Generalidades...

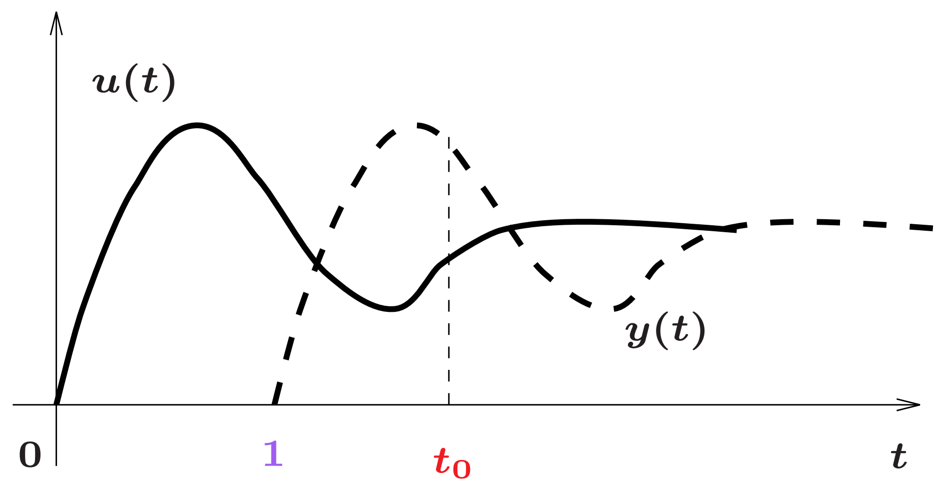
1. Tipificando Sistemas
2. Equações Diferenciais
3. Equações a Diferença

Tipificando Sistemas

⇝ Sistemas com Parâmetros Distribuídos – descrição por equações diferenciais parciais – sistemas de dimensão infinita

Sistemas com retardo no tempo, e.g., a saída é a entrada atrasada:

$$y(t) = u(t-1)$$



Estado: $\{u(t), \quad t_0 - 1 \leq t < t_0\}$ (infinitos pontos)

Tipificando Sistemas

$\rightsquigarrow$ Parâmetro Concentrado – descrição por equações diferenciais ordinárias ou mesmo por equações puramente algébricas – número de variáveis é finito $\surd$

$\rightsquigarrow$ Tempo Contínuo – todas as equações "fundamentais" são definidas $\forall t$ (equações diferenciais) $\surd$

$\rightsquigarrow$ Tempo Discreto – se alguma equação "fundamental" é definida apenas em instantes discretos no tempo (equações a diferença) $\surd$

$\rightsquigarrow$ Memória $\times$ sem memória – no primeiro caso, a saída pode depender de entradas em instantes de tempo diversas $\surd$

$\rightsquigarrow$ Causalidade – saída depende de entradas em instantes passado ou corrente $\surd$

Tipificando Sistemas

▷ Vamos revisitar o conceito de estado

O estado $x(t_0)$ de um sistema no instante t_0 é a informação no instante t_0 que, conjuntamente com a entrada $u(t)$ com $t \geq t_0$, determina unicamente a saída $y(t)$, $\forall t \geq t_0$

$\therefore$ Usando o estado em t_0, pode-se exprimir a entrada e saída de um sistema no formato entrada (u), estado (x), saída (y), da forma:

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad y(t),\ t \geq t_0$$

Tipificando Sistemas

$\rightsquigarrow$ Neste contexto, pode-se descrever sistemas lineares usando o Princípio da Superposição:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t_0) + x_2(t_0) \\ u_1(t) + u_2(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad y_1(t) + y_2(t),\ t \geq t_0 \quad \text{(Aditividade)}$$

$$+$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x_1(t_0) \\ \alpha u_1(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad \alpha y_1(t),\ t \geq t_0 \quad \text{(Homogeneidade)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x_1(t_0) + \alpha_2 x_2(t_0) \\ \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t),\ t \geq t_0$$

Tipificando Sistemas

⇝ Invariância no Tempo – Considere a descrição entrada, estado, saída:

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad y(t),\ t \geq t_0$$

Se o estado inicial é deslocado para $t_0 + T$ e a mesma entrada $u(t)$ é aplicada a partir de $t_0 + T$ (ao invés de t_0), então a forma de onda da saída $y(t)$ será a mesma, porém respondendo apenas a partir de $t_0 + T$:

