

Representação e Análise de Sistemas Dinâmicos Lineares

1. Funções de transferência de sistemas lineares
2. Diagramas de blocos
3. Gráfico de fluxo de sinais
 - 3.1 Exemplo – Robô com múltiplas pernas
 - 3.2 Exemplo – Circuito com rejeição de distúrbio de tensão
4. Modelagem matemática de sistemas físicos
 - 4.1 Exemplo – Suspensão ativa
 - 4.2 Exemplos – Motor c.c., time-delay ...

Relembrando – Funções de Transferência – FT

Sistema de entrada e saída únicas – SISO

- A função de transferência $G(s)$ de um sistema Linear e Invariante no Tempo (LIT), é definida como a transformada de Laplace de sua resposta impulsiva, com todas as condições iniciais nulas:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

- ▷ A resposta impulsiva (ou resposta ao impulso) $g(t)$, caracteriza um sistema linear e corresponde à saída desse sistema que é $y(t)$, quando sua entrada $u(t)$ é o impulso unitário, i.e. $u(t) = \delta(t)$
- ▷ **Oops**, é razoavelmente difícil obter uma FT a partir da resposta impulsiva ...

Funções de Transferência – FT

- No entanto, é mais conveniente obter a função de transferência diretamente a partir da equação diferencial aplicando a transformada de Laplace...

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + \dots + b_1s + b_0)U(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Exemplo FT de um corpo rígido “flutuando” (satélite?) aplicando-se um torque

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = T \xrightarrow{\mathcal{L}} Js^2\Theta(s) = T(s) \therefore \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2}$$

Funções de Transferência – FT

Propriedades

- ▷ vale para sistemas LIT (Lineares e Invariantes no Tempo)
- ▷ aplicam-se apenas a sistemas com condições iniciais nulas
- ▷ é independente do sinal de entrada
- ▷ é função racional da variável complexa “s”
- ▷ não guarda **qualquer informação** sobre a física do sistema (a mesma FT pode descrever sistemas físicos completamente diferentes!)
- ▷ pode ser **determinada** a partir da relação entre medições dos sinais de entrada e saída

Funções de Transferência – FT

Para a FT

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \text{ sendo } \begin{cases} m & = \text{ grau do numerador} \\ n & = \text{ grau do denominador} \end{cases}$$

- $G(s)$ é dita **própria** sse $G(\infty) = c < \infty$, $c \in \mathbb{R}$ (i.e., $n = m$)
- $G(s)$ é dita **estritamente própria** sse $G(\infty) = 0$ (i.e., $n > m$)
- $G(s)$ é dita **imprópria** sse $G(\infty) = \infty$ (i.e., $n < m$)

↪ Um polo de uma função de transferência própria, é todo escalar λ tal que $|G(\lambda)| = \infty$, e um zero é um valor λ tal que $G(\lambda) = 0$

Equação Característica – EC

Para a FT

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

▷ A equação característica (EC) é obtida quando se iguala o denominador da FT a zero

$$EC = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Nota Como já discutido na aula anterior, as raízes (ou polos da FT) obtidas da equação característica determinam o comportamento dinâmico do sistema em termos de **características de resposta temporal** – limitada ou não...

Diagrama de Blocos

- ▷ O diagrama de blocos é uma representação ilustrada das **funções desempenhadas** por cada um dos componentes de um sistema (descritas por FT) e o **fluxo de sinais** correspondentes
- ▷ O diagrama de blocos inclui apenas informações sobre comportamento dinâmico, i.e., sistemas diferentes podem ter mesmo diagrama
- ▷ Funções de transferência são introduzidas nos blocos correspondentes e:

