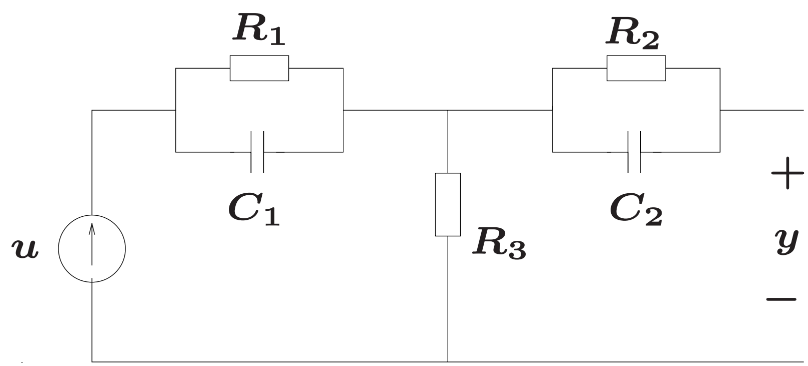
Controle baseado no Observador

1. Conceito de Observabilidade
2. Projeto do Observador (ou Estimador) de estados. Por quê?
3. Controle baseado no Observador
4. Entrada de referência e rastreamento – Controle Integral

Observabilidade

Questão: Um estado pode ser "observado" (ou acessado) a partir da saída?

▷ No circuito abaixo defina como variáveis de estado as tensões v_{C_1} e v_{C_2}



▷ Note que a corrente em R_3 irá se igualar a entrada u (o circuito está aberto em y). Portanto a resposta gerada pelo estado inicial $v_{C_1}(0)$ não aparece na saída y. Então o estado inicial $v_{C_1}(0)$ não pode ser observado a partir da saída

Observabilidade

Considere o sistema: $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Definição O sistema acima ou **o par (A,C) é dito ser observável se**, para qualquer estado inicial $x(0)$, existir um tempo finito t_1 tal que **o conhecimento da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ no intervalo $[0, t_1]$** seja suficiente para se determinar de maneira única o estado (condição) inicial $x(0)$

Como checar se um sistema é observável?

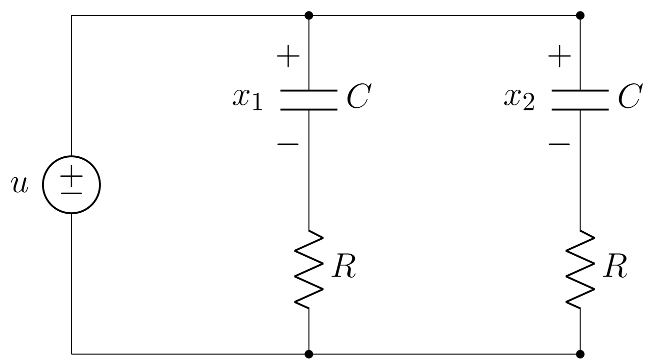
▷ Pode-se determinar se o sistema é observável (ou o par (A,C) é observável) construindo a matriz de Observabilidade $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{np \times n}$ da forma:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

e checar se a matriz $\mathcal{O}$ tem posto/*rank* completo de colunas igual a n

⇝ Se a matriz de Observabilidade $\mathcal{O}$ é uma matriz quadrada $(n \times n)$, então ao checar se posto$(\mathcal{O}) = n$ é o mesmo que checar se existe a inversa de $\mathcal{O}$ (o que é equivalente a checar se o determinante de $\mathcal{O}$ é não nulo)

Retorne ao Circuito da Aula 21, pág. 5



$$\begin{cases} u = x_1 + i_C R = x_1 + RC\dot{x}_1 \\ u = x_2 + i_C R = x_2 + RC\dot{x}_2 \\ \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{B} u \end{cases}$$

Considere a saída como sendo a tensão no capacitor x_2: $y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$

▷ Matriz de Observabilidade: $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$

▷ posto$(\mathcal{O}) = 1 \neq n$ (e $\det(\mathcal{O}) = 0$), então **o sistema <u>é não observável</u>**

Observadores ou Estimadores de Estado

Como já discutimos, **a realimentação de estados pressupõe que todas as variáveis de estado que compõem o vetor de estado x estão disponíveis para medição (e, portanto, podem ser realimentados)** tal que:

