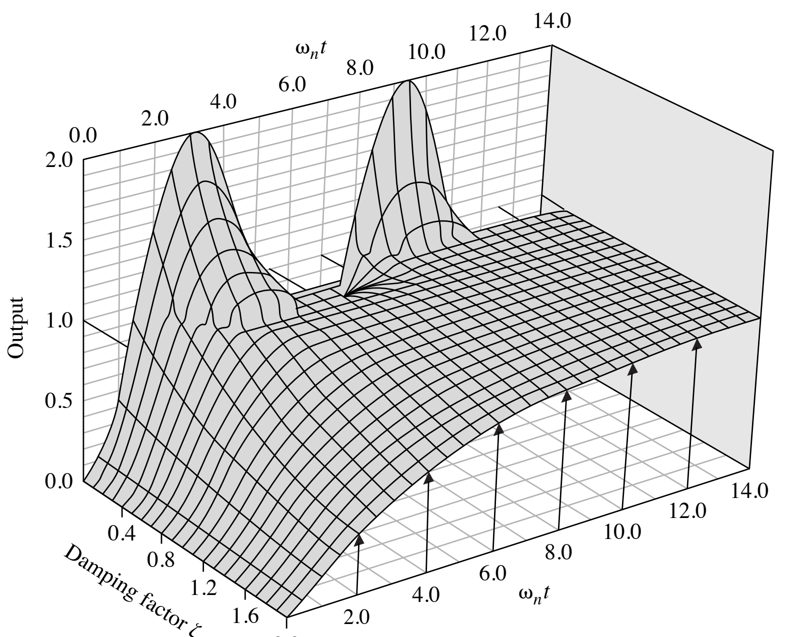
▷ Sendo $\beta = \sqrt{1-\zeta^2}$

- Para entrada impulso unitário (basta derivar a resposta a entrada degrau):

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t}\left(\mathrm{sen}\,\omega_n\beta t\right)$$



(a)



(b)

Figure 5.5 (a) Transient response of a second-order system (Eq. 5.9) for a step input (b) The transient response of a second-order system (Eq. 5.9) for a step input as a function of ζ and $\omega_n t$

Sistemas de Segunda Ordem

O sistema de segunda ordem pode ser classificado de acordo com o valor do amortecimento ζ que define o tipo dos polos do sistema:

$\zeta = 0 \Rightarrow$	polos em $\pm j\omega_n$	não-amortecido
$0 < \zeta < 1 \Rightarrow$	polos em $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	subamortecido
$\zeta = 1 \Rightarrow$	polos em $-\omega_n$	criticamente amortecido
$\zeta > 1 \Rightarrow$	polos em $-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	superamortecido
$\zeta < 0 \Rightarrow$	polos em $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	instável $(-\zeta\omega_n > 0)$