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0 + T) \\ u(t - T),\ \ t \geq t_0 + T \end{array}\right\} \longrightarrow \quad y(t - T),\ \ t \geq t_0 + T$$

- Consequência: pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $t_0 = 0$

Tipificando Sistemas

Exercício 2.3 – Chen, pg. 38 Considere um sistema cuja entrada u e saída y são relacionadas por um operador de truncamento da forma:

$$y(t) \quad = \quad (P_\alpha u)\,(t) \;\triangleq\; \begin{cases} u(t) & \text{para } t \leq \alpha \\ 0 & \text{para } t > \alpha \end{cases}$$

sendo α uma constante fixa

Questão: O sistema é linear? Causal? Invariante no tempo?

Por inspeção: Sim, Sim, Não...

Tipificando Sistemas

Exercício 2.4 – Chen, pg. 38 Considere um sistema relaxado (i.e., $x(t_0) = 0$), denotado por $y = Hu$. Mostre que se o sistema é causal, então aplicando o operador truncamento P_α tem-se:

$$P_\alpha y = P_\alpha H u = P_\alpha H P_\alpha u$$

$\rightsquigarrow$ Por hipótese, como o sistema é causal, então a saída y em α é:

$$y_{(-\infty,\alpha]} = H u_{(-\infty,\alpha]} = H P_\alpha u_{(-\infty,\infty)}$$

$$\therefore \quad P_\alpha y = P_\alpha H u = P_\alpha H P_\alpha u \quad \checkmark$$

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

$\leadsto$ Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LIT) podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes. Em geral, a ordem da equação está associada ao número de armazenadores de energia

Sistema Autônomo – 1^a ordem: $\dot{x} + \frac{1}{\tau}x = 0$, sendo τ a constante de tempo

Modo próprio: $x(t) = Ke^{\lambda t}$; EC: $\lambda + \frac{1}{\tau} = 0$, $\Rightarrow$ $x(t) = Ke^{-t/\tau}$

$\leadsto$ 2^a ordem: $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$ (ζ: amortecimento; ω_n: freq. natural)

Dois modos próprios: $x(t) = Ke^{\lambda t}$; EC: $\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $x(t) = K_1e^{\lambda_1 t} + K_2e^{\lambda_2 t}$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: $x(t) = K_1e^{\lambda t} + K_2te^{\lambda t}$

Sistemas Não Autônomos – Método dos Coeficientes a Determinar (ordem n):

$$x(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i p_i(t)}_{\text{resposta transitória}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{m} b_j f_j(t)}_{\text{resposta forçada}}$$

A solução é uma combinação linear dos n modos próprios $p_i(t)$ e das $m+1$ derivadas linearmente independentes $f_j(t)$ da entrada (por definição, $f_0(t) = f(t)$)

Os coeficientes b_j são calculados substituindo-se o termo “forçado” na equação, e os coeficientes c_i são determinados ajustando-se a solução às condições iniciais

Equações Diferenciais Ordinárias

Passos

1. Obtenha os modos próprios, raízes da equação característica
2. Substituir a componente forçada na equação para obter os seus coeficientes
3. A partir das condições iniciais, obter os demais coeficientes