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

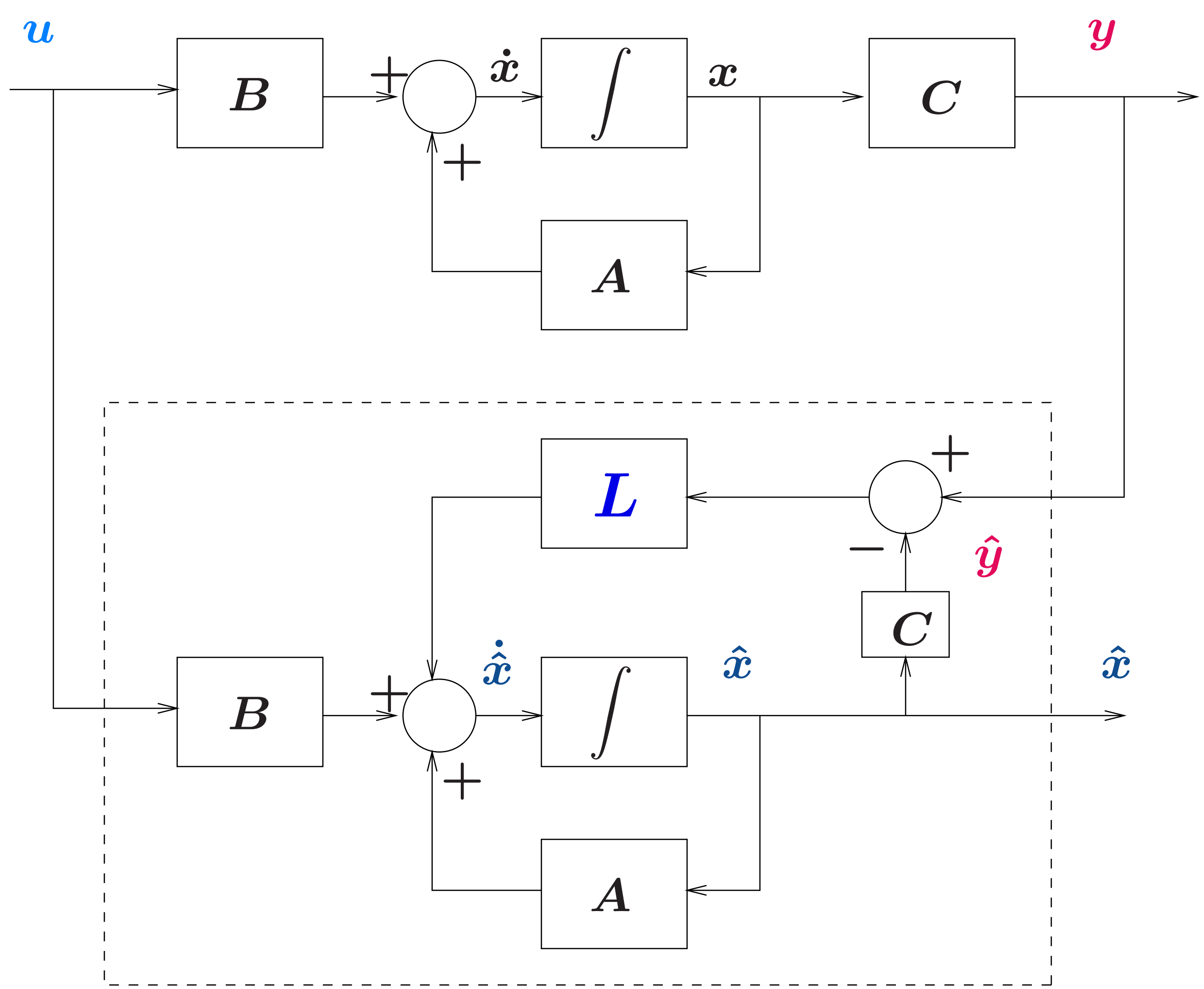
Boas questões:

▷ Algumas variáveis de estados podem não ser/estar acessíveis (por restrição física) para medição

▷ Limitação econômica quanto ao número de medidores (e.g., sistemas de grande escala)

▷ E aí? Como realimentar?

Observadores ou Estimadores de Estado – Estratégia?



Observadores ou Estimadores de Estado – Estratégia?

Estimador de estados:
$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \underbrace{\hat{y}(t)}_{=C\hat{x}(t)}) \\ &= (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)\end{aligned}$$

Definindo-se o **erro "de estimativa"** da forma $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$, então:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \underbrace{Ax(t) \cancel{+Bu}}_{\dot{x}(t)} - \underbrace{(A - LC)\hat{x}(t) \cancel{- Bu(t)} - L(Cx(t))}_{\dot{\hat{x}}(t)} \\ &= (A - LC)(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)\, e(t)\end{aligned}$$

Boa nova: Se todos os autovalores de $(A - LC)$ são selecionados com parte real negativa, via o ganho L, **então o erro $e(t) \to 0$ e, claro, tem-se $\hat{x} \to x$!** Isto é possível pois a estabilidade irá garantir que a resposta da dinâmica do erro de estimativa convirja para zero, ou: $e(t) = e^{(A-LC)t}e(0) \to 0$, p/ $t \to \infty$

Projeto do Ganho do Observador?

Como calcular o ganho do observador L?

▷ Para obter o ganho L, a ideia é seguir os mesmos passos usados para o cálculo do ganho de realimentação de estados K

▷ Então <u>**selecione**</u> **todos os autovalores com parte real negativa para a dinâmica do erro de estimativa**, em outras palavras, force que os autovalores satisfaçam $|\boldsymbol{\lambda} \mathbf{I} - ((A - LC))| = \mathbf{0}$, sendo que **o ganho do observador L é uma incógnita**

▷ Condição para que exista o ganho L? O sistema deve ser observável!

Hubble – Observador de Estados?

Retornemos ao modelo em espaço de estados do telescópio Hubble apresentado na Aula 21, pág. 18, isto é:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

E suponha que mede-se apenas a posição angular (descrita pela variável de estado x_1). Neste caso a saída medida é dada por:

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x(t)}$$

Hubble – Observador de Estados?

