Controle em Espaço de Estados

1. Relembrando o contexto de estabilidade
2. Conceito de Controlabilidade
3. Projeto de controle por realimentação completa de estados
   3.1 Exemplos

Relembrando – Estabilidade no Espaço de Estados

⇝ Considere o sistema autônomo $(\boldsymbol{u} = \mathbf{0})$ da forma:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

Para checar se o sistema é estável, basta calcular os autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$ e avaliar se todos têm parte real negativa

▷ Lembrando que autovalor satisfaz:

$$\boldsymbol{\lambda x} = \boldsymbol{A x}, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$$

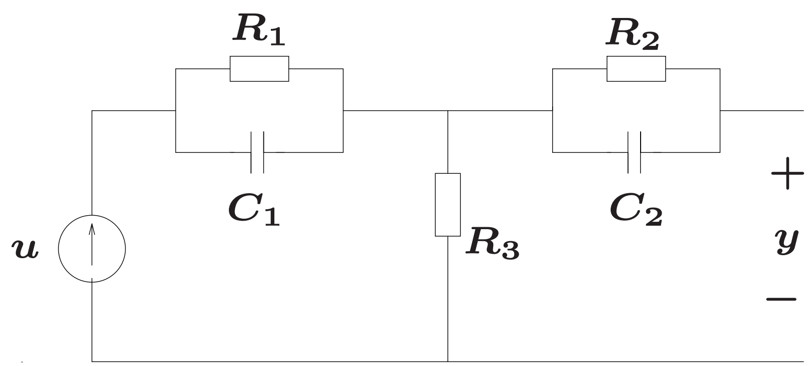
$$\Updownarrow$$

$$(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - A)x = 0 \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - A) \text{ é singular} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - A| = 0$$

Então os autovalores são as raízes do determinante: $|\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$

Controlabilidade – Partindo os motores

Questão: Um estado pode ser "controlado" (ou modificado) a partir da entrada?



Definem-se as variáveis de estado como sendo v_{C_1} e v_{C_2}

▷ Note que a tensão no capacitor C_2 não pode ser alterada (**controlada**) a partir da entrada u pois o circuito está aberto em y

▷ Por outro lado a tensão no capacitor C_1 pode ser modificada (controlada)

▷ Além disso, será que a saída y (que é a tensão em R_3) tem alguma influência?

Controlabilidade

Considere o sistema: $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

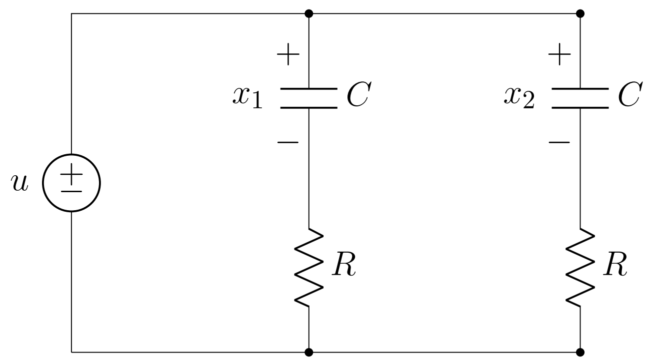
Definição O sistema acima ou o par (A,B) é dito ser controlável se, para qualquer estado inicial $x(0) = x_0$ e para qualquer estado final x_1, existir uma entrada $u(t)$ qualquer que transfere o estado de x_0 para x_1 em tempo finito

▷ A definição requer apenas que se possa mover qualquer estado inicial, no espaço de estados, para qualquer estado final em tempo finito. Não há restrições quanto à trajetória a ser seguida e nem quanto à magnitude da entrada

▷ **A equação de saída $y(t)$ não influencia a controlabilidade**

Controlabilidade – Aquecendo os motores

No circuito abaixo defina: $x_1 = v_{C_1}$ e $x_2 = v_{C_2}$ (considere $C = C_1 = C_2$)



$$\begin{cases} u = x_1 + i_C R = x_1 + RC\dot{x}_1 \\ u = x_2 + i_C R = x_2 + RC\dot{x}_2 \\ \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} u \end{cases}$$