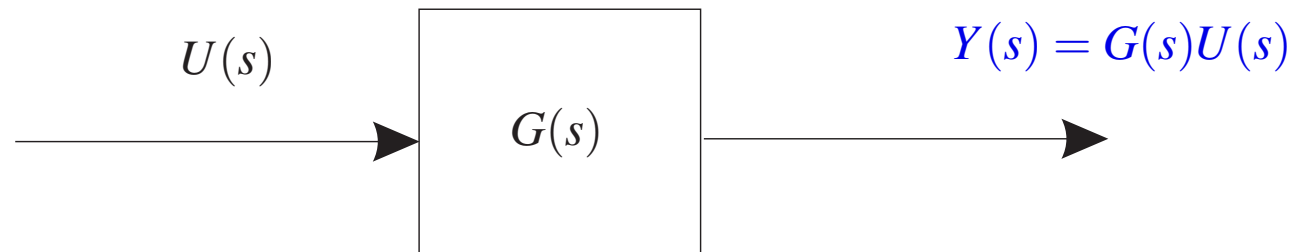
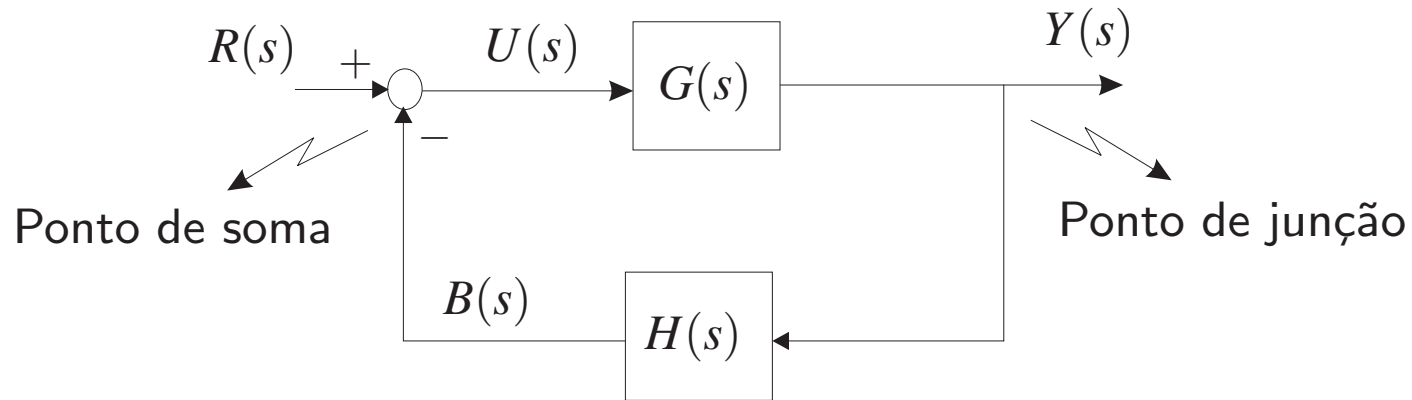
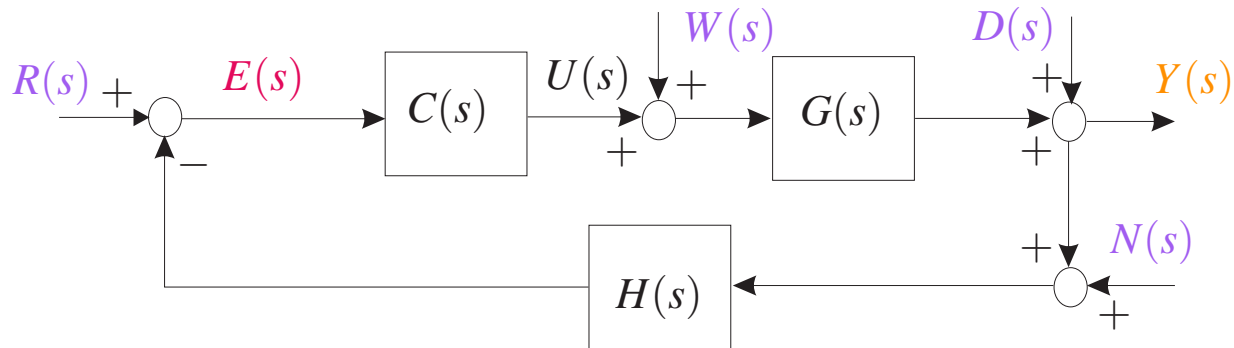


Diagrama de Blocos



- ▷ $R(s)$ – sinal de referência (*set-point*)
- ▷ $Y(s)$ – sinal de saída (variável controlada)
- ▷ $U(s)$ – desvio (chamado sinal de erro $E(s)$ quando $H(s) = 1$)
- ▷ $H(s)$ – FT da realimentação (sensor)
- ▷ $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$ – FT da malha fechada

Sistema Sujeito a Sinais de Perturbações



$$Y(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)H(s)} R(s) + \frac{1}{1 + G(s)C(s)H(s)} D(s) + \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)H(s)} W(s) - \frac{G(s)C(s)H(s)}{1 + G(s)C(s)H(s)} N(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)H(s)} R(s) - \frac{H(s)}{1 + G(s)C(s)H(s)} D(s) - \frac{H(s)G(s)}{1 + G(s)C(s)H(s)} W(s) - \frac{H(s)}{1 + G(s)C(s)H(s)} N(s)$$

▷ É possível uma análise genérica do papel desempenhado pelo controlador $C(s)$?

Técnicas de Redução de Diagramas de Blocos – GFS

Gráfico de Fluxos de Sinais – GFS – O diagrama de blocos é representado por um **grafo**, i.e., uma **rede de nós** conectada por **ramos orientados**

Definições

1. Nó – ponto que representa uma variável ou sinal
2. Transmitância – ganho entre dois nós
3. Fonte ou nó de entrada – só tem ramos de saída
4. Sorvedouro ou nó de saída – só tem ramos de chegada
5. Caminho – trajetória de ramos orientados
6. Laço – caminho fechado (com início e fim no mesmo nó)
7. Ganho do laço – é o produto das transmitâncias dos ramos do laço
8. Caminho direto – parte de um nó de entrada que vai a um nó de saída sem, no entanto, passar pelo mesmo nó mais de uma vez

Gráfico de Fluxos de Sinais – GFS

Propriedades básicas

1. Um sinal y_k que atravessa o ramo entre y_k e y_j será multiplicado pelo ganho do ramo (g_{kj}) tal que se tenha a relação $y_j = g_{kj}y_k$
 2. Em um nó, os sinais de todos os ramos de entrada são **somados** e o resultado é transmitido a todos os ramos de saída
 3. Mais de um gráfico de fluxo de sinais pode ser traçado para um mesmo sistema
- ▶ No GFS cada **bloco** do diagrama de blocos é substituído por um **ramo** orientado e a **FT** pela **transmitância**. Os **somadores** e os **pontos de junção** são substituídos por **nós**