▷ Para se obter um estimador de estados, primeiramente é necessário checar se o sistema é observável. Note que a matriz de Observabilidade é dada por:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e tem posto $\mathbf{2}$ (determinante não nulo). Portanto, o sistema é observável e é possível obter um ganho $\boldsymbol{L}$ para o estimador (no caso $\boldsymbol{L}$ é um vetor $\mathbf{2} \times \mathbf{1}$)

▷ Aloque os autovalores para a dinâmica do erro de estimação, por exemplo, em:

$$\boldsymbol{\lambda_{1,2} = -3;\ -5}$$

isto é, os autovalores têm parte real negativa para que a dinâmica do erro de estimação seja estável

Hubble – Observador de Estados?

▷ A dinâmica do erro de estimação é (note que $\boldsymbol{L}$ é um vetor $\mathbf{2} \times \mathbf{1}$):

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) e(t) = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & 0 \end{bmatrix} e(t)$$

o polinômio da dinâmica do erro de estimação é:

$$\Delta_e(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - (A - LC)| = \left| \begin{bmatrix} \lambda + l_1 & -1 \\ l_2 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + l_1\lambda + l_2$$

▷ Além disso, da escolha dos dois autovalores para a dinâmmica do erro de estimação em -3 e -5, obtém-se também o polinômio característico:

$$\Delta_e(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 5) = \lambda^2 + 8\lambda + 15$$

Hubble – Observador de Estados?

Ao igualar os polinômios característicos $\boldsymbol{\Delta_e}$:

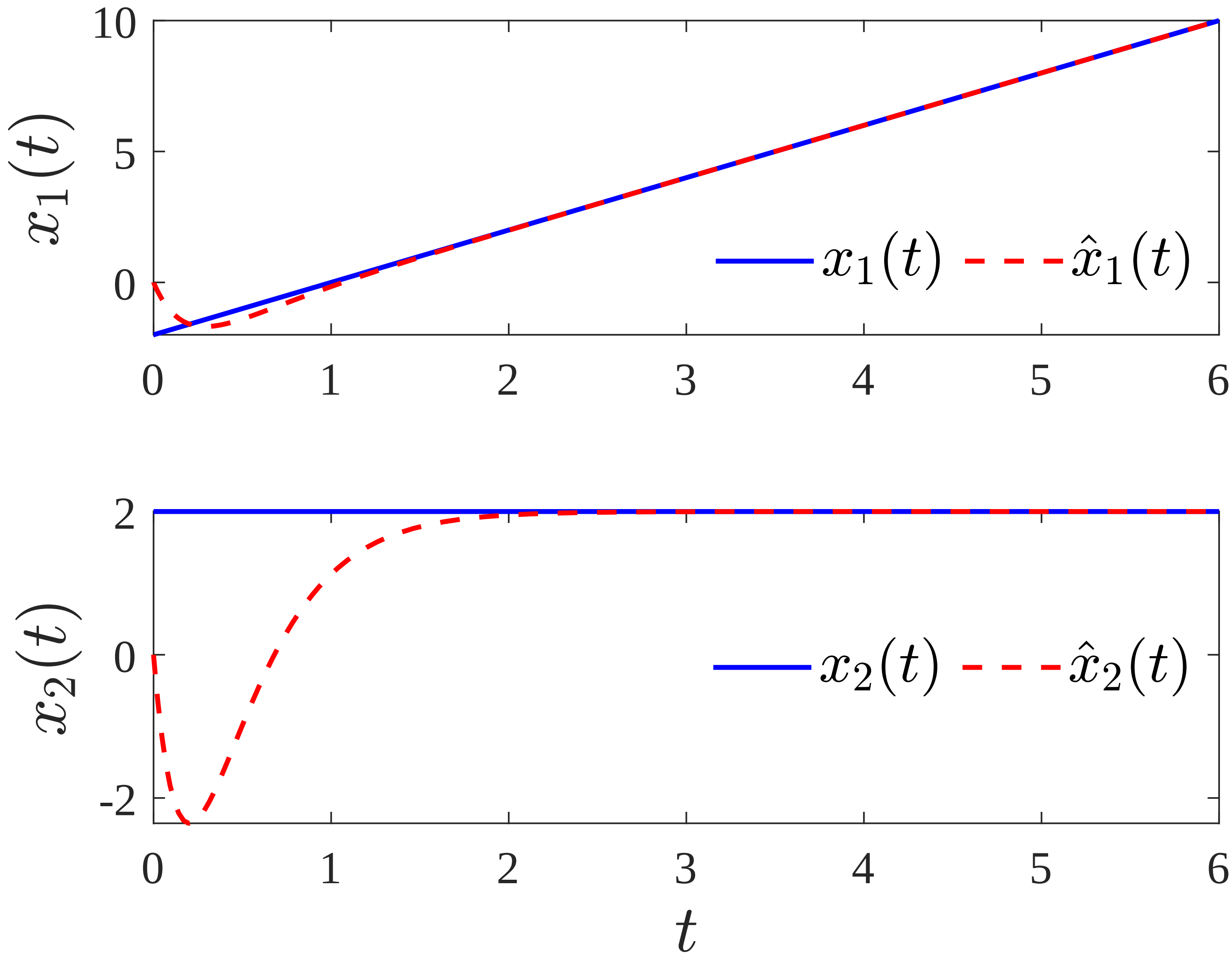
$$\boldsymbol{\Delta_e(\lambda) = \lambda^2 + l_1\lambda + l_2 = \lambda^2 + 8\lambda + 15}$$

obtém-se o ganho do Observador/Estimador: $\boldsymbol{L = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}}$