Exemplo

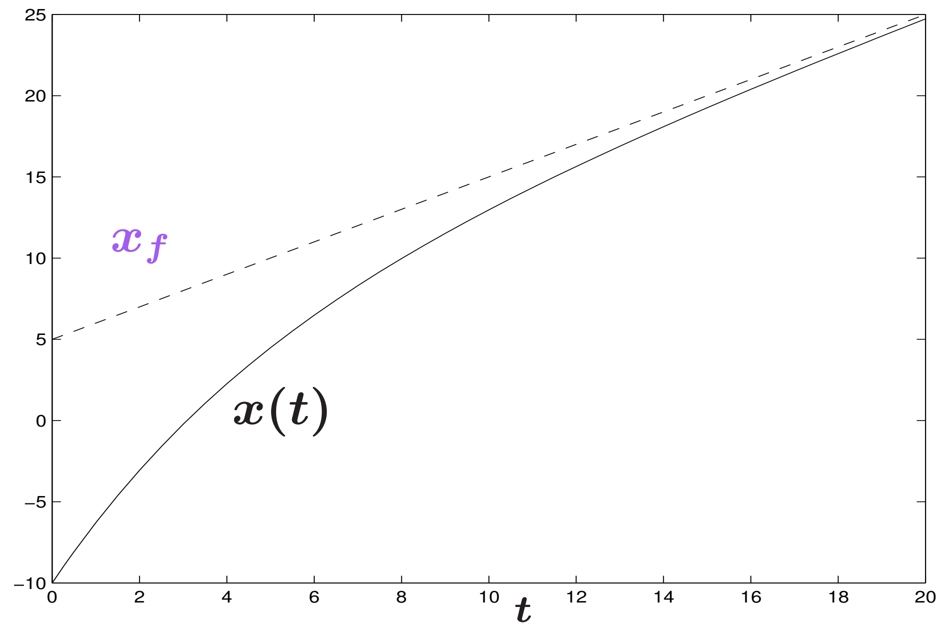
Solução para o sistema de 1ª ordem: $5\dot{x} + x = t + 10$, com $x(0) = -10$?

Passo 1: Modo próprio, $5\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -0.2$

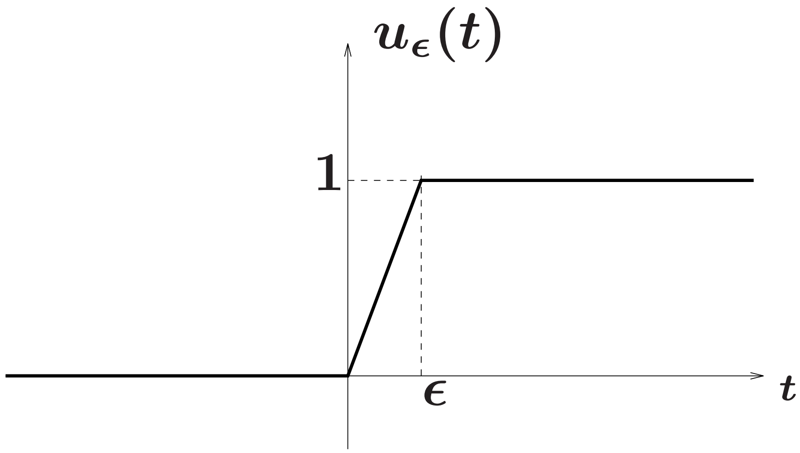
Passo 2: $x_f = k_1 t + k \;\Rightarrow\; k_1 t + k + 5k_1 = t + 10$; $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k = 5 \end{cases} \Rightarrow x_f = t + 5$

Passo 3: $x(t) = k_0 e^{-0.2\,t} + t + 5$; p/ $x(0) = -10 \;\Rightarrow\; k_0 = -15$

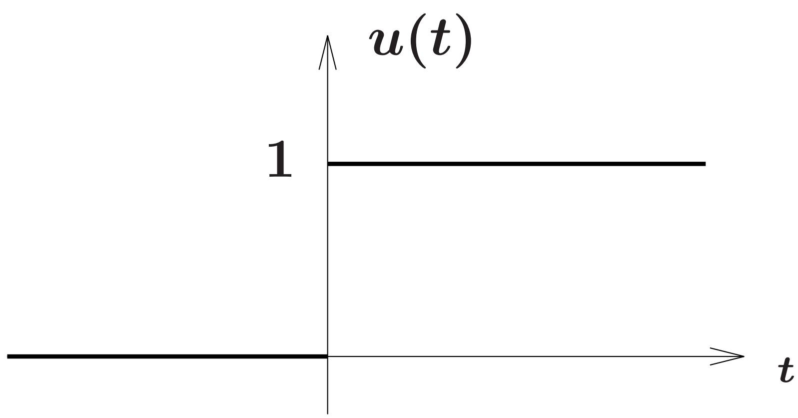
$$\boxed{x(t) = -15\, e^{-0.2\,t} + t + 5}$$



