

Descrição de Incertezas e Estabilidade Robusta

1. Estabilidade robusta ?
 - 1.1. Função de transferência nominal e critério de estabilidade robusta
2. Caracterizando modelos de incertezas não-estruturadas
 - 2.1. Incerteza multiplicativa
 - 2.2. Incerteza aditiva
3. Caracterização do critério de estabilidade robusta em termos da função sensibilidade
 - 3.1 Teorema do ganho pequeno

Estabilidade Robusta

Estabilidade Robusta O que motiva esta “nova” caracterização de estabilidade?

1. Primeiramente, os modelos utilizados para projeto são quase sempre aproximações de sistemas reais. Normalmente no projeto clássico omite-se as “*incertezas*” associadas a variações de parâmetros (causados, por exemplo, por alterações devido a temperatura, envelhecimento, linearização em torno de pontos de operação) ou ainda dinâmicas não modeladas
2. Tradicionalmente utiliza-se para o projeto uma **função de transferência nominal** que represente um modelo “*central*”, denotado por G_0 . Este procedimento é o adotado no projeto clássico onde assume-se que o processo a ser controlado é descrito por um único modelo matemático
3. Veja, no entanto, que enquanto o projeto do controlador é realizado apenas para a função de transferência nominal, o **sistema real** deve ser estável para toda uma classe de funções de transferência que representam todo o conjunto de **incertezas**

Estabilidade Robusta – Incertezas Não-Estruturada

Uma forma realística de **representar** incertezas na planta é descrever a função de transferência contendo um fator de incerteza. Como exemplo, pode-se considerar a forma abaixo denominada **incerteza multiplicativa**:

$$G(j\omega) = G_0(j\omega) \times \left(1 + \widetilde{W}_2(\omega)\Delta(j\omega) \right)$$

↪ $G_0(j\omega)$ denota a função de transferência da planta nominal

↪ \widetilde{W}_2 é uma função magnitude que **quantifica as variações** na planta em frequência e é limitada superiormente da forma: $|\widetilde{W}_2| \leq |W_2|$

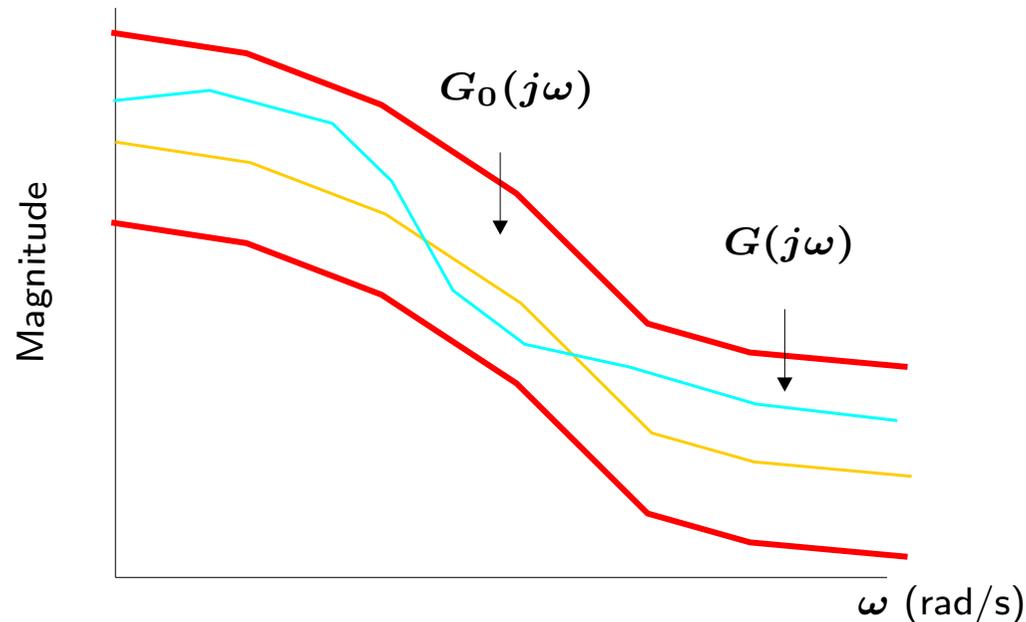
Geralmente o valor do limitante W_2 é pequeno para baixas frequências, aumentando progressivamente para altas frequências

↪ A função $\Delta(j\omega)$ representa a incerteza em fase e é restrita apenas a condição

$$|\Delta(j\omega)| \leq 1$$

Estabilidade Robusta

Uma representação gráfica do fator de incerteza multiplicativo é ilustrado abaixo



Sob a ótica do ferramental **disponível até o momento**, o critério de estabilidade robusta pode ser apresentado da seguinte forma:

“O **critério de estabilidade robusta** preceitua que projete-se um controlador para a planta nominal, G_0 , que resulte em um sistema estável para qualquer descrição de fator de incerteza como, por exemplo, a incerteza multiplicativa”

Incertezas Não-Estruturada

Antes de caracterizar o requisito de estabilidade robusta, torna-se necessário “ilustrar” como pode-se obter descrições de incerteza.

Exemplo Considere o modelo nominal

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2}$$

que representa um dispositivo de leitura e gravação com memória magnética modelado em baixas frequências. No entanto, o braço que sustenta o cabeçote de gravação e leitura possui um pouco de amortecimento com frequência ressonante **“incerta”**.

Suponha que a fim de incluir informações sobre estas variações, o modelo possa ser melhor representado por um sistema com frequência ressonante em ω_0 e amortecimento B da forma:

$$G(s) = \frac{K}{s^2} \times \frac{B\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + B\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Incerteza Não-Estruturada

Esta função é uma aproximação para um sistema de 2a. ordem que inclui o modelo inicial em baixas frequências e informações sobre a frequência ressonante e amortecimento. Veja que para variações de ω_0 e B obtém-se uma família de modelos

Evidenciando-se ω_0 , obtém-se o modelo da forma:

$$G(s) = \frac{K}{s^2} \times \frac{(Bs)/\omega_0 + 1}{(s/\omega_0)^2 + (Bs)/\omega_0 + 1}$$

- Como pode-se descrever a função do modelo de incerteza \widetilde{W}_2 para este caso?