Matlab Usando a função "*place*" (para observador é "dual" = transpor matriz):

```
A=[0 1;0 0],C=[1 0]
if rank(obsv(A,C)) == size(A,1)  % Garante observabilidade!
  disp('Autovalores do erro de estimação:')
  p=[-3  -5]
  disp('Ganho L do Observador/Estimador de estados:')
  L=place(A',C',p)'
end
```

Resposta Temporal do Observador e Sistema



Hubble – Observador de Estados?

Matlab Um *script* simulando a convergência das variáveis de estado estimados pelo observador/estimador para as variáveis de estado do sistema "real" (supondo que as variáveis de estado fossem realmente medidas)

```
clc; close all; clear
A=[0 1;0 0],C=[1 0],
%Projeto do ganho L do Observador de estados:
if rank(obsv(A,C)) == size(A,1)  % Garante observabilidade!
disp('Autovalores do erro de estimação:')
p=[-3 -5]
L=place(A',C',p)'
end
```

Matlab – Observador de Estados?

```
% Definir o sistema na forma de espaço de estados.
% Note que a saída do sistema é o próprio vetor de estados.
sys=ss(A-L*C,zeros(2,1),eye(2), zeros(2,1));

%Definir um tempo de simulação.
t = 0:0.01:6;
%Definir um vetor de entradas zero
u = zeros(1,length(t));
%Definir a condição inicial do erro
e0=[-2;2];

%Simular a dinâmica do erro de estimação
e = lsim(sys,u,t,e0);
```

Matlab – Observador de Estados?

```
%  Escreva o sistema e a dinâmica do observador juntos
%  \dot{x}(t) = A x(t) + Bu(t)
%  \dot{\hat{x}}(t) = (A-LC) \hat{x}(t) + LC x(t) + Bu(t)
t0 = 0; tfinal=6; x0=[e0;0;0];
Aa=[A zeros(size(A));L*C (A-L*C)];
u=0*t;    % Sinal de entrada (nulo)
sys=ss(Aa,zeros(4,1),eye(4),0);
x=lsim(sys,u,t,x0);

figure(1), subplot(2,1,1), hold on,
plot(t,x(:,1),'b','linewidth',1.5); hold on,
plot(t,x(:,3),'r--','linewidth',1.5);
subplot(2,1,2),
plot(t,x(:,2),'b','linewidth',1.5); hold on
plot(t,x(:,4),'r--','linewidth',1.5);
```

Controle Baseado no Observador

Para o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{cases}$$

▷ Se (A,B) é controlável, então pode-se alocar os autovalores de $(A - BK)$ de forma arbitrária via a realimentação de estados: $u(t) = -Kx(t)$

▷ Se nem todas as variáveis de estados estão disponíveis (i.e., são medidas), então é necessário estimá-las via observador de estados

▷ Se (A,C) é observável, então um observador de estados com ganho L pode ser projetado, tal que os autovalores da dinâmica do erro de estimação são alocados de forma arbitrária via $(A - LC)$

Realimentação a partir de Estados Estimados?

▷ Relembrando, o estimador de estados é dado da forma:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$$