Generalidades – Degrau Unitário $u(t)$

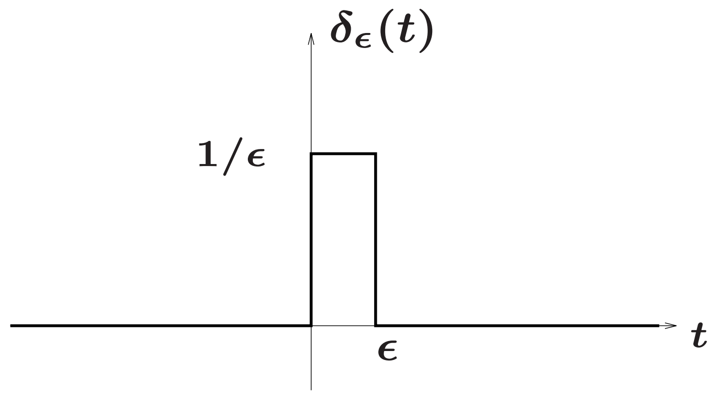


$$u_\epsilon(t) \triangleq \begin{cases} 0 & , \; t < 0 \\ (1/\epsilon)t & , \; 0 < t < \epsilon \\ 1 & , \; t > \epsilon \end{cases}$$

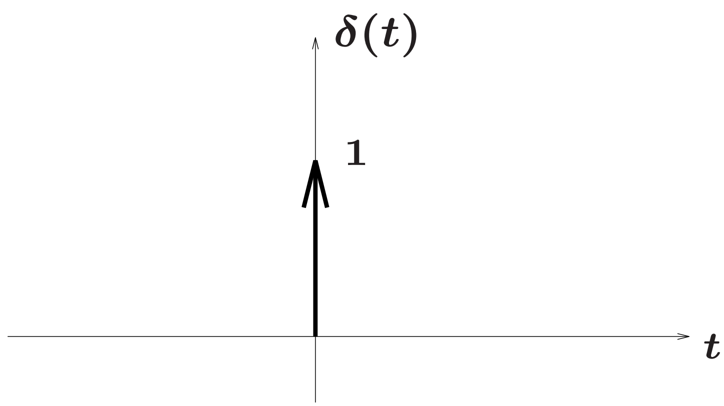


$$u(t) \triangleq \lim_{\epsilon \to 0^+} u_\epsilon(t)$$

Generalidades – Impulso Unitário $\delta(t)$



$$\delta_\epsilon(t) \triangleq \tfrac{d}{dt} u_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1/\epsilon & , 0 < t < \epsilon \\ 0 & , t > \epsilon \end{cases}$$



$$\delta(t) \triangleq \lim_{\epsilon \to 0^+} \delta_\epsilon(t) \;; \quad \delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

▷ $\delta(t)$ – distribuição no espaço de Sobolev

$\delta(t)$ e seu caráter amostrador

⇝ Propriedade: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt \;=\; f(0)$, $\forall\, f(t)$ contínua em $t = 0$

Demonstração: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_\epsilon(t)dt = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_0^\epsilon \frac{1}{\epsilon} f(t)dt$

Usando o Teorema do Valor Médio: $\int_a^b f(t)dt = f(y)(b-a)$, $y \in (a,b)$

$$\therefore \lim_{\epsilon \to 0+} \int_0^\epsilon \frac{1}{\epsilon} f(t)dt = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{\epsilon} f(y)(\epsilon - 0)\,,\, y \in (0,\epsilon) \Rightarrow \lim_{\substack{\epsilon \to 0^+ \\ y \in (0,\epsilon)}} f(y) = f(0)$$

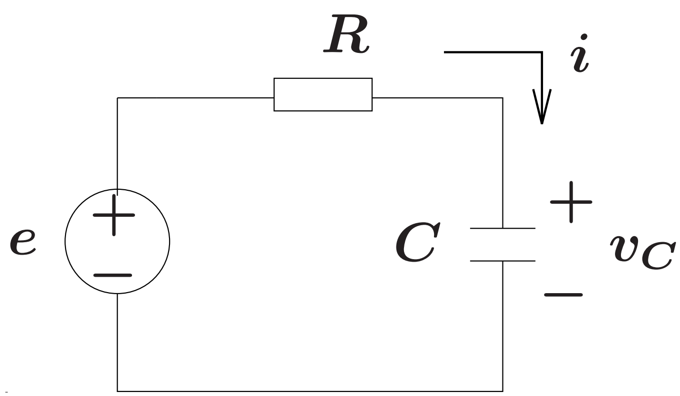
$\delta(t)$ e seu caráter amostrador

$\rightsquigarrow$ Estendendo: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt \;=\; f(a)$