▷ É fácil notar que a partir da entrada $u(t)$, pode-se alterar $x_1(t)$ ou $x_2(t)$ (um ou outro) tal que atinjam qualquer estado final arbitrário

▷ No entanto, não é possível alterar x_1 e x_2 (ambos) para qualquer estado final arbitrário devido a simetria. E.g., se $x_1(0) = x_2(0) = 0$, independentemente da entrada $u(t)$ que for aplicada, sempre tem-se $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \geq 0$

▷ O circuito é não controlável

Como checar se um sistema é controlável?

Para o sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

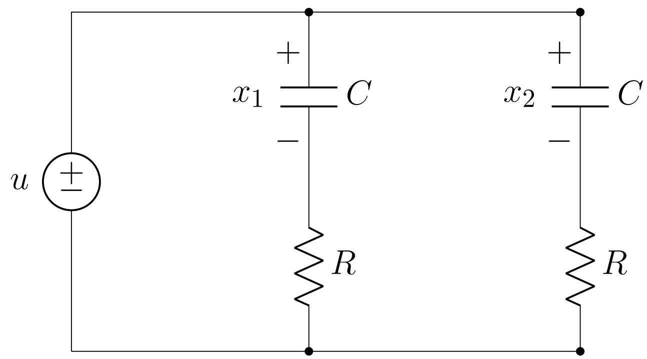
pode-se determinar se o sistema é controlável (ou o par (A,B) é controlável) construindo a matriz de Controlabilidade $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ da forma:

$$\mathcal{C} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array} \right]$$

e checar se a matriz $\mathcal{C}$ tem posto/*rank* completo de linhas igual a n

⇝ Para sistemas SISO, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e a matriz de Controlabilidade $\mathcal{C}$ é uma matriz quadrada $(n \times n)$. Neste caso, para checar se o sistema é controlável basta checar se posto$(\mathcal{C}) = n$ ou, em outras palavras, se $\mathcal{C}$ é invertível (que é equivalente a checar se o determinante de $\mathcal{C}$ é não nulo)

Retornado ao exemplo do circuito:



$$\begin{cases} u = x_1 + i_C R = x_1 + RC\dot{x}_1 \\ u = x_2 + i_C R = x_2 + RC\dot{x}_2 \\ \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{B} u \end{cases}$$

Matriz de Controlabilidade sendo que $n = 2$ (dimensão do vetor de estados x):

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{1}{(RC)^2} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{(RC)^2} \end{bmatrix}, \text{ posto}(\mathcal{C}) = 1 \neq n \ \ (\text{e } \det(\mathcal{C}) = 0)$$

- ▷ É não controlável

Controlabilidade

Exemplo Considere o modelo de um sistema da forma ($n = 4$):

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Matriz de Controlabilidade: $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$

Controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}, \text{posto}(\mathcal{C}) = 4 = n \implies \text{Sistema controlável}$$

Matlab `C=ctrb(A,B)` retorna a matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$. Um *script*:

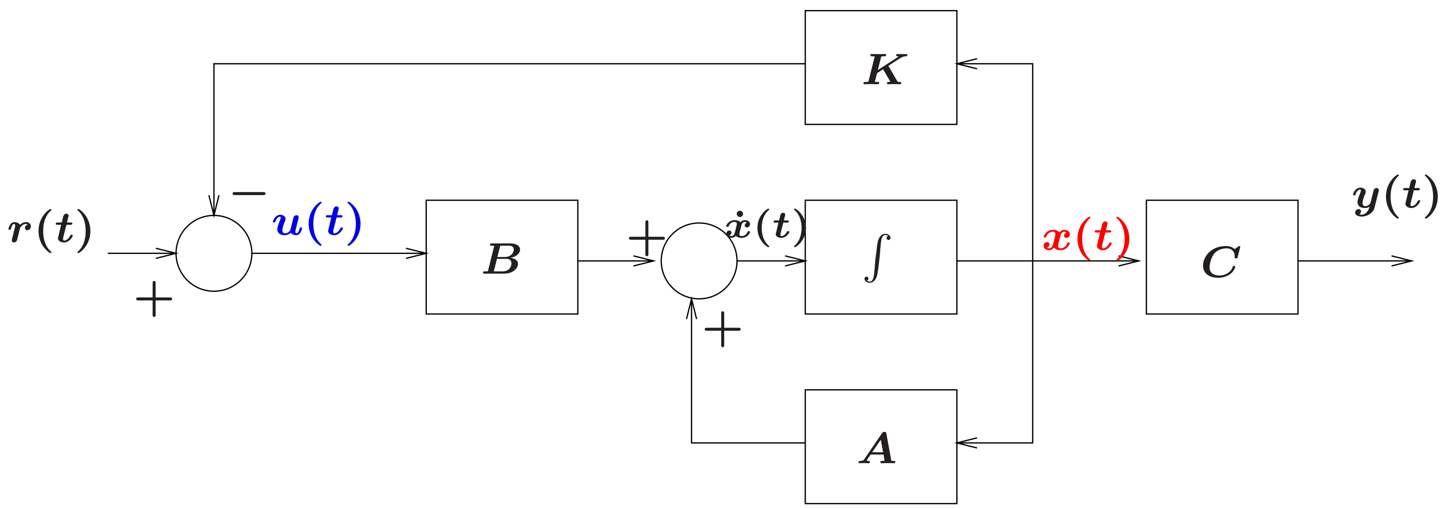
```
A=[0 1 0 0;0 0 -1 0;0 0 0 1;0 0 5 0]; B=[0 1 0 -2]';
if rank(ctrb(A,B)) == size(A,1)
 disp('Sistema Controlável')
 else disp('Sistema não Controlável')
end
```

Controle por Realimentação de Estados

Considere o sistema n dimensional e SISO (uma entrada e uma saída):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{cases}$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ e $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Para realimentação negativa dos estados $x(t)$, com $u(t) = -Kx(t) + r(t)$, tem-se:



Controle por Realimentação de Estados

Como o sistema é SISO e considerando que o sinal de referência é nulo $(r(t) = 0)$, então a entrada de controle $u(t)$ é dada por:

$$u(t) = -Kx(t) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} x$$

isto é, $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Ao substituir $u(t)$ no sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ou, em outras palavras, ao fechar a malha, tem-se:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)\, x(t) = \widetilde{A}\, x(t)$$

sendo $\widetilde{A} = A - BK$ a matriz do sistema em malha fechada

▷ Então é claro que o sistema em malha fechada é estável se todos os autovalores de $\widetilde{A} = A - BK$ têm parte real negativa

Controle por Realimentação de Estados

▷ Note então que a equação característica associada à malha fechada com $\widetilde{A} = A - BK$, e que calcula os autovalores, é obtida do determinante:

$$|\lambda \mathbf{I} - (A - BK)| = 0$$

▷ Lembrando que se todos os autovalores de $A - BK$ têm parte real negativa, para qualquer condição inicial $x(0)$, a resposta do sistema em malha fechada $\dot{x}(t) = (A - BK)\,x(t)$ satisfaz:

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0) \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty$$

▷ Qual é a ideia? Selecionar (alocar) autovalores em malha fechada que satisfaçam especificações de projeto e, na sequência, forçar que estes autovalores satisfaçam $|\lambda \mathbf{I} - (A - BK)| = 0$, **sendo o ganho K uma incógnita**

Uma "Receita" de Bolo para Projeto "à mão"

Exemplo Considere $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$

Note que como os autovalores de A são $\{-2; 4\}$, então o sistema em malha aberta é instável (malha aberta significa que $u = 0$)

▷ O problema de controle se resume a obter a lei de controle por realimentação de estados ($u(t) = -Kx(t)$) que garanta estabilidade em malha fechada...