Incerteza Não-Estruturada

Solução

A função de transferência do modelo pode ser reescrita da forma a seguir, somando-se e subtraindo-se o termo $(s/\omega_0)^2$ ao numerador da equação:

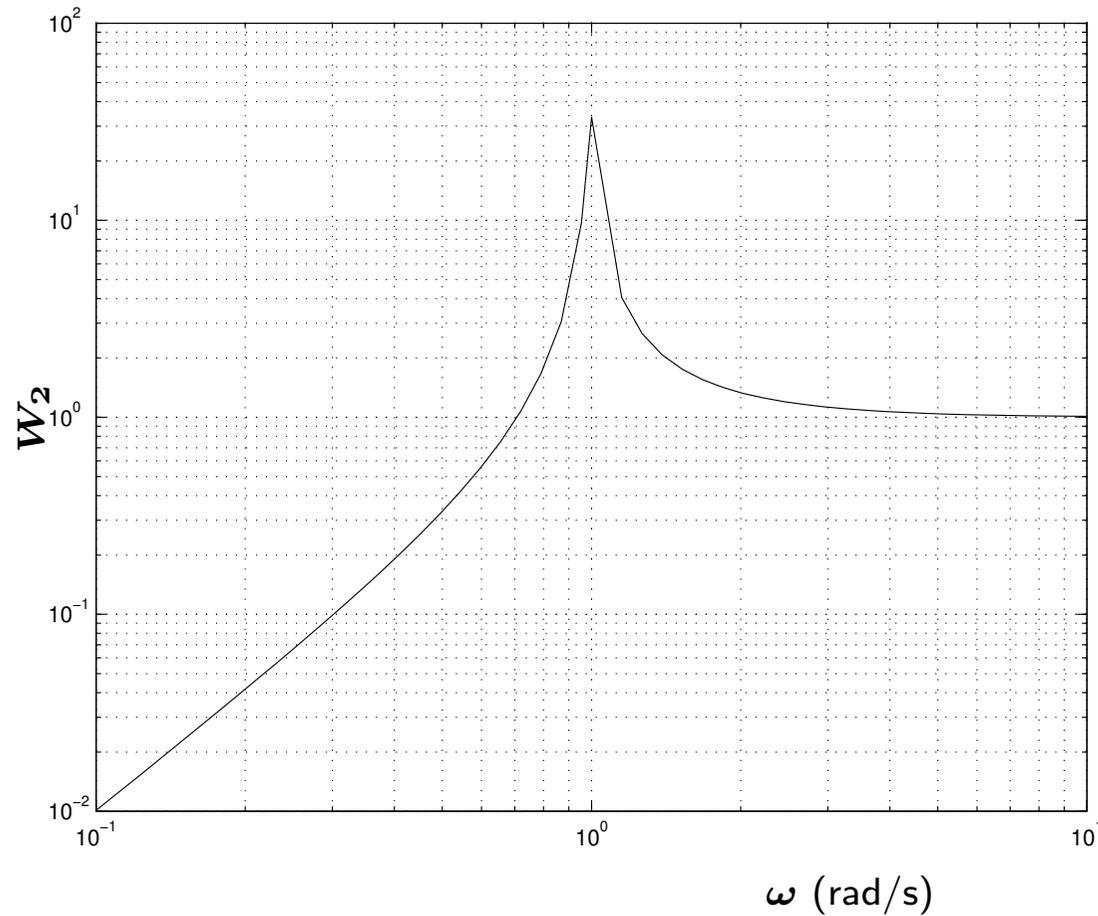
$$G(s) = \frac{K}{s^2} \left[1 + \frac{-(s/\omega_0)^2}{(s/\omega_0)^2 + B(s/\omega_0) + 1} \right]$$

Note que a equação acima está no formato descrito para incertezas multiplicativas, isto é $G(j\omega) = G_0(j\omega)(1 + \widetilde{W}_2(\omega)\Delta(j\omega))$, sendo o modelo nominal descrito por $G_0(s) = K/s^2$,

$$\widetilde{W}_2(\omega) = \left| \frac{-(s/\omega_0)^2}{(s/\omega_0)^2 + (Bs)/\omega_0 + 1} \right|_{s=j\omega} \quad \text{e} \quad |\Delta(j\omega)| \leq 1$$