Corolário: para $f(t) = 1$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt \;=\; 1 \Rightarrow$ Área Unitária

$\rightsquigarrow$ Propriedade: $\delta(t)$ é uma função par, i.e., $\delta(-t) = \delta$

Resposta a Entrada em Degrau ...



$$\Rightarrow \quad e(t) = Eu(t) = \begin{cases} E & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

⇝ Como a função degrau é nula em $(-\infty, 0)$ e o circuito é dissipativo, então a tensão no capacitor em $t = 0$ é nula

⇝ A resposta à entrada em degrau pode ser estudada a partir da resposta a uma entrada constante E com condições iniciais nulas

Resposta a Entrada em Degrau ...

Kirchhoff: $\dfrac{e(t) - v_C(t)}{R} = C\dot{v}_C(t) \Rightarrow \underbrace{RC}_{\tau}\dot{v}_C + v_C(t) = e(t) \;\; (e(t) = E)$

Modo próprio: $\lambda = -\frac{1}{\tau}$. Solução forçada: $v_{C_f}(t) = kE, \, t > 0$

$$\Downarrow$$

$$\tau\dot{v}_{C_f} + v_{C_f} = e \Rightarrow kE = E \Rightarrow k = 1 \;\; \therefore \;\; v_C(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

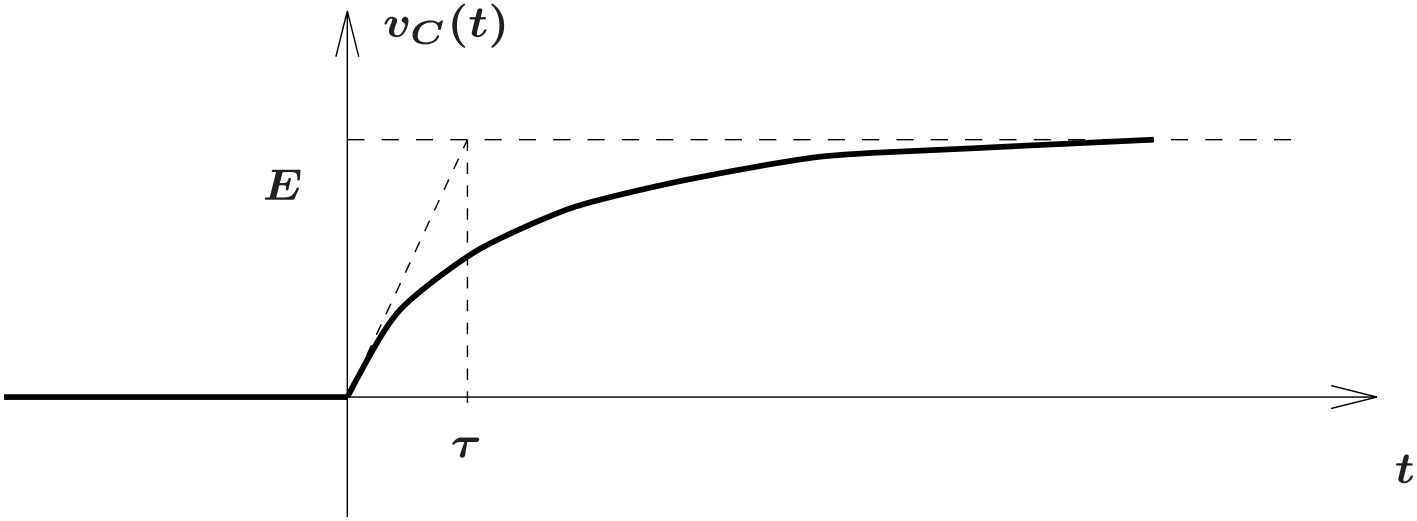
$$\Downarrow$$

como $v_C(0) = 0$, então $K = -E$, portanto:

$$\begin{cases} v_C(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}} + E \; = E\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] & , t > 0 \\ v_C(t) = 0 & , t < 0 \end{cases}$$

Resposta a Entrada em Degrau ...

$$v_C(t) = E\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] u(t)$$



Manipulando mais um pouco...