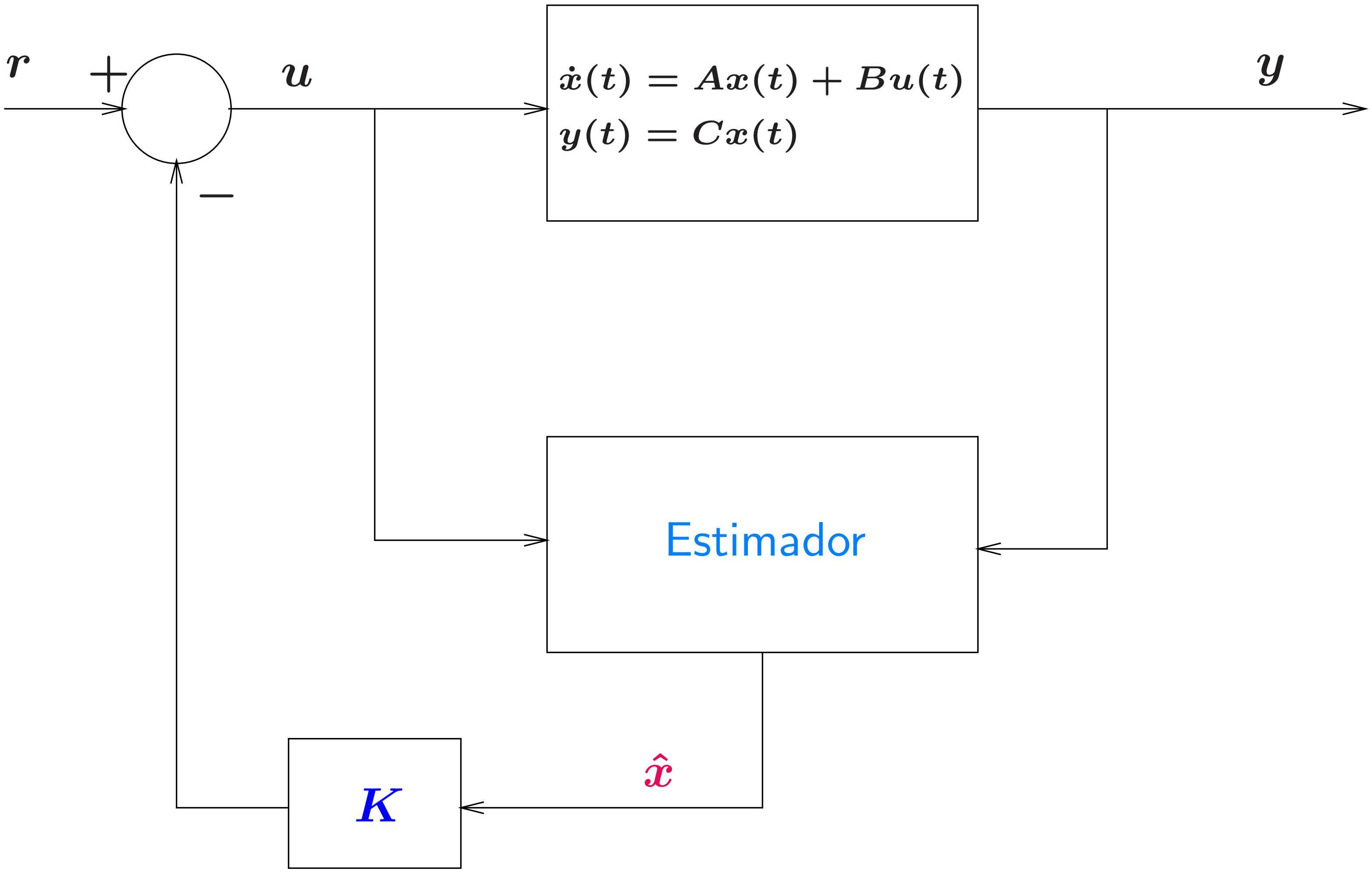
A escolha de L determina a velocidade com que o estado estimado $\hat{x}$ aproxima-se do estado do sistema via os autovalores de $(A - LC)$

▷ Ao realimentar o sistema com os estados estimados tem-se:

$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

e, portanto, cabe a pergunta: **Os autovalores de $(A - BK)$ e de $(A - LC)$ se alteram devido a realimentação?**

Realimentação a partir de Estados Estimados?



Controle Baseado no Observador

Note que para $u(t) = -K\hat{x}(t)$, pode-se escrever:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t)$$

Como o erro de estimação é $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, então de $\hat{x}(t) = x(t) - e(t)$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK(x(t) - e(t)) = (A - BK)x(t) + BKe(t)$$

Da equação acima e do erro de estimação: $\dot{e}(t) = (A - LC)e(t)$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ \mathbf{0} & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

▷ **Princípio da Separação:** o cálculo do ganho do observador L e da realimentação K podem ser feitos de forma independente. Como **os autovalores da matriz acima é a união dos autovalores** de $(A - BK)$ e $(A - LC)$, **a conexão não irá alterar os seus autovalores**

Hubble - Controle Baseado no Observador

Considere novamente o modelo do telescópio Hubble

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) \end{cases}$$

sendo que apenas a posição angular (x_1) é medida

▷ Neste caso é preciso projetar um Controlador baseado no Observador, em outras palavras, é preciso obter K (ganho da lei de controle por realimentação) e também o ganho do Observador dado por L

▷ Note que já avaliamos anteriormente que **o modelo do Hubble é controlável e observável**, então pode-se concluir que é possível computar K e L

Hubble - Controle Baseado no Observador

▷ Na aula 21 (páginas 19 à 21), projetou-se a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$, tal que o ganho de realimentação alocasse autovalores em malha fechada em $-0.707 \pm j0.707$. Neste caso, o ganho calculado é:

$$K = \begin{bmatrix} 0.9997 & 1.4140 \end{bmatrix}$$

▷ Nesta aula, nas páginas 11 à 13, foram escolhidos autovalores para a dinâmica do erro de estimação em -3 e -5, e obteve-se o ganho do Observador dado por:

$$L = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

▷ Note que a equação do Observador, para $u(t) = -K\hat{x}$, é dada por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) = (A - BK - LC)\hat{x}(t) + Ly(t)$$

Hubble - Controle Baseado no Observador

▷ Então o Controle Baseado no Observador: Lei de Controle + Observador, é:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{(A - BK - LC)}_{A_C} \hat{x}(t) + \underbrace{L}_{B_C} y(t) \\ u(t) = -\underbrace{K}_{C_C} \hat{x}(t) \end{cases}$$

Substituindo os valores de A, B, C, L e K, obtém-se

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -15.9997 & -1.4140 \end{bmatrix}}_{A_C} \hat{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}}_{B_C = L} y(t) \\ u(t) = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0.9997 & 1.4140 \end{bmatrix}}_{C_C = K} \hat{x}(t) \end{cases}$$