Gráfico de Fluxos de Sinais – GFS

Fórmula de Mason

O ganho total entre a entrada r e a saída y de um GFS, composto por ℓ laços e N caminhos diretos entre r e y (é uma única função de transferência T que representa o grafo de fluxo de sinais). Então a FT é dada por

$$T = \frac{y}{r} = \sum_{k=1}^N \frac{M_k \Delta_k}{\Delta}$$

- sendo M_k o ganho do k -ésimo caminho direto entre r e y
- Δ é o determinante do grafo (de fato, será o polinômio característico)
- Δ_k é a parte de Δ que não toca o k -ésimo caminho direto

Fórmula de Mason para GFS

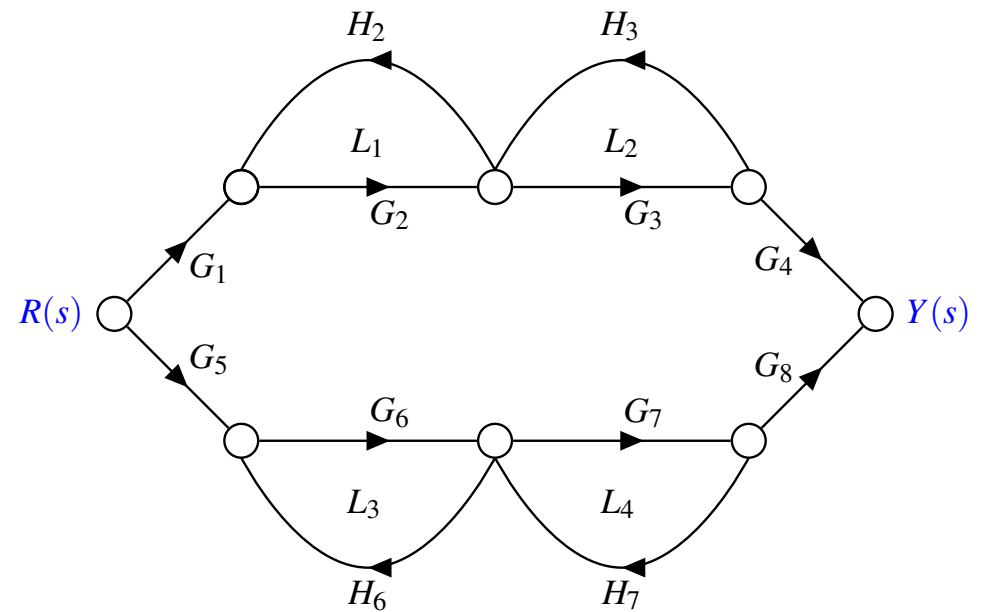
- O cálculo de Δ é dado por:

$$\Delta = 1 - \sum_i L_{i1} + \sum_j L_{j2} - \sum_q L_{q3} + \dots$$

sendo que $L_{r\kappa}$ é o produto dos ganhos da r -ésima combinação possível dos p laços que não se tocam ($1 \leq \kappa \leq \ell$). De fato, “lê-se” a construção de Δ assim:

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - (\text{soma dos ganhos de todos os laços}) \\ & + (\text{soma do produto dos ganhos de todas as combinações 2 a 2} \\ & \text{dos laços que não se tocam, i.e., não têm nós em comum}) \\ & - (\text{soma do produto dos ganhos de todas as combinações 3 a 3} \\ & \text{dos laços que não se tocam, i.e., não têm nós em comum}) \\ & + \dots \end{aligned}$$

Exemplo - Robô com múltiplas pernas



Exemplo - Robô com múltiplas pernas

Considerando a entrada $R(s)$ e a saída $Y(s)$, deve-se obter todos os caminhos diretos que partem da entrada e atingem a saída (i.e., o sinal flui de $R(s)$ para $Y(s)$ sem obstáculos). Neste caso, é fácil notar que há dois caminhos diretos:

$$M_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 \quad \text{e} \quad M_2 = G_5 G_6 G_7 G_8$$

Além disso, há 4 laços que são dados por:

$$L_1 = G_2 H_2, \quad L_2 = G_3 H_3, \quad L_3 = G_6 H_6, \quad L_4 = G_7 H_7$$

Note que os laços L_1 e L_2 não têm nós em comum com os laços L_3 e L_4 (i.e., não se tocam). Então o **polinômio característico** é dado por:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4)$$

Exemplo - Robô com múltiplas pernas

Como

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4)$$

então para o caminho 1 (M_1) tem-se: $\Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4)$ (a parte de Δ que não toca o caminho 1); e para o caminho 2 (M_2) tem-se: $\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2)$ (que é a parte de Δ que não toca o caminho 2)