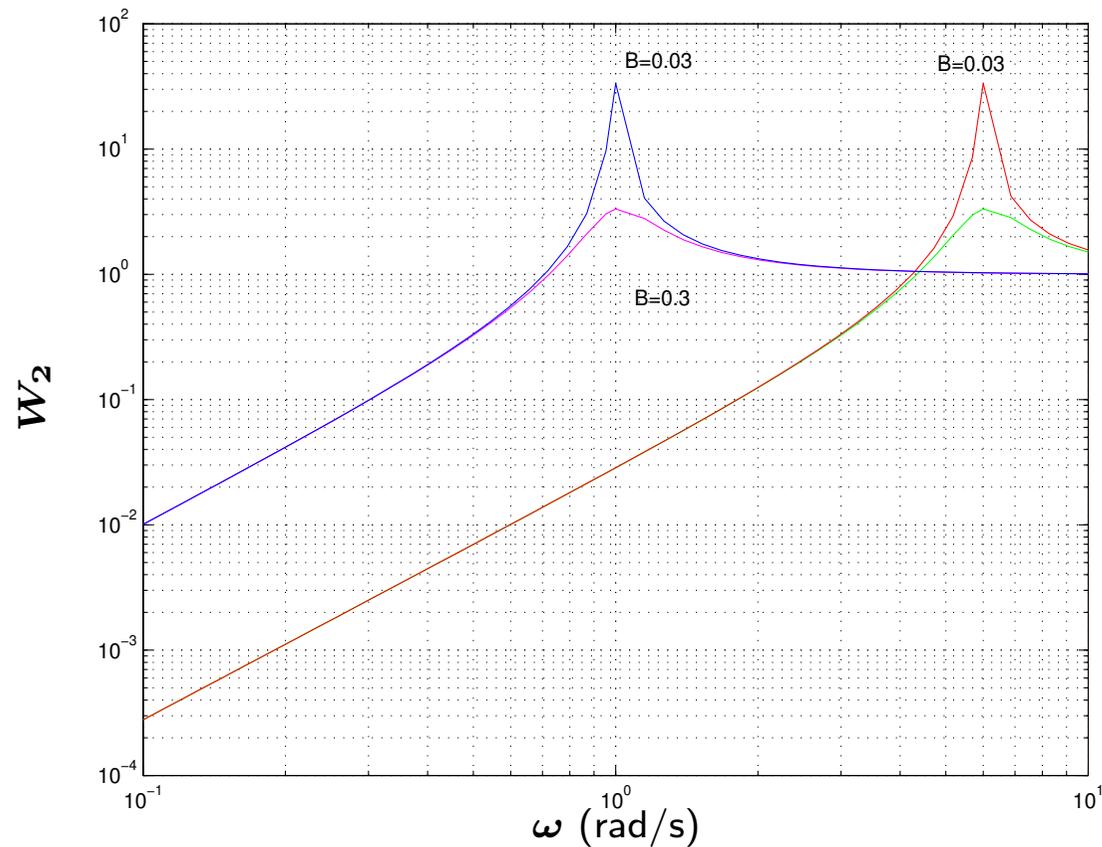
Incerteza Não-Estruturada

Um esboço para a função \widetilde{W}_2 para valores, por exemplo, de $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ e $B = 0.03$ é apresentado a seguir



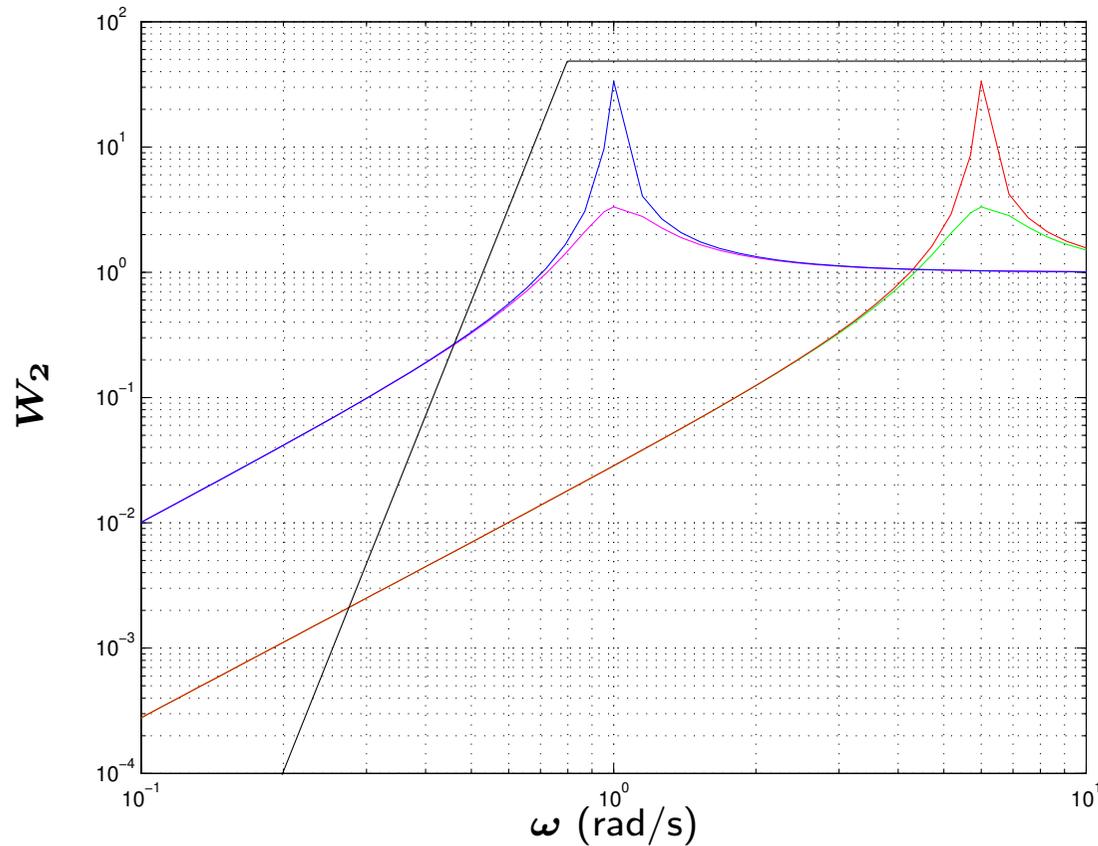
Incerteza Não-Estruturada

Um esboço para uma família de \widetilde{W}_2 com $\omega_0 = 1$, $\omega_0 = 6$, $B = 0.03$ e $B = 0.3$



Incerteza Não-Estruturada

Para este exemplo, um limitante superior W_2 para \widetilde{W}_2 pode ser descrito por um filtro passa-altas da forma abaixo:



Incerteza Não-Estruturada

Exemplo Considere a família de funções de transferência para uma planta com amortecimento desconhecido, porém limitado,

$$G_{\xi}(s) = \frac{1}{s^2 + \xi s + 1}, \quad 0.4 \leq \xi \leq 0.8$$

Obtém-se uma descrição completa para a variação de ξ em torno de 0.6, ie

$$\xi = 0.6 + 0.2\Delta, \quad -1 \leq \Delta \leq 1$$

Substituindo a descrição acima na família de funções de transferência obtém-se

$$G_{\xi}(s) = \frac{1}{s^2 + (0.6 + 0.2\Delta)s + 1}$$

e evidenciando o termo $(s^2 + 0.6s + 1)$ obtém-se

$$G_{\xi}(s) = \left(\frac{1}{s^2 + 0.6s + 1} \right) / \left(1 + \frac{0.2s\Delta}{s^2 + 0.6s + 1} \right)$$

Incerteza Não-Estruturada

∴ definindo-se a função de transferência da planta nominal para o valor $\xi = 0.6$