Hubble - Controle Baseado no Observador

▷ Por curiosidade, pode-se obter a Função de Transferência do Controlador baseado no Observador descrito em espaço de estados ao se aplicar a Transformada de Laplace com condições iniciais nulas:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = G_c(s) = C_C\,(s\mathbf{I} - A_C)^{-1}\,B_C$$

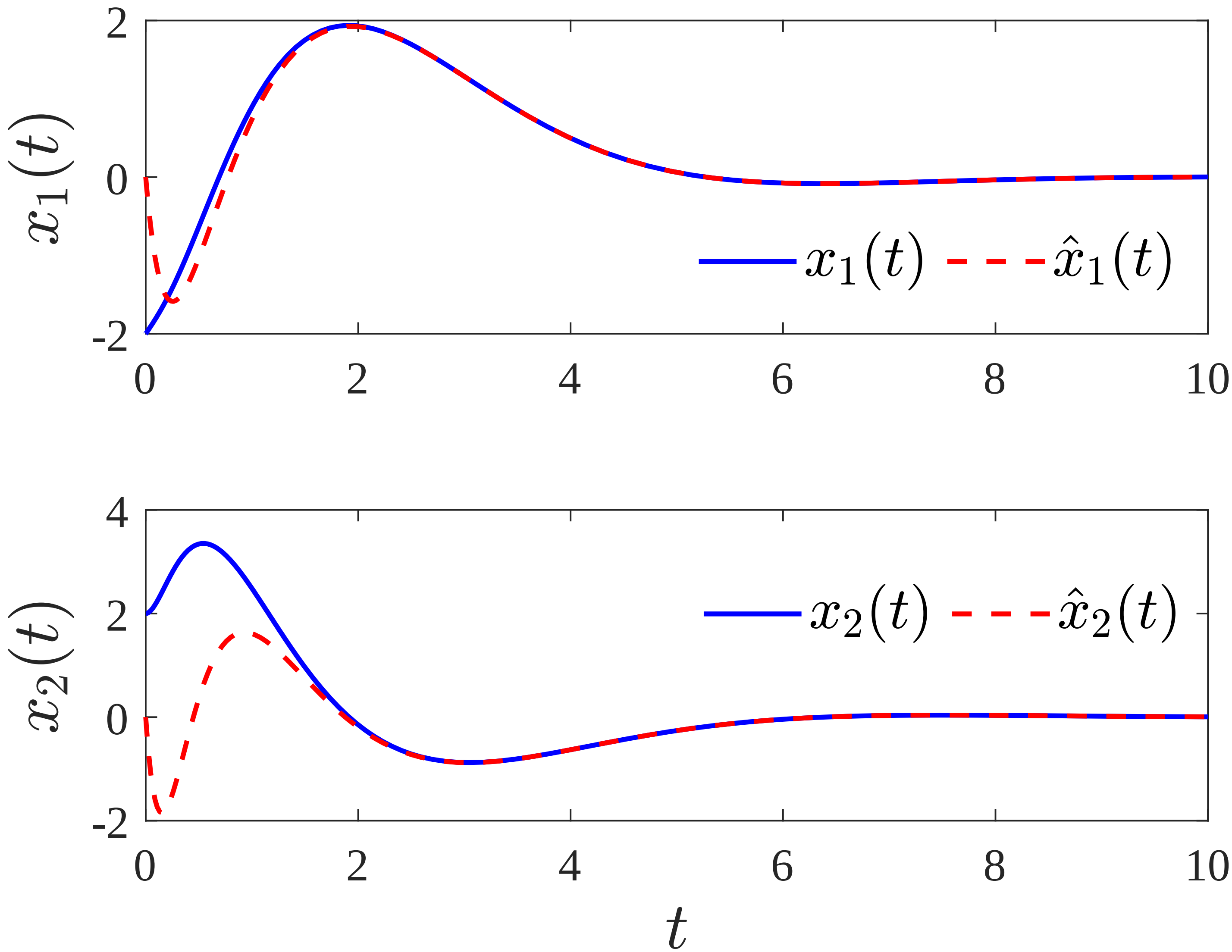
Em outras palavras, ao substituir as matrizes A_C, B_C, C_C do controlador em espaço de estados obtém-se um controlador de 2a. ordem:

$$G_c(s) = 29.208\,\frac{s + 0.5134}{s^2 + 9.414s + 27.31}$$

com polos em $-4.7070 \pm j2.2706$ **(Você projetaria um controlador assim?)**

▷ Note que os autovalores da matriz A_C do Controlador baseado no Observador são dados também por $-4.7070 \pm j2.2706$, i.e., iguais aos polos de $G_c(s)$

Resposta temporal com o Controlador dinâmico



Matlab - Controle Baseado no Observador

Matlab Um *script* para o projeto do Controle baseado no Observador

```
clc;  clear all
A=[0 1;0 0], B=[0; 1], C=[1 0]
if rank(ctrb(A,B)) == size(A,1) % Garante controlabilidade!
disp('Autovalores para o ganho de realimentação:')
p=[-0.707+j*0.707 -0.707-j*0.707];
disp('Ganho K do controlador:')
K=place(A,B,p)
end
if rank(obsv(A,C)) == size(A,1) % Garante observabilidade!
disp('Autovalores do erro de estimação:')
p=[-3 -5]
disp('Ganho L do Observador/Estimador de estados:')
L=place(A',C',p)'
end
```