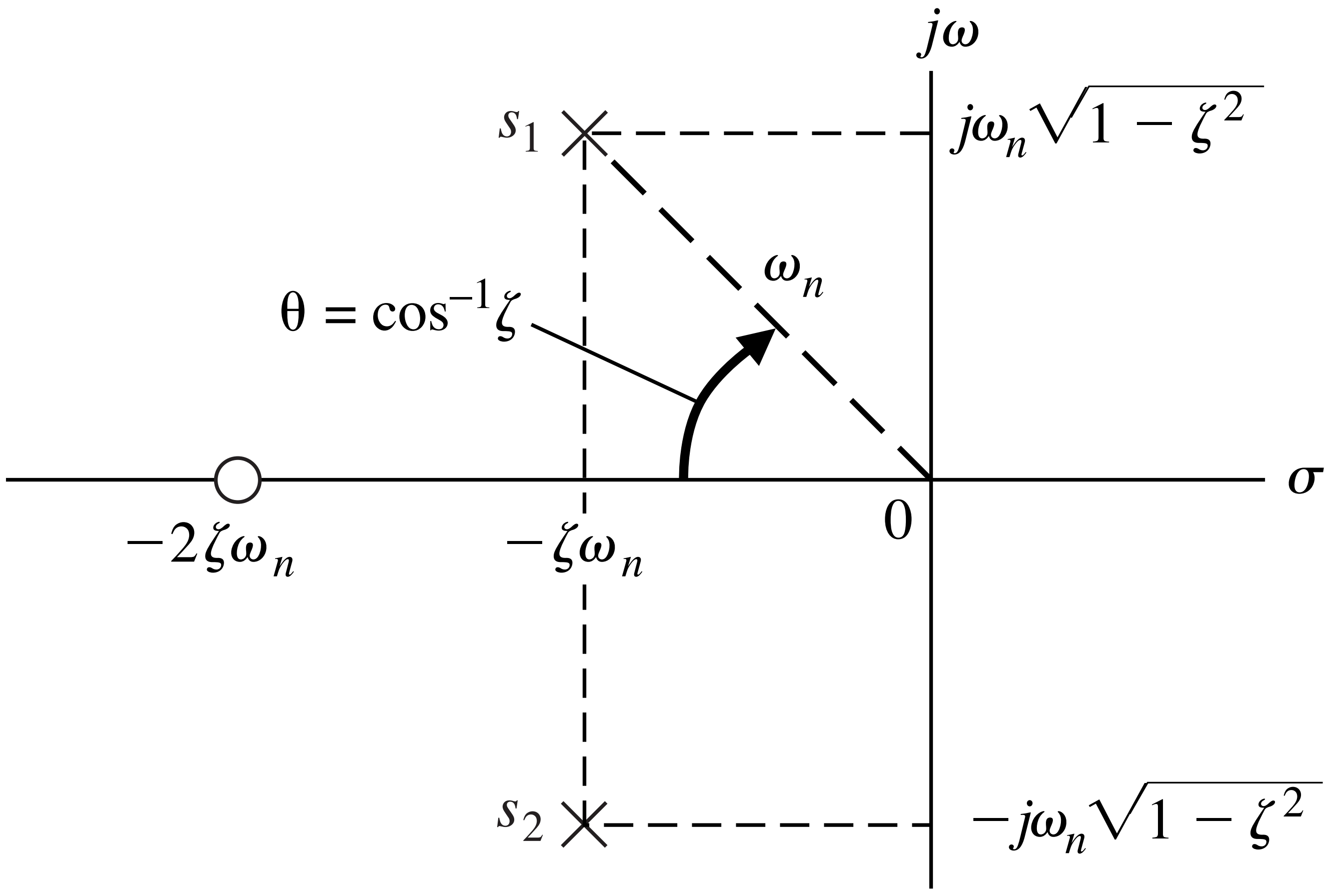


Figure 2.9 An *s*-plane plot of the poles and zeros of *Y*(*s*)