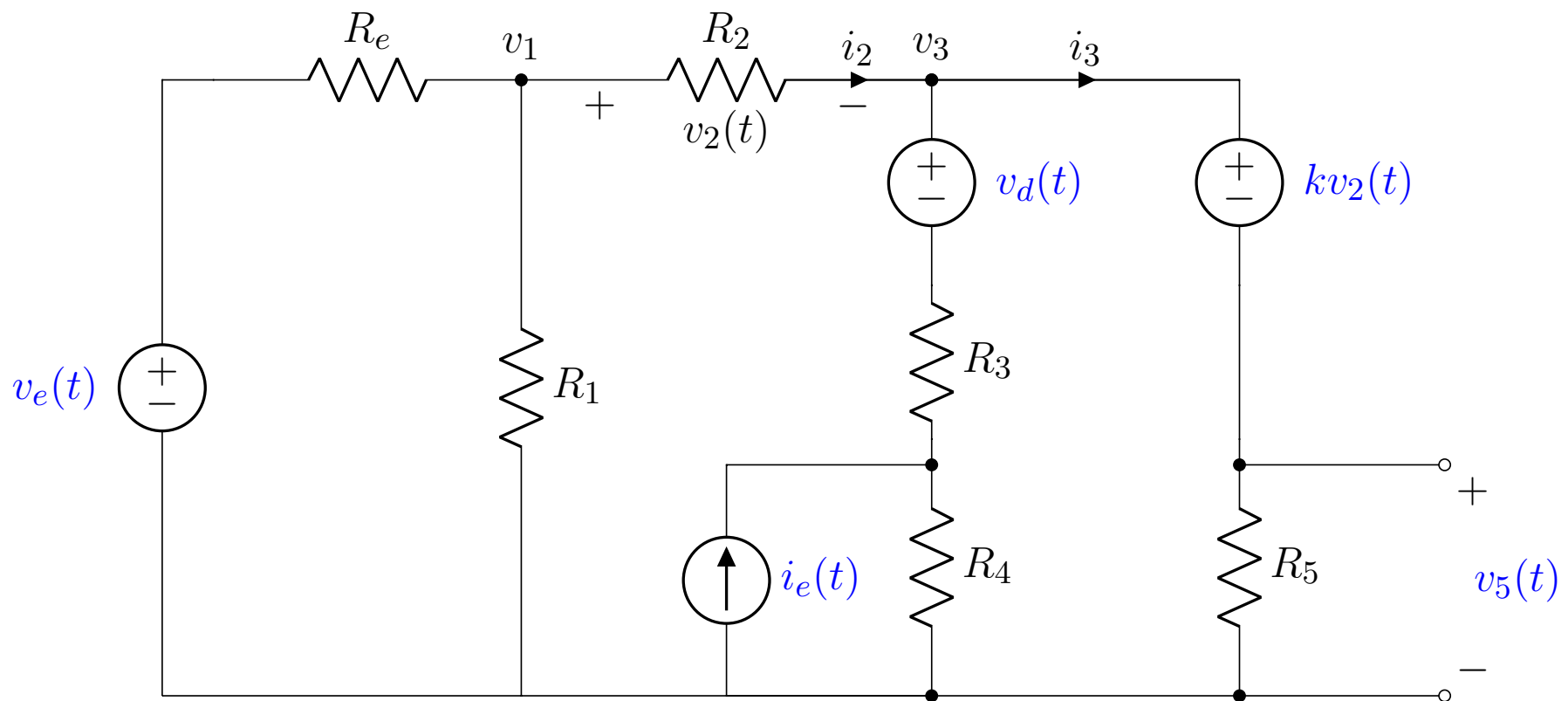
Desta forma a função de transferência é:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2}{\Delta}$$

sendo $M_1 = G_1G_2G_3G_4$ e $M_2 = G_5G_6G_7G_8$

Exemplo - Circuito e rejeição de distúrbio

Considere o diagrama esquemático de um circuito no qual a fonte de tensão $v_d(t)$ representa um distúrbio de tensão. A fonte de tensão dada por $kv_2(t)$ é usada para rejeitar o efeito do distúrbio de tensão $v_d(t)$ na saída dada por $v_5(t)$



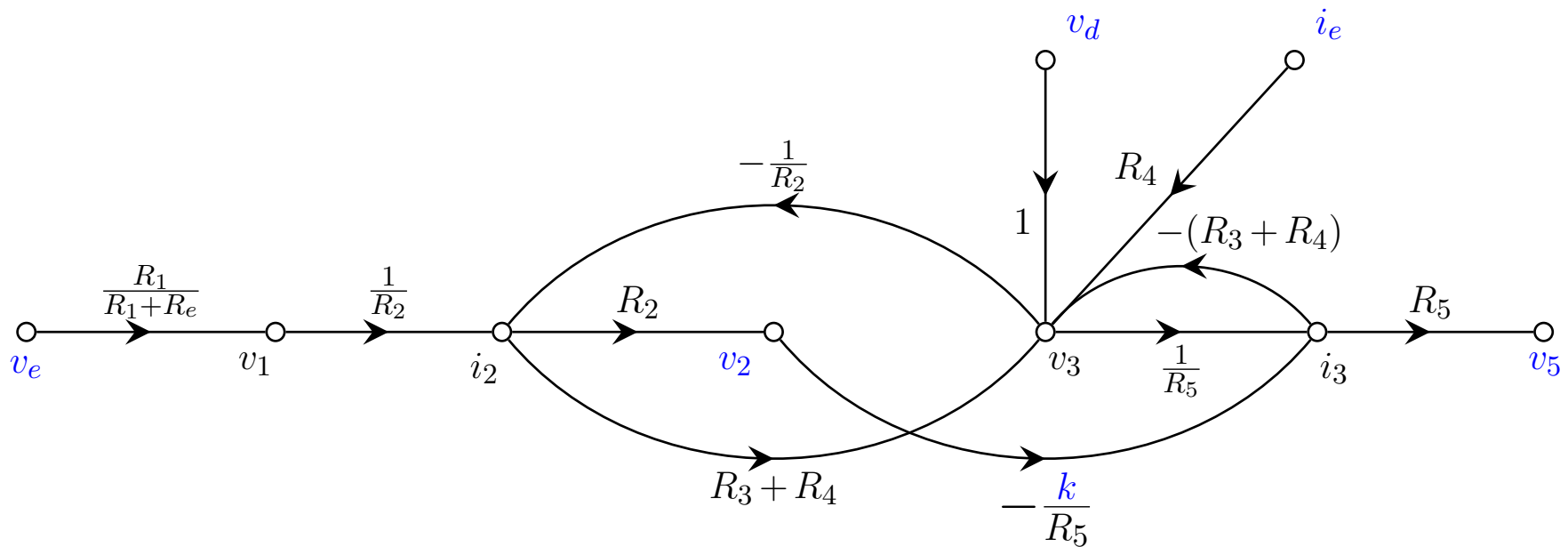
Exemplo - Circuito e rejeição de distúrbio