Veja que: $$\frac{dv_C}{dt} = \frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) + E\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]\delta(t)$$

Como o impulso tem um caráter amostrador, interessa o valor da função que o multiplica em $t = 0$, tal que: $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

Portanto note que em $t = 0$, $E\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] = 0 \Rightarrow \quad \frac{dv_C}{dt} = \frac{E}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$

Particularmente em $t = 0^+$, $\quad \frac{dv_C}{dt}(0^+) = \frac{E}{\tau}$

Resposta ao Impulso?

Por definição, a resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema LIT causal é a saída quando a entrada é um impulso unitário $\delta(t)$ com condições iniciais nulas. Lembrando que: $\delta(t) \triangleq \frac{d}{dt}u(t)$, pode-se escrever $h(t)$ a partir da derivada da resposta do sistema ao degrau:

$$h(t) = \frac{d}{dt}\, y_{\text{resposta ao degrau}}$$

Então, considerando o exemplo do circuito: $h(t) = \frac{d}{dt}\left\{\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] u(t)\right\}$

$$\therefore\ h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) + \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]\delta(t),\ \text{em}\ \ t = 0,\ \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] = 0$$

$$h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$$

Transformada de Laplace

⇝ Considere $f(t)$ contínua e nula para $t < 0$

$$F(s) \triangleq \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt; \quad s \triangleq \sigma + j\omega$$

⇝ Simbologia: $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0); \quad \mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

⇝ Aplica-se na solução de equações integro-diferenciais com coeficientes constantes:

- Torna algébricas as equações diferenciais
- Simplifica o cálculo da resposta impulsiva

Tabela de Transformadas de Laplace

Função no Tempo	Transformada
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

Expansão em Frações Parciais. Por quê ?

$\rightsquigarrow$ Considere uma função racional em s descrita por $N(s)/D(s)$

Caso 1) $D(s)$ não tem raízes repetidas

$$\frac{s+1}{s^3+s^2-6s} = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s-2} + \frac{k_3}{s+3}$$

$$k_1 = s\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s\,=\,0} = -\frac{1}{6}$$

$$k_2 = (s-2)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s\,=\,2} = \frac{3}{10}$$

$$k_3 = (s+3)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s\,=\,-3} = -\frac{2}{15}$$

Caso 2) $D(s)$ com raízes repetidas

$$\frac{s^2+2s+16}{[(s+2)^2+4]\,s(s+2)} = \frac{k_1 s + k_2}{(s+2)^2+4} + \frac{k_3}{s} + \frac{k_4}{(s+2)}$$

$$k_3 = s\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=0} = \frac{16}{2(8)} = 1$$

$$k_4 = (s+2)\,\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=-2} = \frac{(-2)^2-(2)(2)+16}{(-2)(4)} = -2$$

Reescrevendo o fator inicial do lado direito sob um denominador comum e equacionando o numerador:

$$s^2+2s+16 = (k_1 s+k_2)s(s+2)+k_3\left[(s+2)^2+4\right](s+2)+k_4\left[(s+2)^2+4\right]s$$

Igualando as potências:

$$\begin{cases} s^3-2s^3+k_1 s^3 & = & 0 \\ 6s^2-8s^2+(k_2+2k_1)s^2 & = & s^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