Matlab - Controle Baseado no Observador

```
% Matrizes do Controlador dinâmico baseado no Observador
Ac=A-B*K-L*C;   Bc=L;   Cc=K;

% Controlador dinâmico em espaço de estados
Controlador = ss(Ac,Bc,Cc,[ ])

% Curiosidade: Função de Transferência do Controlador dinâmico
FT_controlador = zpk(tf(Controlador))
```

Matalb - Controle Baseado no Observador

```
%  Simulação temporal em malha fechada. Sistema aumentado:
%   x_{\dot}(t) = A x(t)-BK\hat{x}(t) + Bu(t)
%   \dot{\hat{x}}(t) = LCx(t)+(A-LC-BK)\hat{x} + Bu(t)
%   y = [C 0][x(t);\hat{x}(t)]
Aa = [A -B*K; L*C A-L*C-B*K]; Ba = [B;B]; Ca = [C zeros(size(C))];
t=0:0.01:10;     % Tempo da simulaçao
u=0*t;           % Sinal de entrada (nulo)
x0=[-2;2;0;0]; % Condiçoes iniciais
malha_fechada=ss(Aa,Ba,eye(4),0);
x=lsim(malha_fechada,u,t,x0);

figure(1), hold on
subplot(2,1,1), plot(t,x(:,1),'b','linewidth',1.5); hold on
plot(t,x(:,3),'r--','linewidth',1.5);
subplot(2,1,2), plot(t,x(:,2),'b','linewidth',1.5); hold on
plot(t,x(:,4),'r--','linewidth',1.5);
```

Rastreamento de Referência via Controle Integral

▷ Caso se deseje que a saída siga uma referência constante (degrau), tal que a realimentação de estado garanta que: $y(t) \to r(t)$, pode-se definir uma **ação integrativa**, tal que o controlador force que uma variável de estado específica rastrei/siga a entrada de referência $r(t)$ e o seu efeito apareça na saída

▷ A ideia é criar uma variável de estado "adicional" $x_i(t)$ que integra a diferença entre a referência e uma variável de estado. Ao se ter estabilidade, então $x_i \to 0$, $t \to \infty$ e a diferença entre a entrada e a variável de estado tende a zero. Isto é:

$$x_i(t) = \int [r(t) - x_\kappa(t)]\, dt$$

sendo x_κ uma variável de estado para a qual se deseja que siga a entrada de referência $r(t)$ e apareça na saída através da relação $y(t) = Cx(t)$

▷ Note que a expressão acima pode ser reescrita na forma diferencial:

$$\dot{x}_i(t) = r(t) - x_\kappa(t)$$

Hubble – Rastreamento de Referência

▷ **Vamos exemplificar**... Considere novamente o modelo do telescópio Hubble. Pretende-se comandá-lo tal que o telescópio se mantenha em uma nova posição angular x_1 desejada, isto é, x_1 deve seguir/rastrear uma referência $r(t)$ que é uma entrada degrau tal que: $x_1(t) \to r(t)$

▷ Neste caso, defina um estado "adicional" $x_i(t) = \int [r(t) - x_1(t)]\, dt$, que ao se garantir estabilidade $x_i \to 0$, $t \to \infty$ e então $r(t) - x_1(t) \to 0$ ou, em outras palavras: $x_1(t) \to r(t)$. Note que se tem também:

$$\dot{x}_i(t) = r(t) - x_1(t)$$

Define-se um vetor de estado aumentado incluindo o integrador x_i, da forma:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$$

Hubble – Rastreamento de Referência

Então o sistema a ser considerado para o projeto de controle por realimentação é:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_i(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\tilde{x}}(t)} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)} + \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]}_{B_a} u(t) + \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right]}_{R} r(t)$$

$$y(t) = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$$

E a realimentação de estados é escrita da forma (aumentada):

$$u(t) = -\underbrace{\begin{bmatrix} K & k_i \end{bmatrix}}_{=K_a} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$$

Hubble – Rastreamento de Referência

▷ O cálculo do ganho K_a é realizado da mesma forma que anteriormente

▷ Para o sistema em malha fechada do sistema aumentado descrito por:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A_a - B_a K_a)\tilde{x}(t) + R\,r(t)$$

escolhem-se autovalores para $(A_a - B_a K_a)$ com parte real negativa para se ter estabilidade em malha fechada, etc. ($r(t)$ é uma entrada degrau unitário)