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1}$$

sendo a descrição para a incerteza:

$$|\widetilde{W}_2| = |0.2s| \quad \text{e} \quad -1 \leq \Delta \leq 1$$

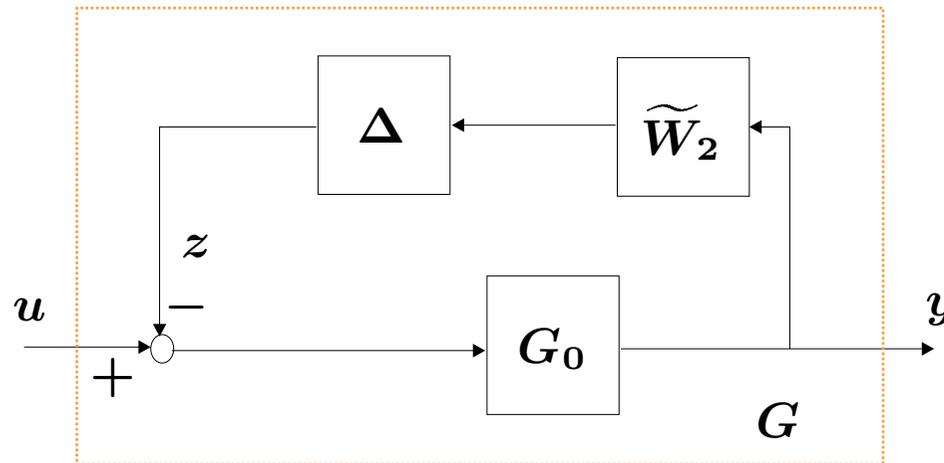
Desta forma a família de funções de transferência pode ser denotada por:

$$G_\xi(s) = \frac{G_0}{1 + \widetilde{W}_2 \Delta G_0} = G_0 \left(1 + \widetilde{W}_2 \Delta G_0\right)^{-1}$$

estando no formato do tipo [incerteza aditiva inversa](#)

Incerteza Não-Estruturada

O diagrama de blocos para esta forma de incerteza (que é uma variação da incerteza multiplicativa) é apresentado abaixo

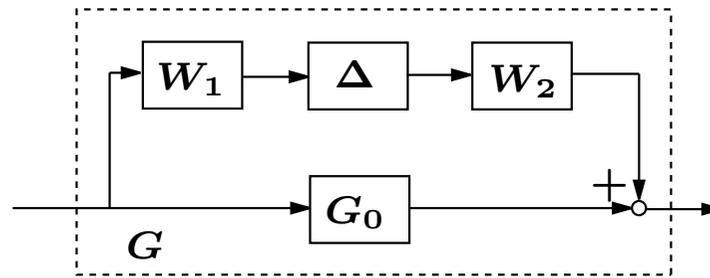


Veja que do diagrama acima

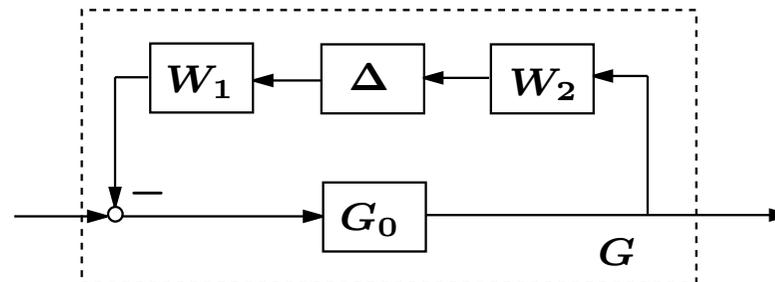
$$y = G_0 (u - z) = G_0 (u - \Delta \widetilde{W}_2 y) \Rightarrow G = \frac{G_0}{1 + G_0 \widetilde{W}_2 \Delta}$$

Incertezas Não-Estruturadas: diagrama de blocos

- Pode-se obter também outras variações de descrição de incerteza para uma forma genérica com duas funções de ponderação \tilde{W}_1 e \tilde{W}_2