Pergunta-se:

1. Encontre o valor da constante k tal que a tensão em $v_5(t)$ não seja afetada pelo distúrbio de tensão $v_d(t)$
2. Encontre a função de transferência entre $v_e(t)$ e a saída $v_5(t)$ considerando o valor de k obtido no item (1). Neste item, para facilitar as contas, considere hipoteticamente que $R_e = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1 \Omega$
3. Qual é o valor de tensão que se obtém em $v_5(t)$ quando se aplica uma entrada degrau de tensão unitário (1 V) na entrada $v_e(t)$ (Use $V_e(s)/V_5(s)$ obtida com os valores no item (2))

Exemplo - Circuito e rejeição de distúrbio

Note que pode-se usar o GFS para auxiliar a solucionar este problema (de uma forma bem fácil!). Um GFS que representa o circuito é descrito abaixo:



Exemplo - Circuito e rejeição de distúrbio

Para o item 1) Note que há dois caminhos diretos entre v_d e v_5 dados por:

$$(v_d \rightarrow v_3 \rightarrow i_3 \rightarrow v_5): M_1 = 1 \frac{1}{R_5} \cancel{R_5} = 1$$

$$(v_d \rightarrow v_3 \rightarrow i_2 \rightarrow v_2 \rightarrow i_3 \rightarrow v_5): M_2 = 1 \frac{-1}{R_2} \cancel{R_2} \frac{-k}{R_5} \cancel{R_5} = k$$

Considere Δ o polinômio característico. Então a FT de $v_d(t)$ para $v_5(t)$ é

$$\frac{V_5(s)}{V_d(s)} = \frac{M_1 + M_2}{\Delta} = \frac{1 + k}{\Delta}$$

que deve se anular para rejeitar o efeito do distúrbio de tensão $v_d(t)$ na saída $v_5(t)$, isto é,

$$\frac{V_5(s)}{V_d(s)} = \frac{1 + k}{\Delta} = 0$$

Portanto para rejeição $1 + k = 0$. Ou $k = -1$

Exemplo - Circuito e rejeição de distúrbio

Para o item 2) Calcule Δ e os caminhos associados. Os caminhos entre $v_e(t)$ e $v_5(t)$ são:

$$(v_e \rightarrow v_1 \rightarrow i_2 \rightarrow v_3 \rightarrow i_3 \rightarrow v_5): M_1 = \frac{R_1}{R_1+R_e} \frac{1}{R_2} (R_3 + R_4) \frac{1}{R_5} \cancel{R_5} = \frac{R_1(R_3+R_4)}{R_2(R_1+R_e)}$$

$$(v_e \rightarrow v_1 \rightarrow i_2 \rightarrow v_2 \rightarrow i_3 \rightarrow v_5): M_2 = \frac{R_1}{R_1+R_e} \frac{1}{R_2} \cancel{R_2} \frac{-k}{R_5} \cancel{R_5} = \frac{-kR_1}{(R_1+R_e)}$$

Para o cálculo de Δ , obtêm-se os laços apropriados:

$$(i_2 \rightarrow v_3 \rightarrow i_2): L_1 = (R_3 + R_4) \frac{-1}{R_2} = \frac{-(R_3+R_4)}{R_2}$$

$$(i_2 \rightarrow v_2 \rightarrow i_3 \rightarrow v_3 \rightarrow i_2): L_2 = \cancel{R_2} \frac{-k}{R_5} [-(R_3 + R_4)] \frac{-1}{\cancel{R_2}} = \frac{-k(R_3+R_4)}{R_5}$$

$$(v_3 \rightarrow i_3 \rightarrow v_3): L_3 = \frac{1}{R_5} [-(R_3 + R_4)] = \frac{-(R_3+R_4)}{R_5}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3) \\ &= 1 - \left(-\frac{(R_3 + R_4)}{R_2} - \frac{k(R_3 + R_4)}{R_5} - \frac{(R_3 + R_4)}{R_5} \right) \\ &= 1 + \left(\frac{R_5(R_3 + R_4) + kR_2(R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)}{R_2R_5} \right) \end{aligned}$$

Exemplo - Circuito e rejeição de distúrbio

Então o polinômio característico é descrito da forma:

$$\Delta = 1 + \frac{(R_5 + kR_2 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_2R_5} = \frac{R_2R_5 + (R_5 + kR_2 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_2R_5}$$

Logo, a FT é:
$$\frac{V_5(s)}{V_e(s)} = \frac{M_1 + M_2}{\Delta} = \frac{\frac{R_1(R_3+R_4) - kR_1R_2}{R_2(R_1+R_e)}}{\Delta}$$