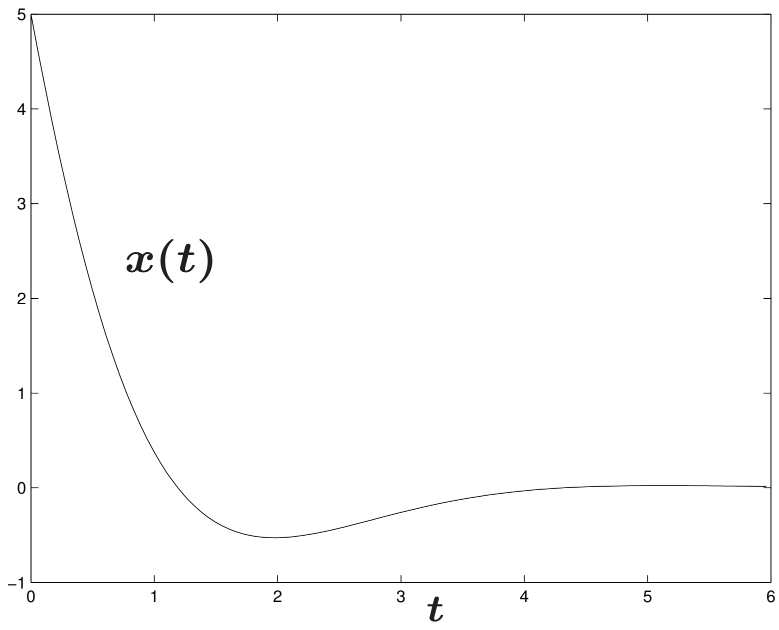
Exemplo

Para: $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$; $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = -2$

$$(s^2+2s+2)X(s) = (s+2)x(0)+\dot{x}(0) \Rightarrow X(s) = \frac{5(s+2)}{s^2+2s+2} + \frac{-2}{s^2+2s+2}$$

Frações Parciais: $X(s) = \dfrac{2.5-j2.5}{s+1-j} + \dfrac{2.5+j2.5}{s+1+j} + \dfrac{j}{s+1-j} + \dfrac{-j}{s+1+j}$

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] \rightarrowtail x(t) = (2.5-j1.5)e^{(-1+j)t} + (2.5+j1.5)e^{(-1-j)t}$$

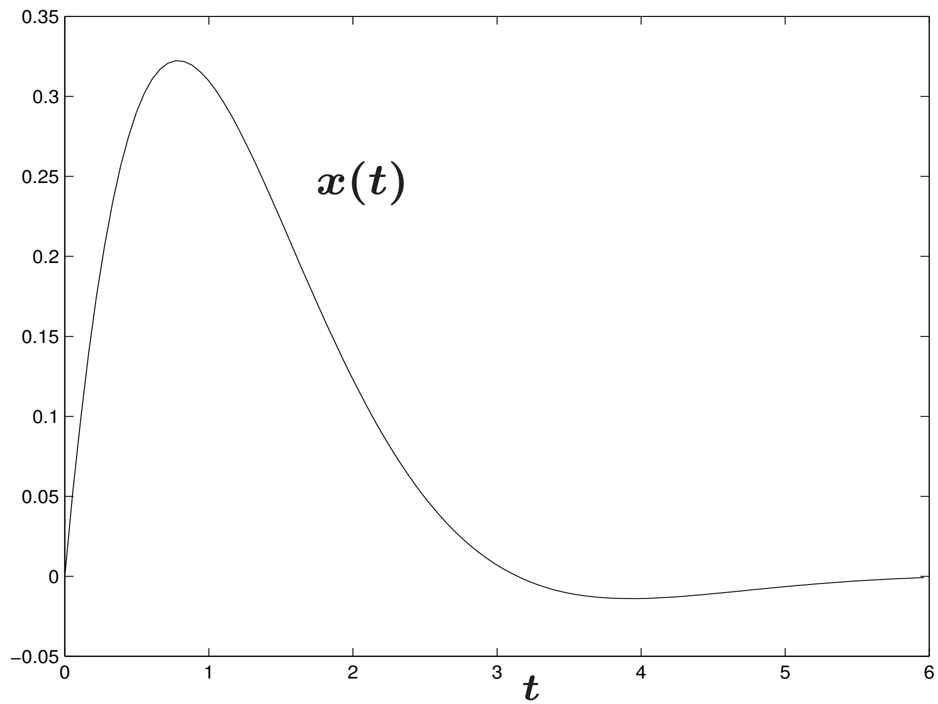


Exemplo – Resposta ao Impulso

Para: $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \delta(t)$; $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$(s^2 + 2s + 2)X(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{-j0.5}{s + 1 - j} + \frac{j0.5}{s + 1 + j}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] \quad \rightarrowtail \quad x(t) = -j0.5e^{(-1+j)t} + j0.5e^{(-1-j)t}$$



Equações a Diferenças

$\rightsquigarrow$ 1^a ordem $\quad x(k+1) = ax(k), \quad x(0) = 1$

modo próprio: $x(k) = c\lambda^k \quad \Rightarrow \quad c\lambda^{k+1} = ca\lambda^k \quad \Rightarrow \quad \lambda = a$

como $\quad x(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cancel{x(0)}^{\,1} = c\lambda^0$ ou $c = 1 \quad \therefore \quad x(k) = a^k$