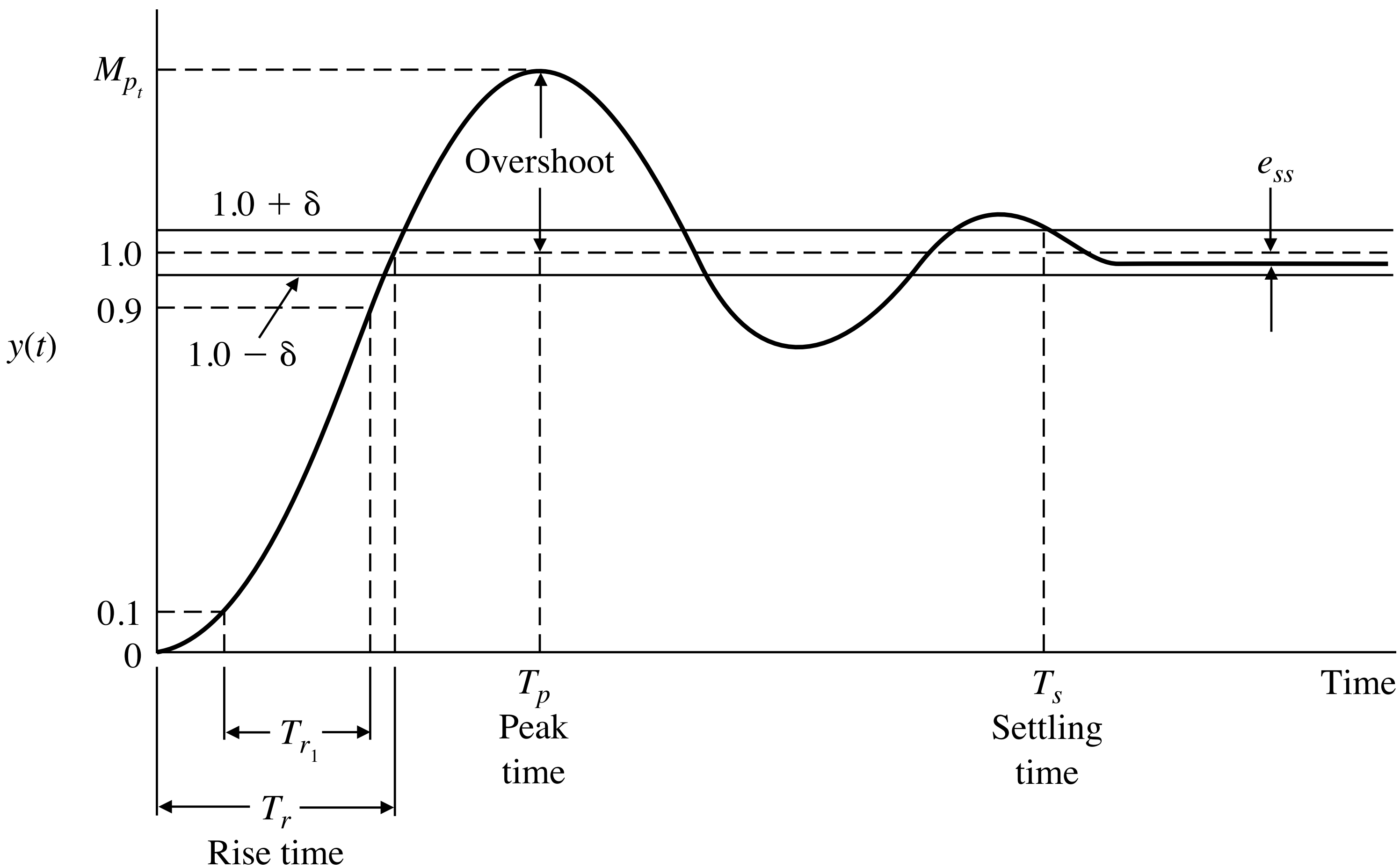


Figure 5.7 Step response of a control system (Eq. 5.9)

Especificações para Resposta Transitória

1. Tempo de subida t_r ("rise time"): é o tempo necessário para o sinal de saída variar de 10% a 90% (sistemas sobre-amortecidos) ou de 0% a 100% (sistemas sub-amortecidos) do valor final. Uma aproximação usual é
   $t_r \cong 1.8/\omega_n$

2. Tempo de acomodação t_a (ou "settling time" t_s): é o tempo gasto para o sinal acomodar na faixa de $\pm 2\%$ a $\pm 5\%$ do valor final

3. Sobre-sinal máximo percentual M_p ("overshoot"): diferença entre o valor máximo de pico atingido e o valor final em percentual do valor final

4. Tempo do primeiro pico t_p: instante de tempo em que ocorre o sobre-sinal máximo do sinal

5. Tempo de atraso t_d ("delay time"): é o tempo para o sinal alcançar 50% do valor final

Tempo de Acomodação (t_a)

▷ Considerando a margem de 2% para tolerância no tempo de acomodação (t_a), a envoltória da resposta é então limitada por

$$e^{-\zeta\omega_n t_a} < 0.02$$

$$\zeta\omega_n t_a \cong 4$$

$$\boxed{t_a = \frac{4}{\zeta\omega_n}}$$

Overshoot (M_p) e Tempo de Pico (t_p)

▷ Como M_p e t_p são pontos de "máximo" então faça $\dfrac{dy(t)}{dt} = 0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy(t)}{dt} &= \frac{1}{\beta}\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\left[\beta\cos(\omega_n\beta t) + \zeta\text{sen}(\omega_n\beta t)\right] \\
&\quad + \frac{1}{\beta}\beta^2\omega_n\text{sen}(\omega_n\beta t)e^{-\zeta\omega_n t} - \frac{1}{\beta}\zeta\omega_n\beta\cos(\omega_n\beta t)e^{-\zeta\omega_n t} \\
&= \left(\frac{1}{\beta}\zeta^2\omega_n + \beta\omega_n\right)e^{-\zeta\omega_n t}\text{sen}(\omega_n\beta t) \\
&= \frac{\zeta^2\omega_n + (1-\zeta^2)\omega_n}{\beta}e^{-\zeta\omega_n t}\text{sen}(\omega_n\beta t) \\
&= \frac{\omega_n}{\beta}e^{-\zeta\omega_n t}\text{sen}(\omega_n\beta t) \quad \text{(que é a resposta ao impulso...)}
\end{aligned}
$$