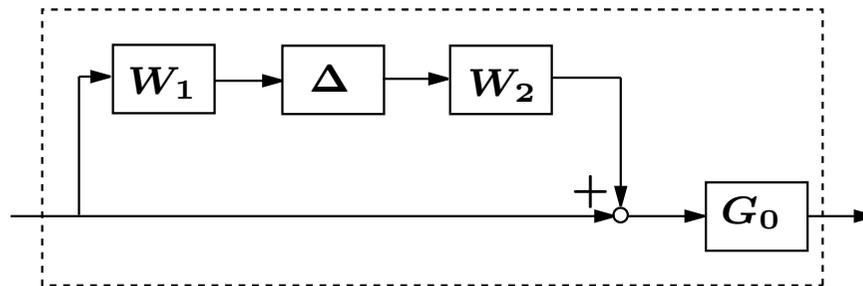


Incerteza aditiva: $G_0 + W_1 \Delta W_2$

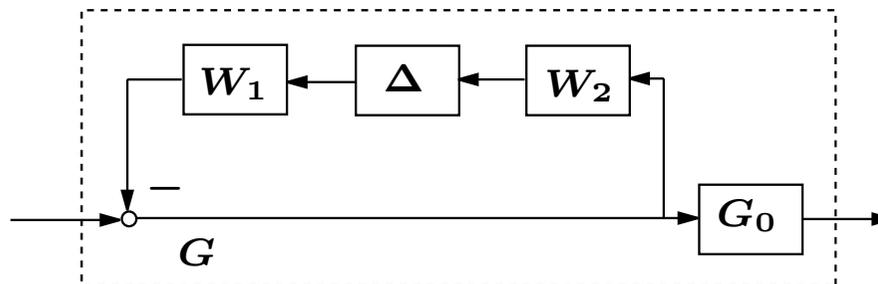


Incerteza aditiva inversa: $G_0(I + W_1 \Delta W_2 G_0)^{-1}$

Incertezas Não-Estruturadas: diagrama de blocos

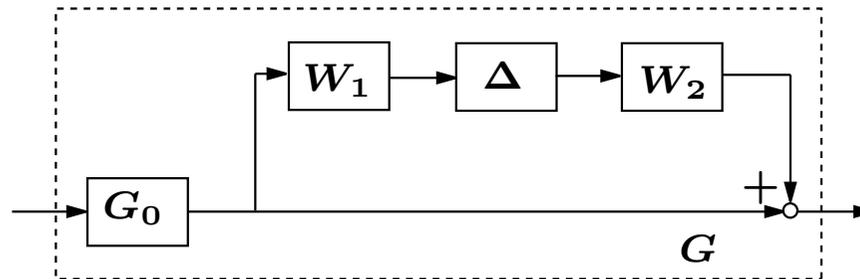


Incerteza multiplicativa na entrada: $G_0(I + W_1\Delta W_2)$

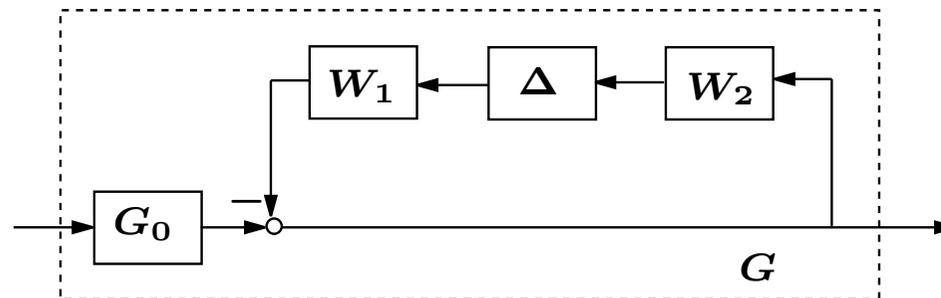


Incerteza multiplicativa inversa na entrada: $G_0(I + W_1\Delta W_2)^{-1}$

Incertezas Não-Estruturadas: diagrama de blocos



Incerteza multiplicativa na saída: $(I + W_1 \Delta W_2)G_0$



Incerteza multiplicativa inversa na saída: $(I + W_1 \Delta W_2)^{-1}G_0$

Incertezas Não-Estruturadas: diagrama de blocos

Conjunto de Modelos	Tipos de Incertezas Caracterizadas
$(I + W_1 \Delta W_2) G_0$	<p>Erros de saída – sensor</p> <p>Dinâmicas em altas freqüências não-modeladas: atraso de transporte, ressonâncias eletro-mecânicas...</p> <p>Zeros no semiplano direito “incertos”</p>
$G_0(I + W_1 \Delta W_2)$	<p>Erros de entrada – atuador</p> <p>Dinâmicas em altas freqüências negligenciadas</p> <p>Zeros no semiplano direito “incertos”</p>
$(I + W_1 \Delta W_2)^{-1} G_0$	<p>Erros em baixa freqüências: variações de parâmetros com condições de operação, idade...</p>
$G_0(I + W_1 \Delta W_2)^{-1}$	<p>Erros em baixa freqüências</p>
$G_0 + W_1 \Delta W_2$	<p>Erros aditivos na planta</p> <p>Dinâmicas em altas freqüências não-modeladas</p>

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

O problema? como determinar um controlador que assegure especificações de desempenho em malha fechada sem um modelo preciso para o processo

O que se espera? o controlador deve operar de forma “satisfatória” para toda uma família de modelos

Representação do modelo do erro? G_0 é a planta nominal e o modelo do erro é, por exemplo, $G_0 + \delta$, sendo δ a representação da dinâmica desconhecida...

Problema de estabilização robusta? Para G_0 dado. Determine um controlador estabilizante D para toda a família de modelos $G_0 + \delta$, para o qual $|\delta|$ é maximizado...

- D que maximiza $|\delta|$ é **robusto e ótimo** no sentido que estabiliza a maior **bola** de modelos com centro em G_0 !

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

↪ Assuma que algum projeto para o controlador D tendo como referência a planta nominal, G_0 , esteja pronto e o sistema em malha fechada seja **estável**

- Portanto a curva de Nyquist de DG_0 **não cruza** o ponto -1 ! Neste caso a equação característica

$$1 + D(j\omega)G_0(j\omega) = 0$$

nunca será satisfeita para qualquer valor de frequência, ω !!

- Por outro lado, para a planta incerta descrita por

$$G = G_0(1 + \widetilde{W}_2\Delta)$$

ser robustamente estável, a equação característica, $1 + DG = 0$, **não deve se anular** para qualquer frequência, ω , e quaisquer valores de \widetilde{W}_2 e Δ

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

Levando em conta a discussão anterior, pode-se obter o requisito para satisfazer o critério de estabilidade robusta considerando que:

$$1 + D(j\omega)G(j\omega) \neq 0, \quad \forall \omega$$

$$1 + D \left[G_0 \left(1 + \widetilde{W}_2 \Delta \right) \right] \neq 0$$

Colocando o termo $1 + DG_0$ em evidência

$$(1 + DG_0) \left(1 + \frac{DG_0}{1 + DG_0} \widetilde{W}_2 \Delta \right) \neq 0$$

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

Defini-se \mathcal{T} como sendo a **função de sensibilidade complementar**:

$$\mathcal{T}(j\omega) \triangleq \frac{D(j\omega)G_0(j\omega)}{1 + D(j\omega)G_0(j\omega)} = 1 - \mathcal{S}(j\omega)$$

Logo

$$(1 + DG_0) \left(1 + \mathcal{T}\widetilde{W}_2\Delta\right) \neq 0$$

- Como o **sistema nominal é estável**, então necessariamente $(1 + DG_0) \neq 0$ para qualquer frequência, ω , e quaisquer \widetilde{W}_2 e Δ . Então da última equação conclui-se

$$\left|\mathcal{T}\widetilde{W}_2\Delta\right| < 1$$

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

Desta forma

$$|\mathcal{T}| |\widetilde{W}_2| |\Delta| < 1$$

como $|\Delta| \leq 1$ e considerando o limitante superior, $|\widetilde{W}_2| \leq |W_2|$ obtém-se

Estabilidade Robusta



$$|\mathcal{T}| |W_2| < 1, \quad \text{ou} \quad |\mathcal{T}| < |W_2|^{-1}, \quad \text{ou} \quad |W_2| < |\mathcal{T}|^{-1}, \quad \forall \omega$$

Nota Outro tipo de descrição de incerteza, gera outro critério de estabilidade robusta...