Considerando o valor de k obtido no item (1), i.e., $k = -1$, substituindo tem-se:

$$\Delta = \frac{R_2R_5 + (R_5 - \cancel{R_2} + \cancel{R_2})(R_3 + R_4)}{R_2R_5} = \frac{R_2\cancel{R_5} + \cancel{R_5}(R_3 + R_4)}{R_2\cancel{R_5}} = \frac{R_2 + (R_3 + R_4)}{R_2}$$

Então:

$$\frac{V_5(s)}{V_e(s)} = \frac{\frac{R_1(R_3+R_4) + R_1R_2}{R_2(R_1+R_e)}}{\frac{R_2 + (R_3+R_4)}{R_2}} = \frac{[R_1(R_3 + R_4) + R_1R_2]R_2}{[R_2(R_1 + R_e)][R_2 + (R_3 + R_4)]}$$

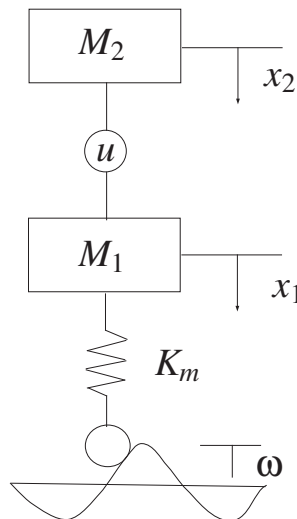
Se $R_e = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$. Então: $\frac{V_5(s)}{V_e(s)} = \frac{3}{6} = 0.5$

Exemplo - Circuito e rejeição de distúrbio

Para o item 3) Note que não há dinâmica neste circuito que é puramente resistivo e a FT ilustra isso (atenua em 50% o que se aplica na entrada)

Portanto, ao se aplicar uma entrada degrau de tensão unitário (1V), tem-se na saída $v_5(t) = 0.5V$ para todo instante de tempo

Suspensão ativa – Modelo para 1/4 de um veículo



1. M_1 – massa do conjunto da roda
2. M_2 – porção da massa do veículo que corresponde a 1/4 de sua massa total
3. “ u ” e K_m – respectivamente, atuador e rigidez do pneu (representado por uma mola...)
4. x_1 e x_2 – deslocamento da massa da roda e da massa do veículo, respectivamente
5. x_3 e x_4 – velocidade relativas às massas M_1 e M_2 , respectivamente
6. ω – distúrbio externo

Modelo Dinâmico? Equações Diferenciais...

Utilizando as Leis de Newton para o movimento...

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \text{Força}$$

Do modelos tem-se: x_1 e x_2 – deslocamento das massas M_1 e M_2
 x_3 e x_4 – velocidade relativas às massas M_1 e M_2

Portanto:

$$\begin{array}{l} x_3 = \dot{x}_1 \quad \longrightarrow \quad \dot{x}_3 = \ddot{x}_1 \\ x_4 = \dot{x}_2 \quad \longrightarrow \quad \dot{x}_4 = \ddot{x}_2 \end{array}$$

$$M_2 \ddot{x}_2 = u \quad \longrightarrow \quad \dot{x}_4 = u/M_2$$

$$M_1 \ddot{x}_1 + K_m(x_1 - \omega) = -u \quad \longrightarrow \quad \dot{x}_3 = -\frac{1}{M_1}u - \frac{K_m}{M_1}x_1 + \frac{K_m}{M_1}\omega$$

Descrição em espaço de estados e FT

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K_m/M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/M_1 \\ 1/M_2 \end{bmatrix}}_B u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_m/M_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_E \omega(t) \\ y(t) = \mathbf{I}x(t) \end{array} \right.$$

↪ FT - $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{I}(s\mathbf{I} - A)^{-1}B$, para $\omega(t) \equiv 0$