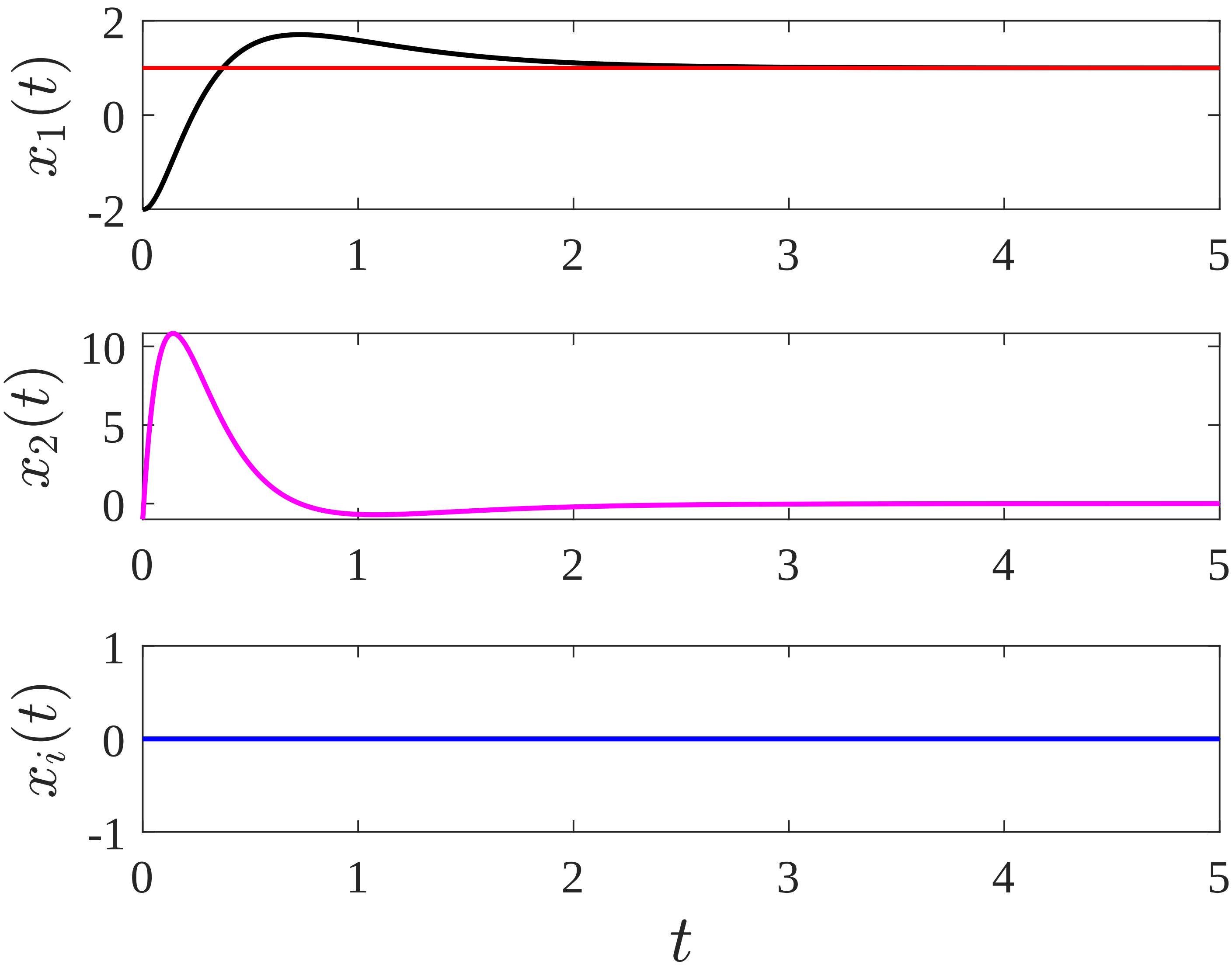
▷ Então, com estabilidade tem-se $x_i \to 0$, $t \to \infty$ e, para este exemplo, $r(t) - x_1(t) \to 0$, ou $x_1 \to r(t)$. Portanto, na saída tem-se, por consequência:

$$y(t) \to x_1(t) \to r(t), \quad \text{(note que por estabilidade: } x_2 \to 0, x_i \to 0)$$

▷ Escolha, por exemplo, autovalores em -2, -4 e -10, e obtém-se

$$K_a = \begin{bmatrix} 68 & 16 & -80 \end{bmatrix}$$

Resposta com Rastreamento $x_1(t) \to r(t) = 1(t)$



Controle Integral - Matlab

Matlab Um *script* para o projeto do controle integral

```
clc; close all; clear
% Sistema aumentado com estado integrativo
Aa=[0 1 0;0 0 0; -1 0 0];
Ba=[0;1;0];
R =[0;0;1];
Ca=[1 0 0;0 1 0; 0 0 0];

% Autovalores em malha fechada
p=[-2 -4 -10]

% Cálculo do ganho de realimentação aumentado
Ka=place(Aa,Ba,p)
```

Controle Integral - Matlab

```
%% Simulação temporal do sistema
x0=[-2;-1;1]; % Condição inicial
t=0:0.01:5;   % Tempo de simulaçao
u=0*t+1;      % Sinal de entrada (degrau)
sys=ss(Aa-Ba*Ka,R,Ca,zeros(3,1));
x=lsim(sys,u,t,x0);

figure(1), hold on,
subplot(3,1,1), plot(t,x(:,1),'k','linewidth',1.5);
plot(t,ones(size(x(:,1),1)),'r','linewidth',1)
subplot(3,1,2), plot(t,x(:,2),'m','linewidth',1.5);
subplot(3,1,3), plot(t,x(:,3),'b','linewidth',1.5);
```