Tempo de Pico (t_p)

Então

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \beta t) = 0$$

Note que se $dy(t)/dt = 0$, então $\text{sen}(\omega_n \beta t) = 0$. O instante em que ocorrerá o máximo será o tempo de pico (e lembre-se que $\text{sen}(\cdot)$ se anula em π) então:

$$\omega_n \beta t_p = \pi \qquad \text{(lembrando que } \beta = \sqrt{1-\zeta^2}\text{)}$$

$$\boxed{\therefore \qquad t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Overshoot ou Sobre-sinal ou Sobre-elevação (M_p)

Do mesmo modo, note que a sobre-elevação máxima (overshoot ou sobre-sinal) ocorre no instante que se tem o tempo de pico t_p, portanto

$$
\begin{aligned}
M_{p_t} &= 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t_p} \left[\beta \cos(\omega_n \beta t_p) + \zeta \operatorname{sen}(\omega_n \beta t_p)\right] \\
&= 1 - \frac{1}{\cancel{\beta}} \underbrace{e^{-\zeta\cancel{\omega_n}\frac{\pi}{\cancel{\omega_n}\sqrt{1-\zeta^2}}}}_{=M_p} \left[\cancel{\beta} \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \zeta \underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{=0}\right]
\end{aligned}
$$

O que ultrapassa a entrada degrau unitário?

$$
\boxed{M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \qquad \textbf{para } 0 \le \zeta < 1}
$$

$$
\boxed{\textbf{ou} \quad M_{p\%} = 100\ e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}
$$

Efeito de um Terceiro Polo e/ou um Zero

Efeito de um Terceiro Polo na Resposta do Sistema de 2a. Ordem

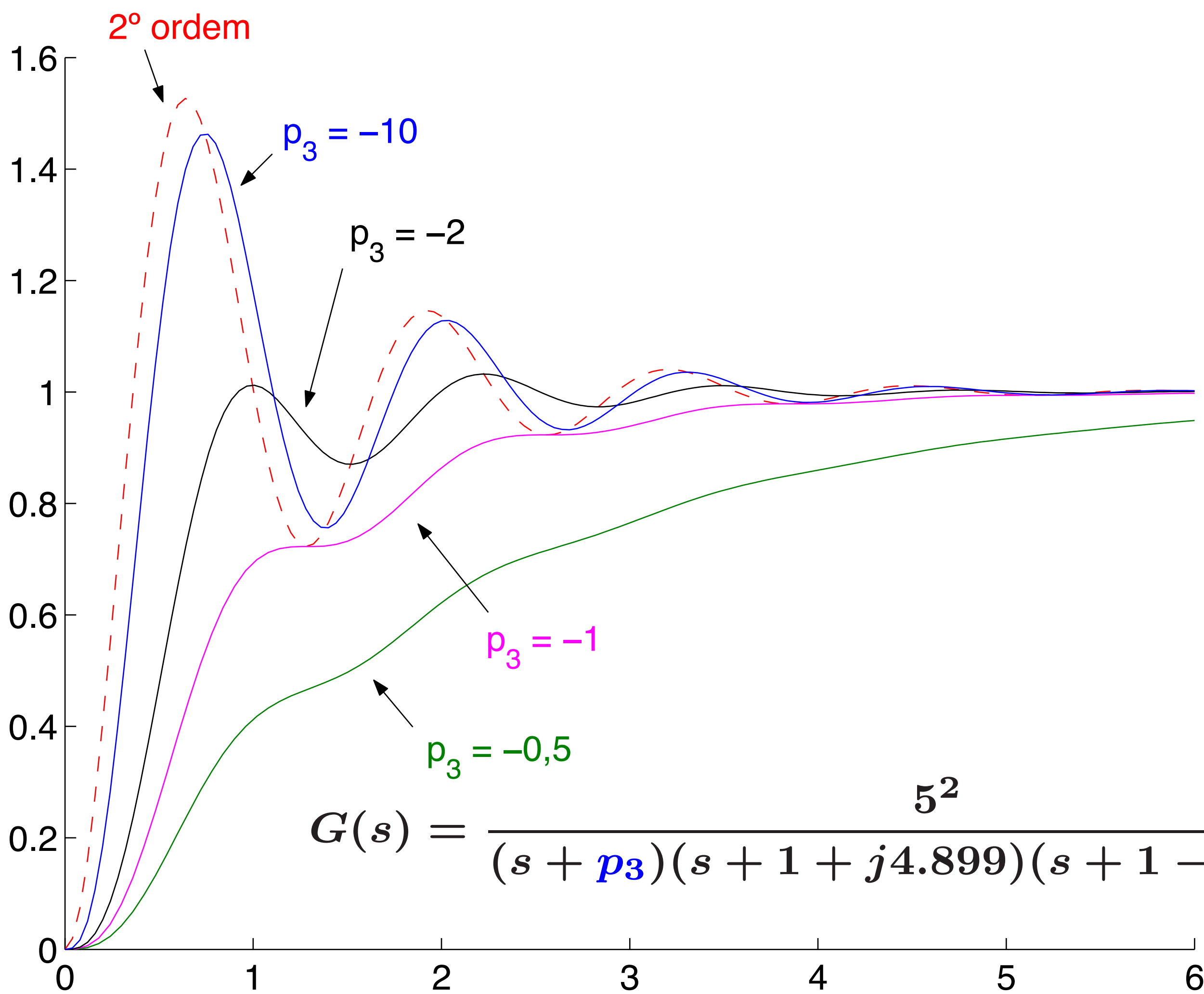
▷ Quando um sistema possui dois polos complexos (oscilações subamortecidas) e um polo real, a resposta total será uma combinação das duas, predominando aquela que for mais lenta (polos mais próximos da origem)