▷ MATLAB - `ss`

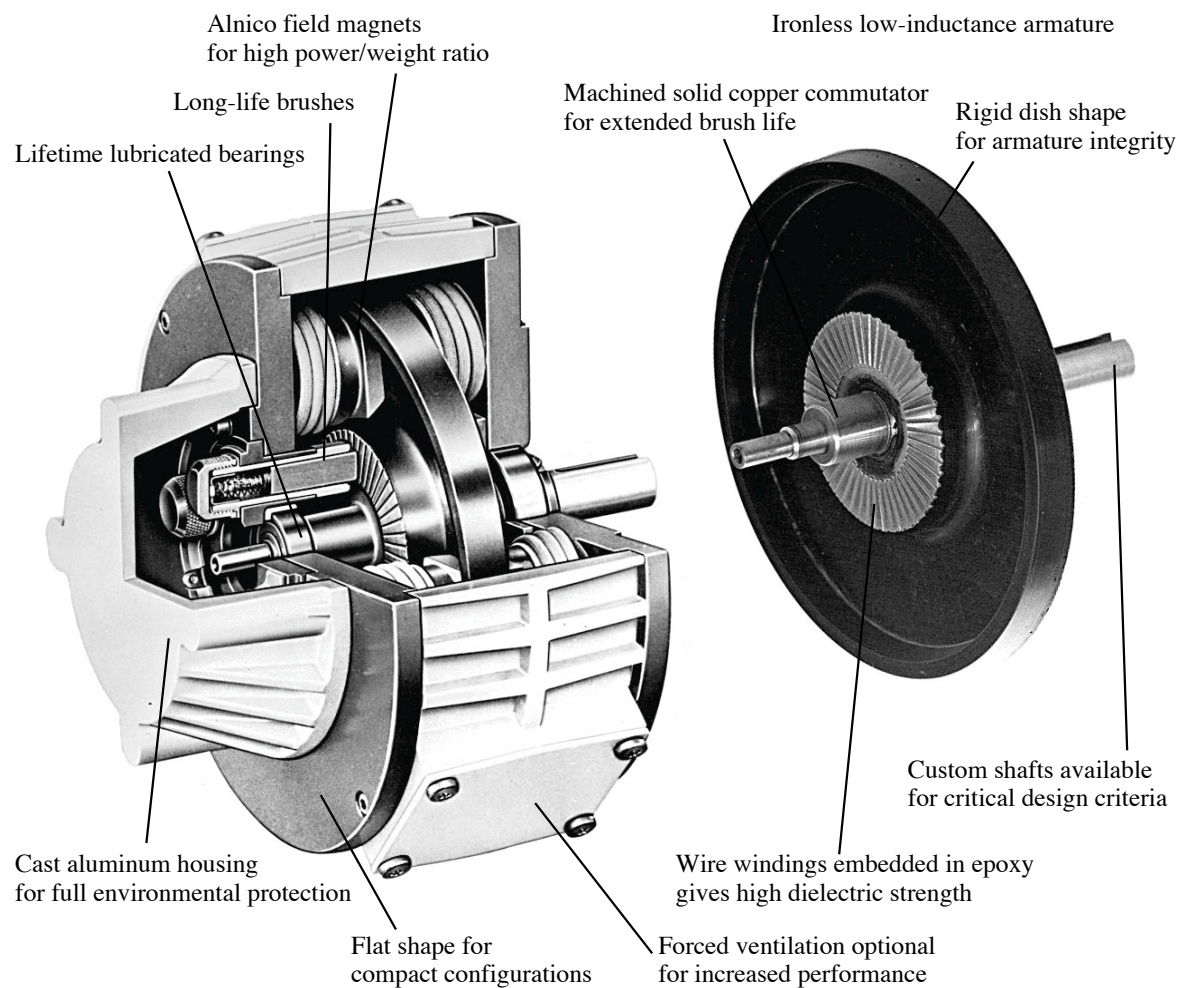


Figure 2.16 A pancake dc motor with a flat-wound armature and a permanent magnet rotor