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

Nota Pode-se obter uma representação gráfica para o critério de estabilidade robusta no diagrama de Nyquist. O ganho de malha é dado por

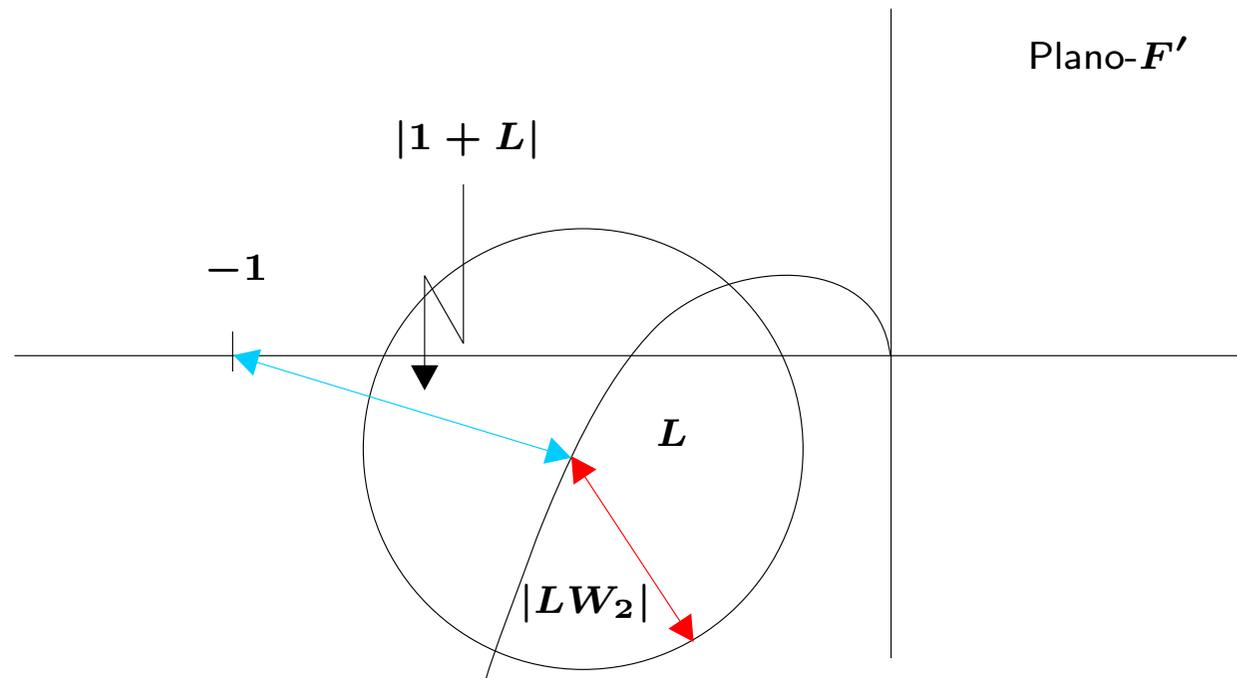
$$L_p \triangleq DG = DG_0 \left(1 + \widetilde{W}_2 \Delta \right)$$

com $|\widetilde{W}_2| \leq |W_2|$, e $L = DG_0$ obtém-se $L_p = L + LW_2$. Portanto a estabilidade robusta é verificada se e somente se o sistema é estável

$$\forall L_p \Rightarrow L_p \text{ não envolve o ponto } -1$$

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

Como a distância do ponto -1 ao centro do disco representando L_p é dado por $|1 + L|$, então de $L_p = L + LW_2$, obtém-se um disco centrado em L e raio $|LW_2|$, como ilustrado abaixo

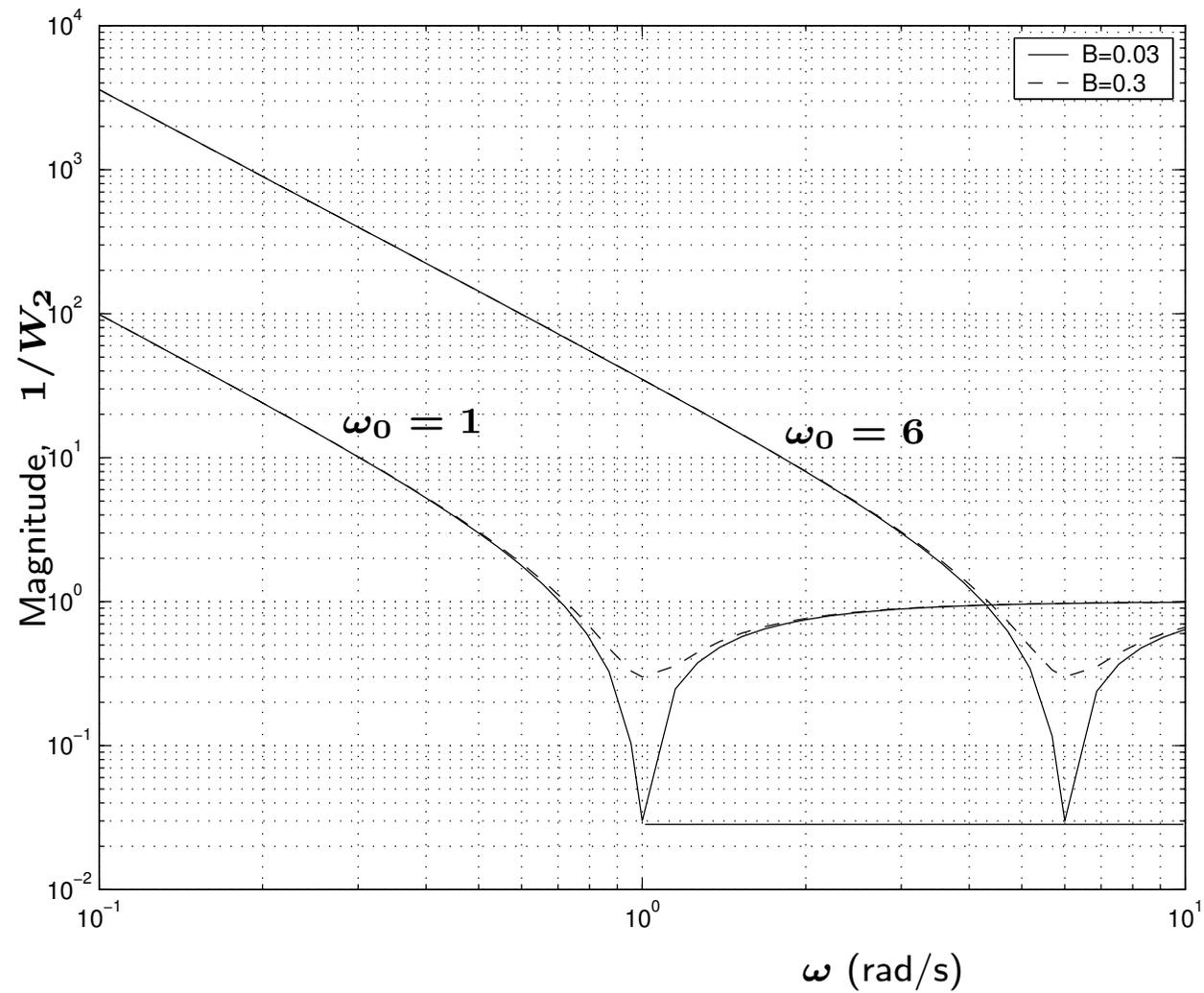


Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

Exemplo Considere o mesmo dispositivo de leitura e gravação com memória magnética apresentado anteriormente. Suponha que o parâmetro B esteja limitado ao intervalo de variação $0.03 \leq B \leq 0.3$ e a frequência ressonante $\omega_0 \geq 1$ rad/s. Esboçe o limitante $1/W_2$