▷ Para um sistema de 3a. ordem

$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(\gamma s + 1)}, \quad \omega_n = 1$$

Experimentalmente pode-se verificar que se $|1/\gamma| \geq 10\,|\zeta\omega_n|$ então o desempenho do sistema de 3a. ordem é similar ao de 2a. ordem (o sistema tem um par de polos dominantes)

Efeito de um Terceiro Polo - Resposta ao Degrau



$$G(s) = \frac{5^2}{(s + p_3)(s + 1 + j4.899)(s + 1 - j4.899)}$$

Sistemas de Ordem Superior e Efeito dos Zeros

▷ A resposta ao degrau de um sistema de ordem superior será uma combinação das respostas de fatores de primeira ordem e de fatores de segunda ordem:

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n_1} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=n_1+1}^{n} A_i \frac{e^{-\alpha_i t}}{\sqrt{1-\zeta_i^2}} \operatorname{sen}(\omega_{d,i} t + \theta_i)$$

O efeito dos zeros da função de transferência sobre a resposta transitória é atenuar o efeito dos polos em sua proximidade – altera os valores dos coeficientes A_i

▷ polos eventualmente dominantes podem ter influência reduzida na resposta transitória devido a presença de zeros em sua proximidade!!

Sistemas de Ordem Superior e Efeito dos Zeros

(Exemplo da página 20) Note que a FT do sistema sem adição de zero e com um polo em $p_3 = -1/2$ e os outros dois polos em $-1 \pm j4.899$ é:

$$T(s) = \frac{5^2}{(1/p_3 s + 1)(s^2 + 2s + 5^2)}$$

Portanto a resposta temporal é:

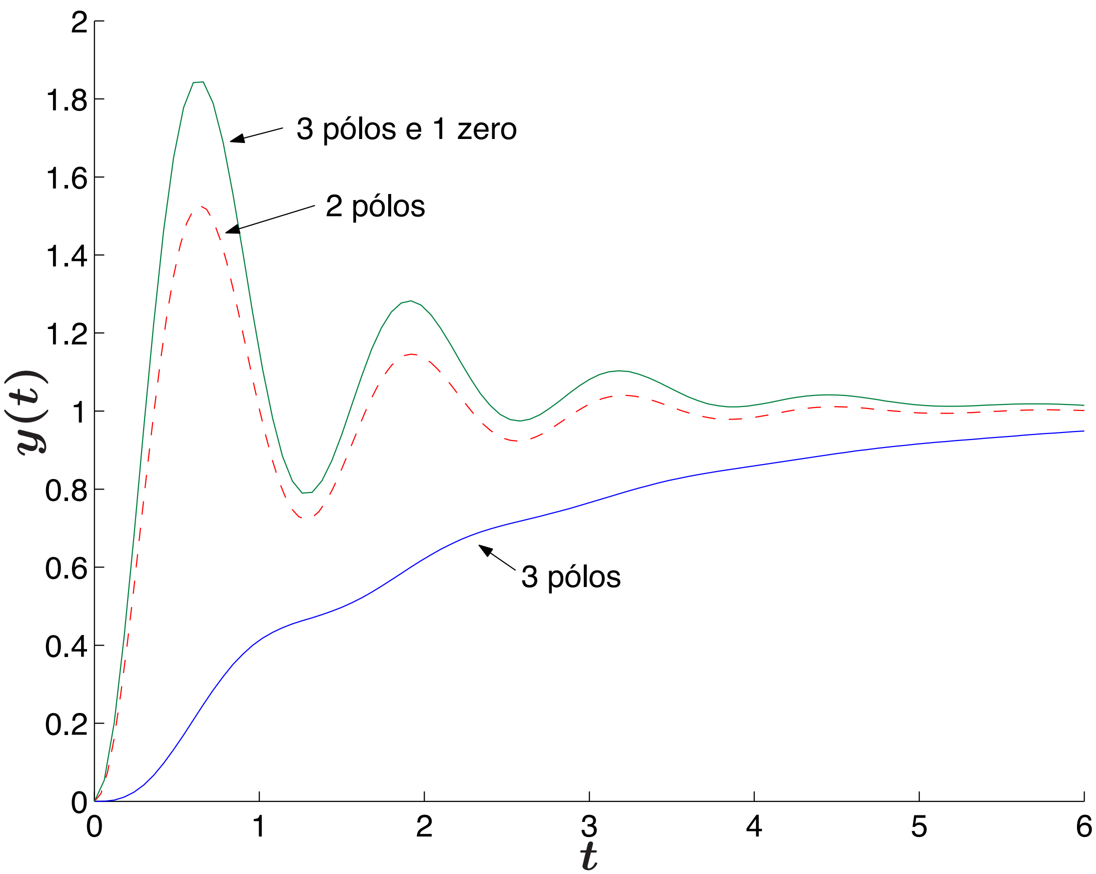
$$y(t) = 1 - 1.03e^{-\frac{t}{2}} + 0.05\frac{e^{-1t}}{\sqrt{1-0.2^2}}\,\text{sen}(4.899t + 78.46^\circ)$$

Qual seria o efeito ao se acrescentar um zero em $z = -0.4$, próximo ao polo real $p_3 = -1/2$? Neste caso a resposta temporal é:

$$y(t) = 1 + 0.26e^{-\frac{t}{2}} - 0.64\frac{e^{-1t}}{\sqrt{1-0.2^2}}\,\text{sen}(4.899t + 78.46^\circ)$$

Nota-se claramente a mudança nos pesos A_i de cada termo, reduzindo a importância da parcela $e^{-\frac{t}{2}}$ que é relativa ao polo real p_3 – De fato, o sistema resultante pode se aproximar de um sistema de 2a. ordem

Sistemas de Ordem Superior e Efeito dos Zeros



Efeito da adição de um zero em $z = -0.4$, próximo ao polo real em $p_3 = -0.5$.

Comparativo das respostas temporais

Localização das Raízes no Plano-s $\times$ Resposta Transitória

▷ A resposta ao degrau de um sistema de ordem superior será uma combinação de respostas de fatores de primeira ordem e de fatores de segunda ordem

$$Y(s) = G(s)/R(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_i}{s+a_i} + \sum_{i=n_1+1}^{n} \frac{A_i \omega_{n,i}^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2}$$