Transformada $\mathcal{Z}$ $\quad \mathcal{Z}[y(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k}$

- pulso $\delta(k-m) = \begin{cases} 1 & \text{se } \; k = m \\ 0 & \text{se } \; k \neq m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}\left[\delta(k-m)\right] = z^{-m}$

Exemplo 2.16 - Chen, pg. 36

Considere uma conta de investimentos. Se a taxa de retorno depende do montande do dinheiro na conta, tem-se um sistema não linear. Se a taxa de retorno é a mesma independentemente do montante de dinheiro na conta, então o sistema é linear. A conta é um sistema variante no tempo se a taxa de retorno muda com o tempo, ou um sistema invariante no tempo se a taxa de retorno é fixa. Considere o caso linear e invariante no tempo com taxa de retorno $r = 0{,}015\%$ ao dia e reajustado diariamente. A entrada $u(k)$ é a quantidade de dinheiro depositada na conta no k-ésimo dia e a saída $y(k)$ é o volume total de dinheiro na conta ao final do k-ésimo dia. Se alguma parte do montante é sacado, então $u(k)$ é negativo.

Se um cliente deposita R\$ $1{,}00$ no primeiro dia (isto é, $u(0) = 1$) e nada mais depois ($u(k) = 0$, $k = 1{,}2{,}3, \ldots$), então $y(0) = u(0) = 1$ e:

$$y(1) = 1 + 0{,}00015 = 1{,}00015$$

Exemplo 2.16 - Chen, pg. 36

Como o dinheiro é reajustado diariamente, obtém-se

$$y(2) \;=\; y(1) + y(1) \times 0{,}00015 \;=\; 1{,}00015 \times y(1) = (1{,}00015)^2 \;\ldots$$

$$y(k) \;=\; (1{,}00015)^k$$

Como a entrada $(1{,}0{,}0,\ldots)$ é de fato uma sequência pulso, a saída é, por definição, a sequência da resposta ao pulso ou

$$g(k) = (1{,}00015)^k$$

E a descrição entrada-saída da conta é descrita por:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{k} g(k-m)u(m) = \sum_{m=0}^{k} (1{,}00015)^{k-m}u(m)$$

Exemplo 2.16 - Chen, pg. 36

1. Qual é a funcão de transferência considerando que o estado inicial é nulo ou, simplesmente, não existe dinheiro na conta no momento inicial da aplicacão?

$$\mathcal{Z}\left[g(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} (1{,}00015)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (1{,}00015 z^{-1})^k$$

$$= \frac{1}{1 - 1{,}00015 z^{-1}} = \frac{z}{z - 1{,}00015}$$

2. Equação em espaço de estados a tempo discreto?

   Suponha que $y(k)$ é o volume total de dinheiro ao final do k-ésimo dia tal que:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= y(k) + 0{,}00015\, y(k) + u(k+1) \\ &= 1{,}00015\, y(k) + u(k+1) \end{aligned} \tag{1}$$

   Defina o estado: $x(k) = y(k) - u(k)$, então $y(k+1) = x(k+1) + u(k+1)$:

$$\begin{cases} x(k+1) = 1{,}00015 x(k) + 1{,}00015 u(k) \\ y(k) = x(k) + u(k) \end{cases}$$

MATLAB

⇝ `tf` – descrição para FT ou conversão de um modelo LIT para FT

Como? `sys = tf(num,den)` (em "s") `sys = tf(num,den,Ts)` (em "z")

Se: `sys = ss(A,B,C,D)`, então a `FT=tf(sys)`

Ainda: `tfdata` – extrai o numerador e denominador da FT

⇝ `ss` – descrição para um modelo em espaço de estados ou conversão de um modelo LIT para espaço de estados

Como? `sys = ss(A,B,C,D)` (contínuo) `sys = ss(A,B,C,D,Ts)` (discreto)

Conversão de TF para espaço de estados: `sys= ss(tf(num,den))`

Ainda: `ssdata` – extrai as matrizes A, B, C e D do modelo de espaço de estados