Solução Basta utilizar a instrução ‘bode’ e plotar $1/\widetilde{W}_2$ para $B = 0.03$ e $B = 0.3$ com $\omega_0 \geq 1$ como , por exemplo, $\omega_0 = 1$ e $\omega_0 = 6$ (rad/s). A curva delimitada pela linha horizontal combinada com a curva para $B = 0.03$ e $\omega_0 = 1$ representa a fronteira da região procurada

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta



Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

Exemplo Considere um processo com modelo nominal

$$G_0(s) = \frac{170000(s + 0.1)}{s(s + 3)(s^2 + 10s + 10000)}$$

com pólos em $\{0; -3; -5 \pm j99.8749\}$. Deseja-se considerar o efeito de um pólo não modelado ao redor da freqüência de 50 rad/s. Neste caso a perturbação multiplicativa é determinada de

$$(1 + \widetilde{W}_2\Delta) = \frac{50}{s + 50} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{W}_2 = \frac{-s}{s + 50}$$

Verifique qual controlador abaixo garante estabilidade em malha fechada:

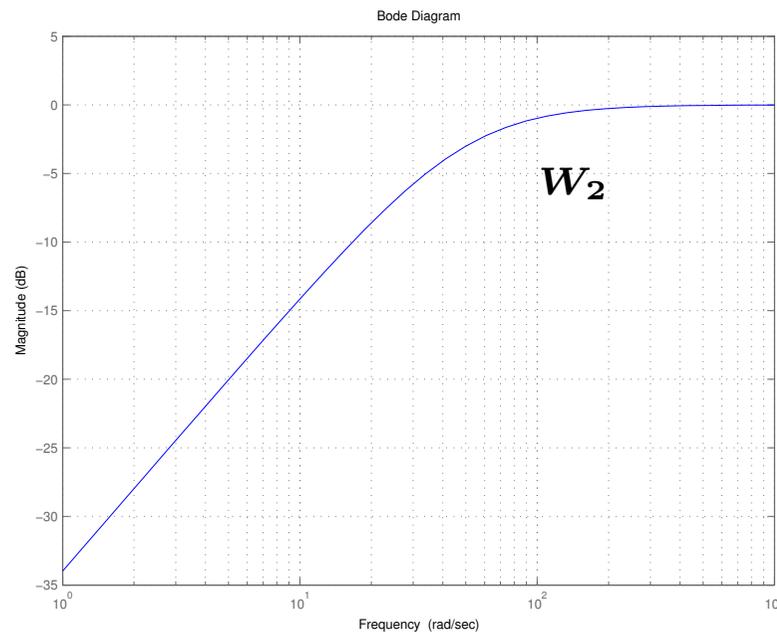
1. $D_1(s) = 0.5$

2. $D_2(s) = \frac{0.15(s + 25)}{(s + 2.5)}$

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

Solução Basta verificar o critério de estabilidade robusta: $|W_2| < |T|^{-1}$, $\forall \omega$

- W_2 é um limitante superior para \widetilde{W}_2 . Como construí-lo? De Bode:



- Conclui-se que o limitante superior para \widetilde{W}_2 é exatamente W_2 ...

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

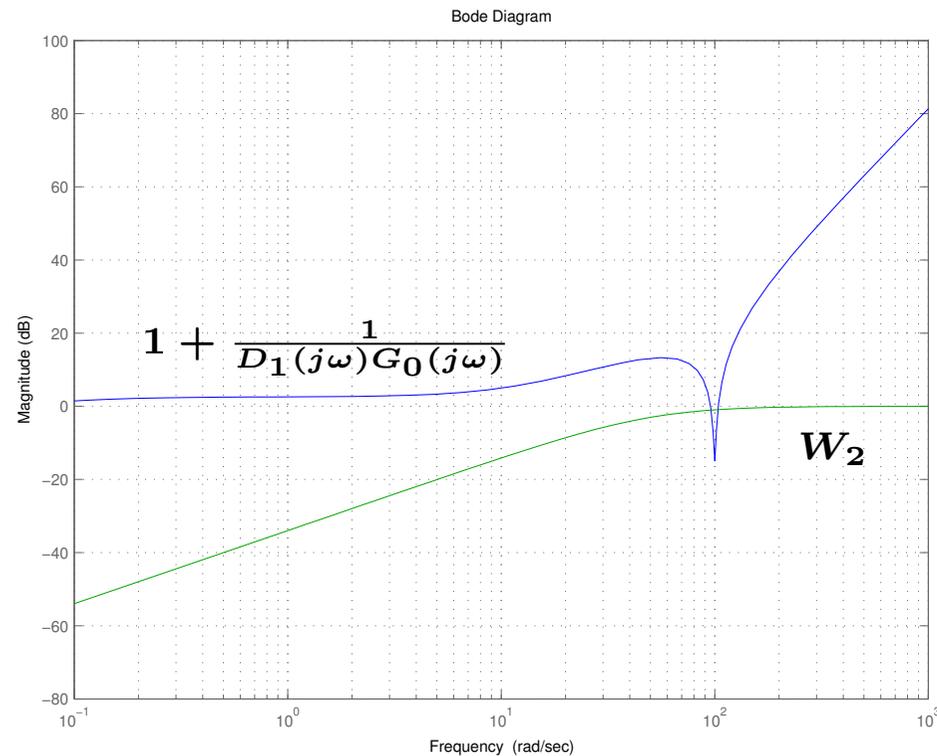
Novamente, para satisfazer o critério de estabilidade robusta,

$$\left| \widetilde{W}_2 \right| = |W_2| < |T|^{-1} = \left| 1 + \frac{1}{D(j\omega)G_0(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega$$

basta analisar no diagrama de Bode se para os controladores dados o critério é verificado $\forall \omega$