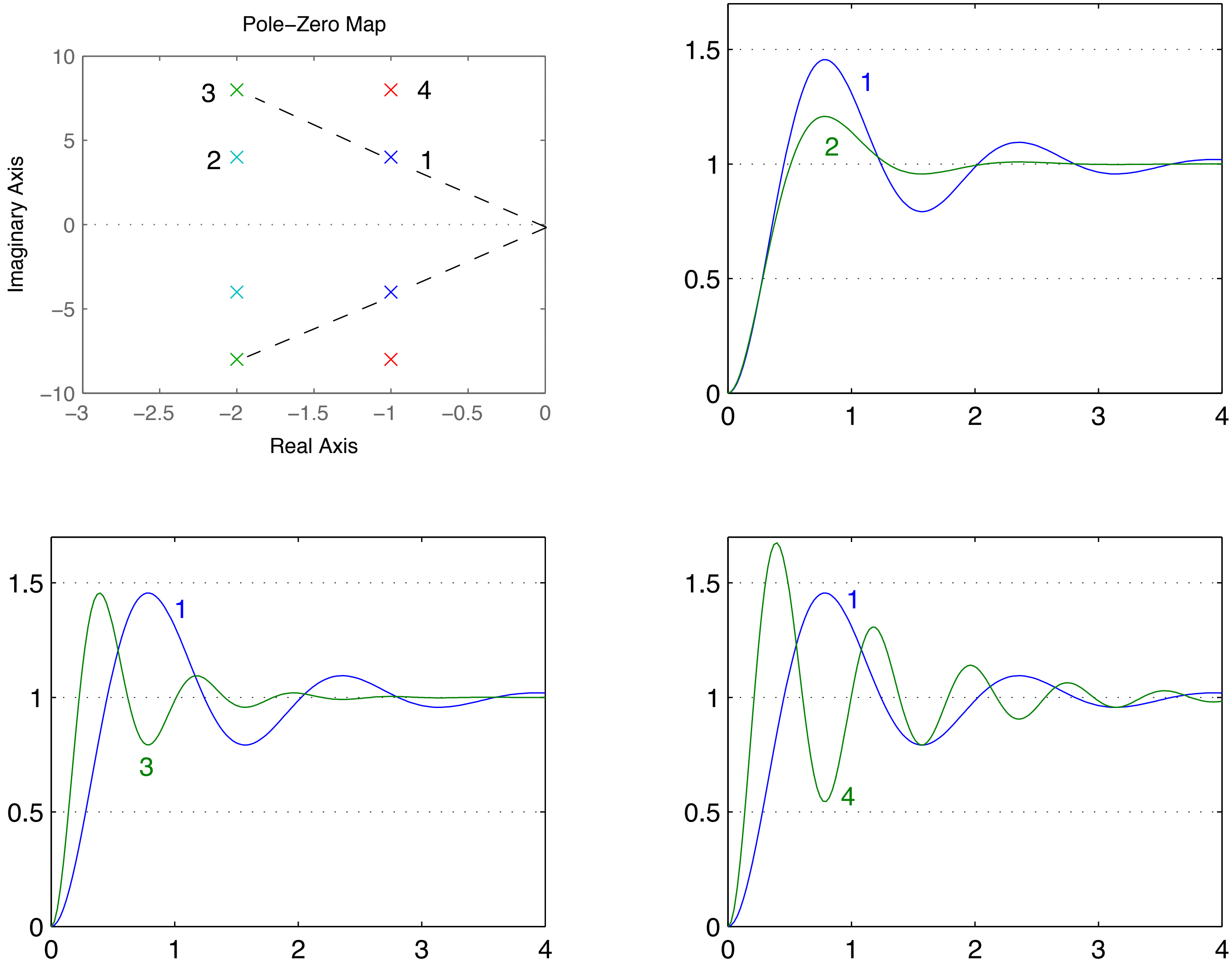
cuja resposta temporal é dada por

$$y(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n_1} A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{i=n_1+1}^{n} A_i \frac{e^{-\alpha_i t}}{\sqrt{1-\zeta_i^2}} \,\text{sen}(\omega_{d,i} t + \theta_i)$$

▷ Os polos de $G(s)$ definem o comportamento da resposta transitória

▷ Os zeros determinam os pesos relativos de cada modo

Localização de um par de polos e seus efeitos



Estimação do Coeficiente de Amortecimento

▷ Meça $M_{p\%}$ e determina-se o valor correspondente do coeficiente de amortecimento no gráfico $M_{p\%}$ versus ζ, ou de