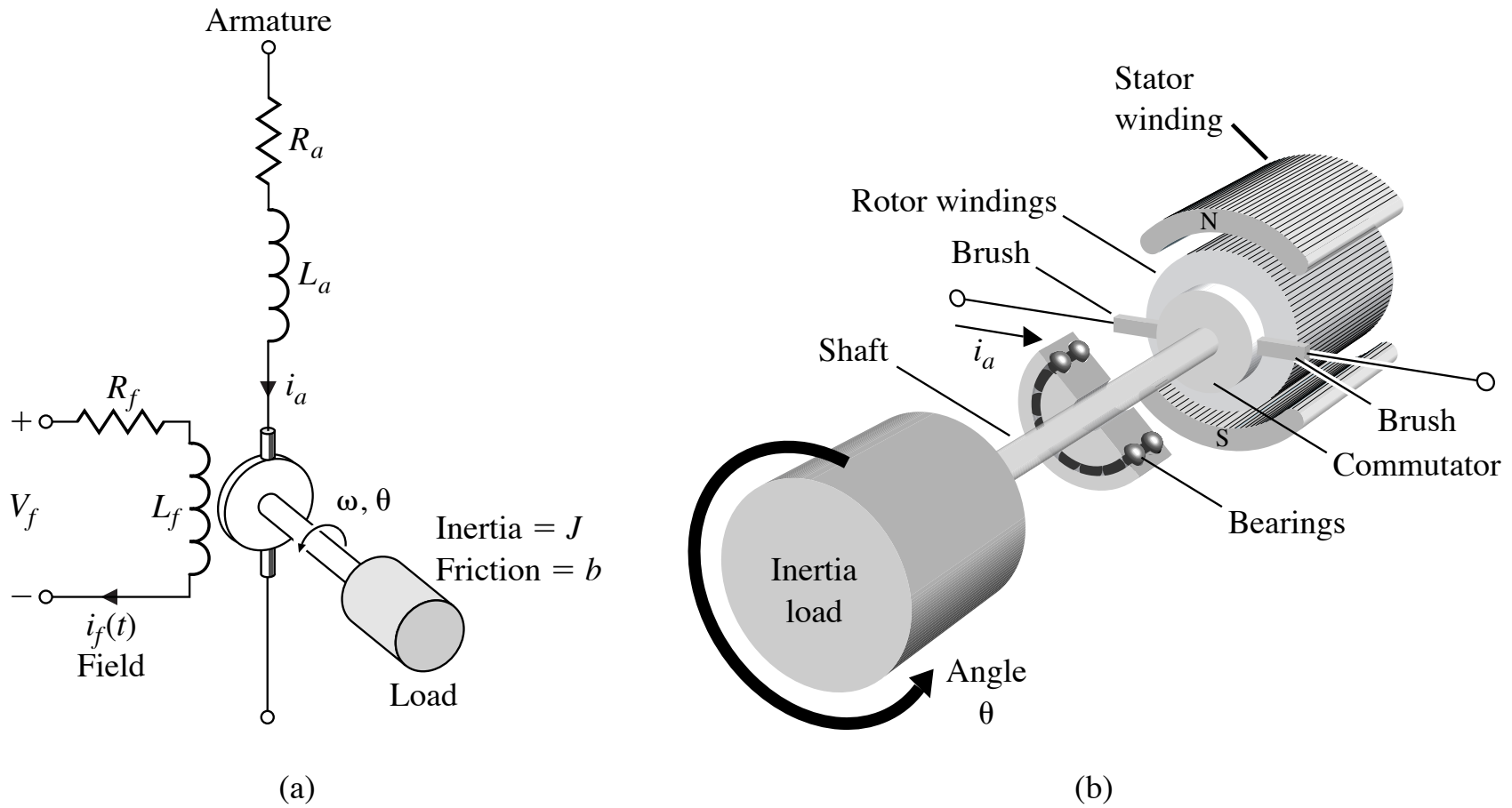


Figure 2.15 A dc motor (a) wiring diagram and (b) sketch

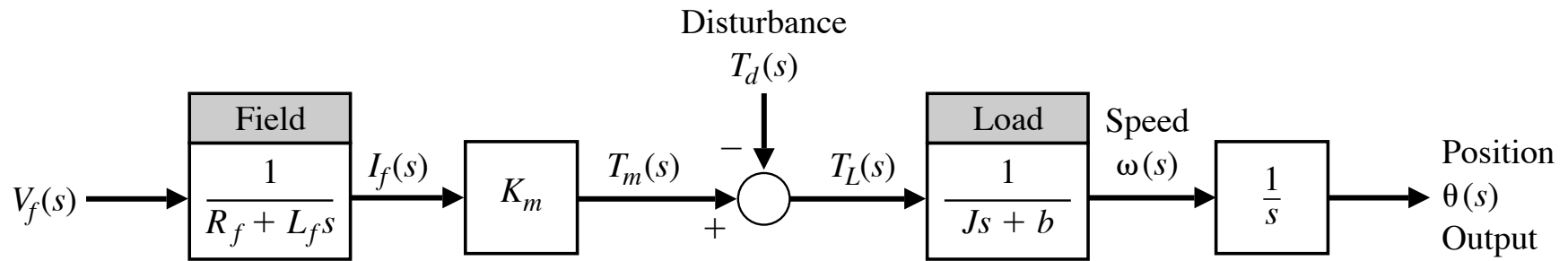


Figure 2.17 Block diagram model of field-controlled dc motor

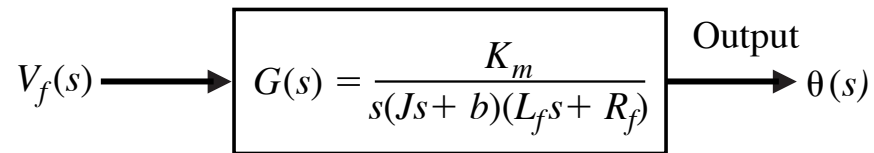
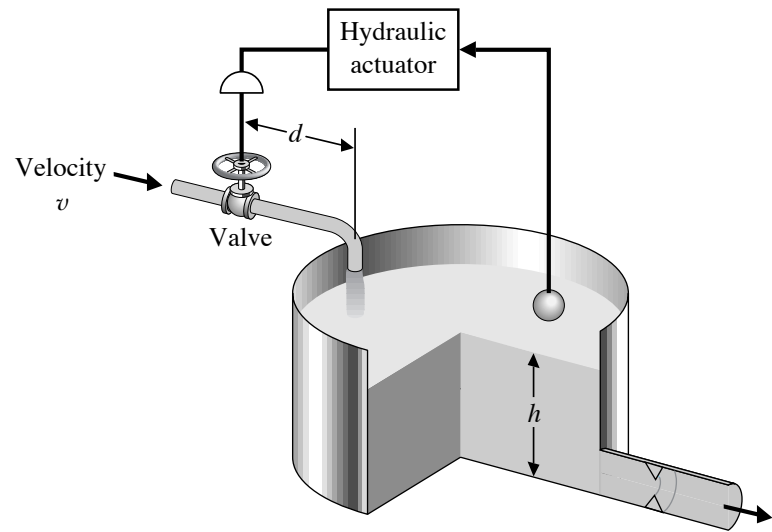
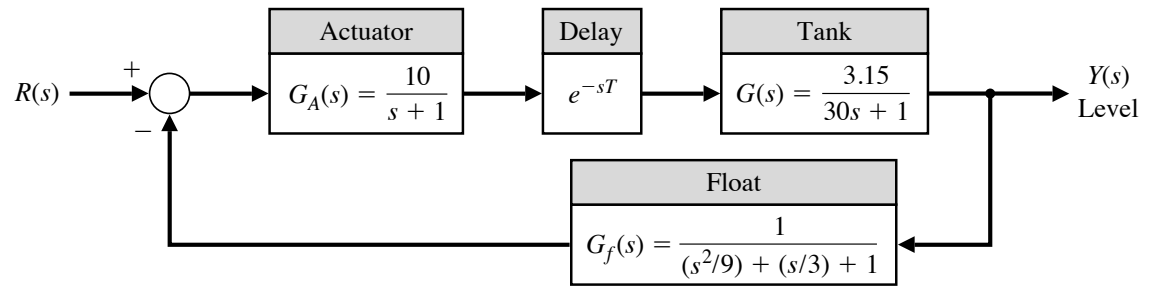


Figure 2.20 Block diagram of dc motor



(a)



(b)

Figure 9.32 (a) Liquid level control system (b) Block diagram