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

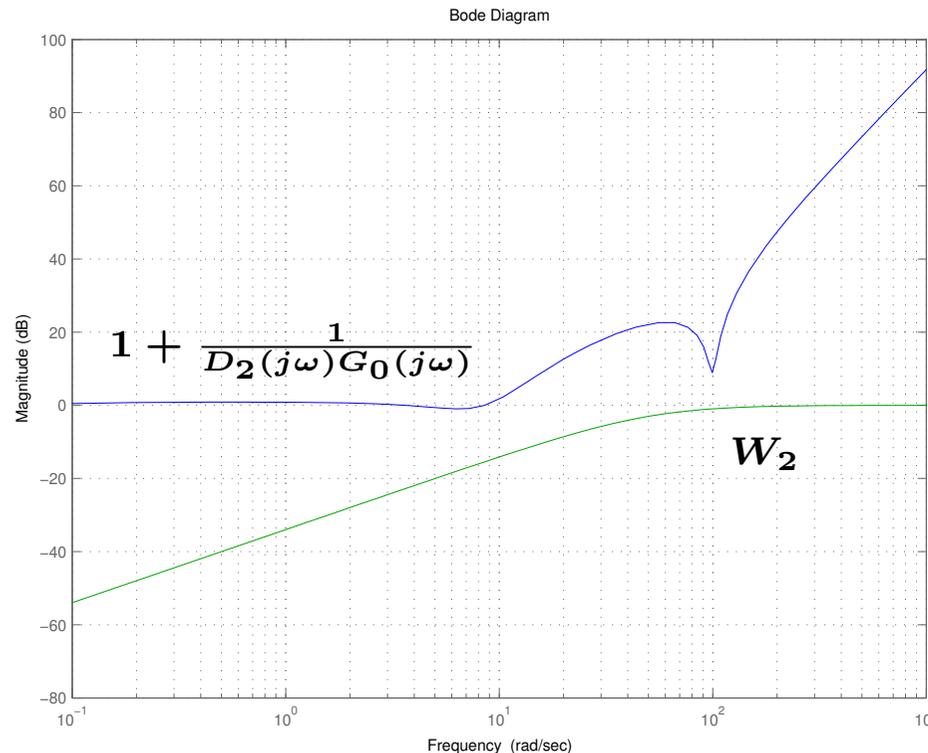
1. Para o controlador $D_1(s) = 0.5$ obtém-se



- Critério de estabilidade robusta satisfeito?

Caracterização do Critério de Estabilidade Robusta

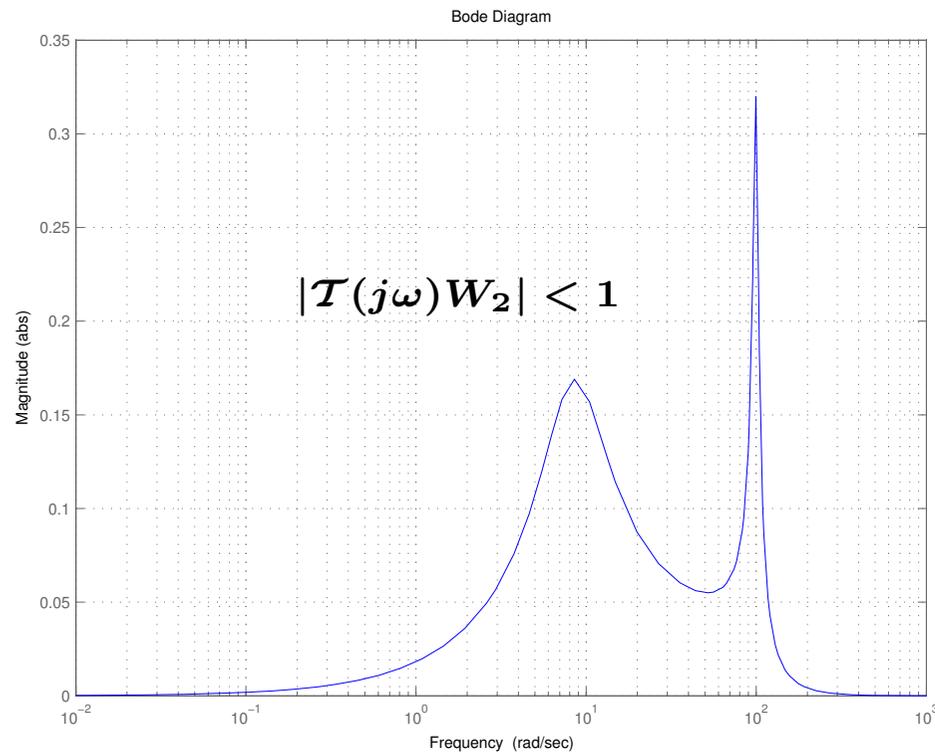
2. Para o controlador $D_2(s) = \frac{0.15(s + 25)}{(s + 2.5)}$ obtém-se



- Critério de estabilidade robusta satisfeito? Agora o ganho de malha DG é reordenado na faixa de frequência $5 < \omega < 25$ para o controlador (de atraso) D_2

O Problema do “Ganho Pequeno”?

↪ Por que o critério de estabilidade robusta é um problema de “Ganho Pequeno”?
Considerando o formato $|\mathcal{T}(j\omega)W_2| < 1$, neste exemplo:



- Se $|\mathcal{T}(j\omega)|$ é grande, então $|W_2|$ necessariamente é pequeno ...

Critério de Estabilidade Robusta × Desempenho Nominal

Desempenho Nominal



$$|\mathcal{S}| |W_1| < 1, \quad \text{ou} \quad |\mathcal{S}| < |W_1|^{-1}, \quad \text{ou} \quad |W_1| < |\mathcal{S}|^{-1}, \quad \forall \omega$$

Estabilidade Robusta



$$|\mathcal{T}| |W_2| < 1, \quad \text{ou} \quad |\mathcal{T}| < |W_2|^{-1}, \quad \text{ou} \quad |W_2| < |\mathcal{T}|^{-1}, \quad \forall \omega$$

Compromisso ?