$$\boxed{M_{p\%} = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Exercício

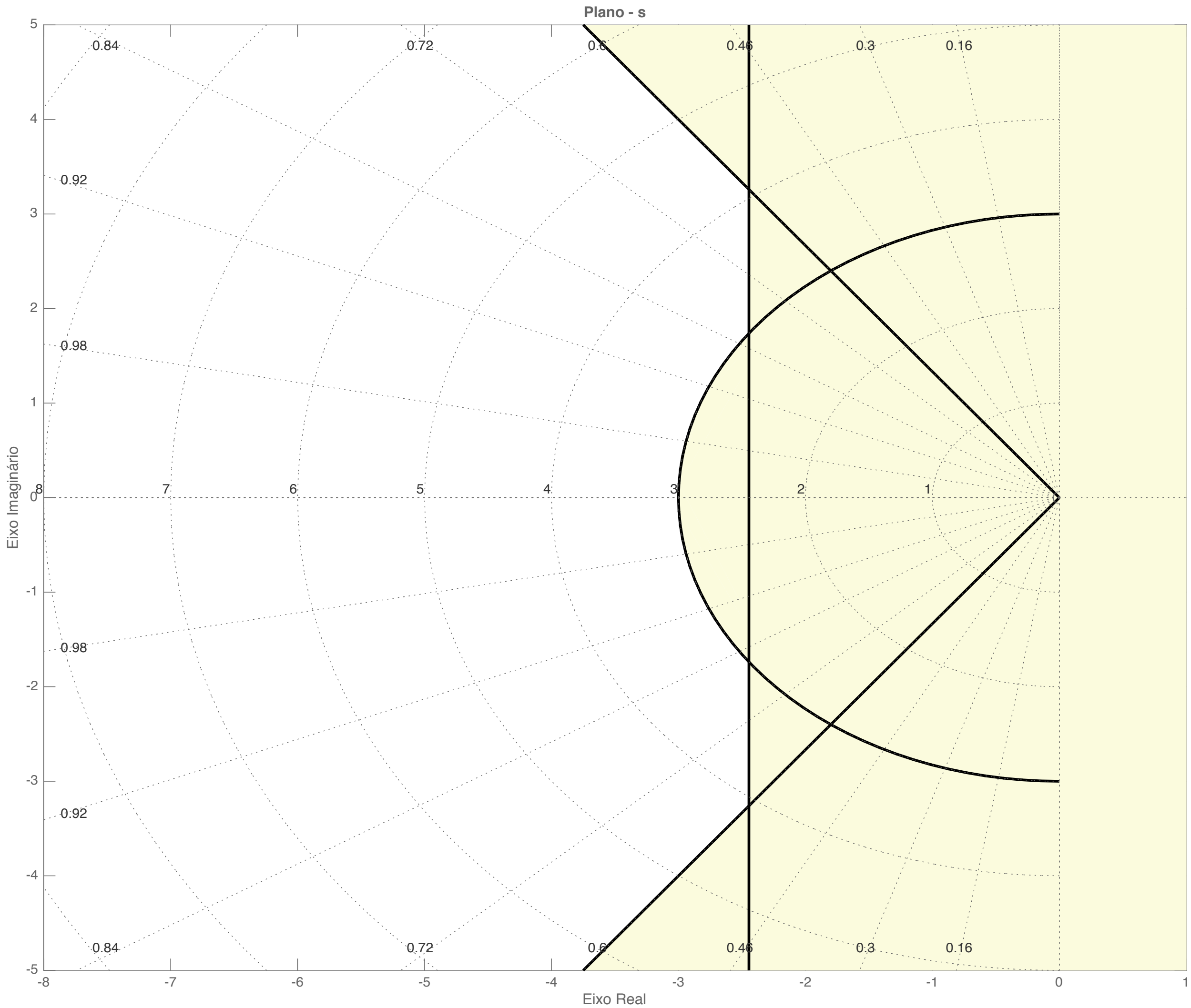
Esboce a região no plano-s que atenda requisitos de resposta temporal para um sistema de segunda ordem com overshoot: $M_{p\%} \leq 10\%$ (ou $M_p \leq 0.1$); tempo de acomodação: $t_a \leq 1.6$s; e tempo de subida: $t_r \leq 0.6$s

▷ Note que da fórmula para o overshoot $(M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 0.1)$, obtém-se $\zeta \geq 0.6$

▷ Da fórmula de tempo de acomodação obtém-se $t_a = 4/\zeta\omega_n \leq 1.6$, ou $\zeta\omega_n \geq 2.5$

▷ O tempo de subida é calculado da relação $t_r = 1.8/\omega_n \leq 0.6$ ou $\omega_n \geq 3$ rad/s

Plano-s



Plano - s
0.84
0.72
0.6
0.46
0.3
0.16
0.92
0.98
8
7
6
5
4
3
2
1
Eixo Imaginário
Eixo Real