▷ Como garantir que existe $u(t)$ que torna o sistema em malha fechada estável? É preciso avaliar se o sistema é controlável. Note que a matriz de Controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

tem posto $2 = n$ e, portanto, o sistema é controlável

Uma "Receita" de Bolo para Projeto "à mão"

- Realimentado os estados: $u(t) = -Kx(t) = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} x(t)$, tem-se $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$, ou

$$\dot{x}(t) = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=B} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}}_{=K} \right) x(t) = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 3 - k_2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

E o polinômio característico em malha fechada é:

$$\Delta_f(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - (A - BK)| = \lambda^2 + (k_1 - 2)\lambda + (3k_2 - k_1 - 8)$$

▷ Ao se escolher k_1 e k_2 de forma apropriada, pode-se alocar os autovalores do sistema em malha fechada em qualquer posição arbitrária!

Uma “Receita” de Bolo para Projeto “à mão”

▷ Como obter $\boldsymbol{K}$? Neste projeto deve-se garantir estabilidade. Force, por exemplo, que os autovalores em malha fechada sejam: $\mathbf{-1}$ e $\mathbf{-3}$ (para se ter estabilidade). Neste caso, o polinômio característico em malha fechada é dado por:

$$\boldsymbol{\Delta_f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 4\lambda + 3}$$

Ao se igualar os polinômios característicos em malha fechada $\boldsymbol{\Delta_f}$, da forma:

$$\boldsymbol{\Delta_f(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = \lambda^2 + \underbrace{(k_1 - 2)}_{=4}\lambda + \underbrace{(3k_2 - k_1 - 8)}_{=3}}$$

igualam-se também os coeficientes nas respectivas potências em $\boldsymbol{\lambda}$ para se obter $\boldsymbol{k_1}$ e $\boldsymbol{k_2}$

Uma “Receita” de Bolo para Projeto “à mão”

Então basta resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} k_1 - 2 & = & 4 \\ 3k_2 - k_1 - 8 & = & 3 \end{cases}$$

e obtém-se $k_1 = 6$ e $k_2 = 5.6667$ ou, em outras palavras, o ganho de realimentação de estados é dado por:

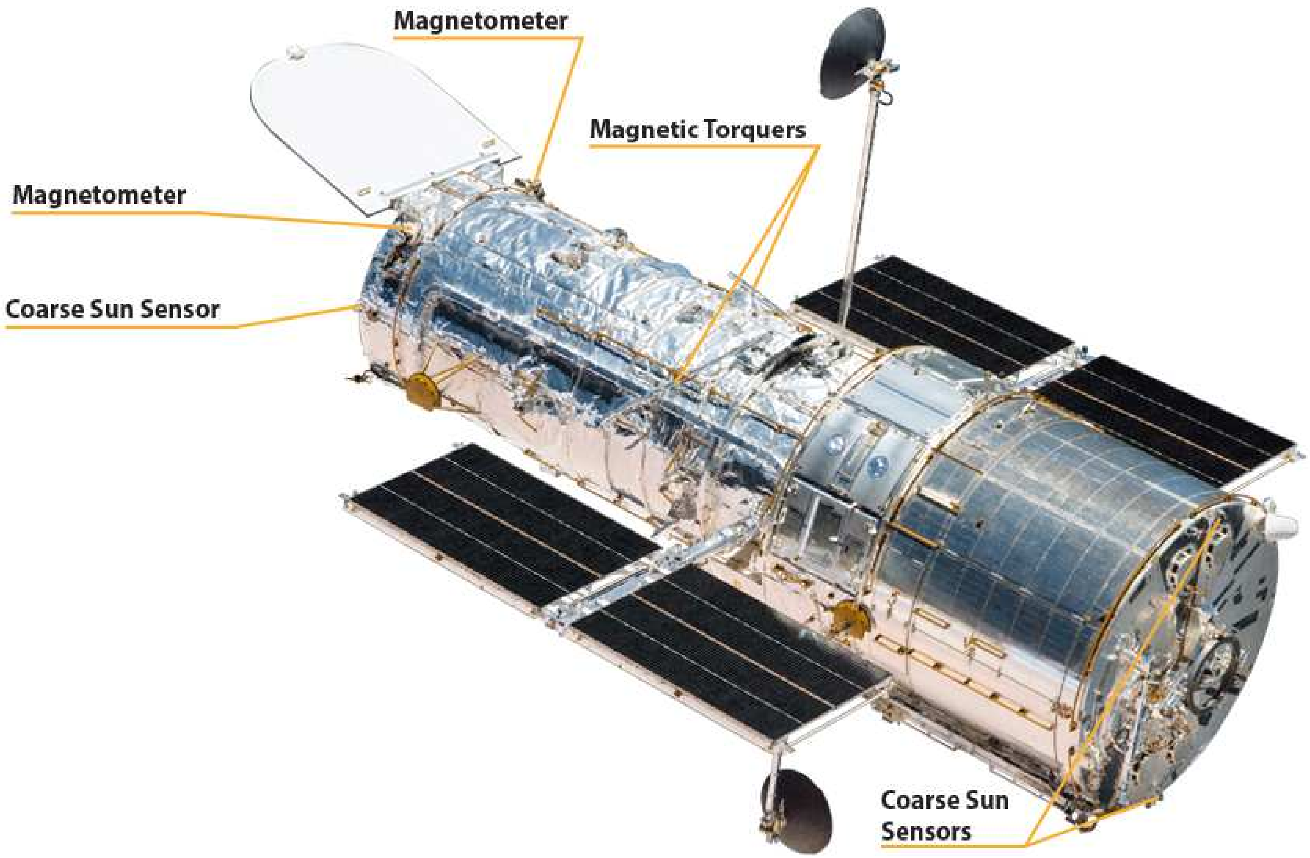
$$K = \begin{bmatrix} 6 & 5.6667 \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que os autovalores de $A - BK$ são, de fato, -1 e -3:

```
% Usando Matlab
A=[1 3 ; 3 1];B=[1; 0]; K=[6  5.6667];
eig(A-B*K)  % calcula os autovalores em malha fechada
```

Exemplo – Hubble

Retornemos ao modelo do telescópio Hubble apresentado na Aula 5



Exemplo – Hubble

A FT do telescópio Humble é $G(s) = 1/s^2$, i.e., $\ddot{y}(t) = u(t)$. Definindo-se:

$$x_1 = y \ \ \text{(posição angular)}; \qquad x_2 = \dot{y} \ \ \text{(velocidade angular)}$$

tal que

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{e} \quad \dot{x}_2 = \ddot{y} = u$$

então tem-se o modelo em espaço de estados:

$$\dot{x}(t) \;=\; \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

Suponha que **as variáveis de estado são mensuráveis, i.e., as medidas da posição e velocidade angulares estão disponíveis para realimentação**

Exemplo – Hubble

▷ Note que os autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$ são iguais a zero. Portanto o sistema em malha aberta é instável...

▷ É um sistema controlável? Note que a matriz de Controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

tem posto $\mathbf{2}$ (determinante não nulo) e, portanto, o sistema é controlável

▷ Para este projeto a ideia é que o controle por realimentação de estados aloque os autovalores em malha fechada em:

$$\boldsymbol{\lambda_{1,2} = -0.707 \pm j0.707}$$

isto é, autovalores com parte real negativa para que o sistema em malha fechada seja estável

Exemplo – Hubble

▷ Ao realimentar a planta

$$\dot{x}(t) = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=B} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}}_{=K} \right) x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} x(t)$$

obtém-se o polinômio característico em malha fechada:

$$\Delta_f(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - (A - BK)| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ k_1 & \lambda + k_2 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + k_2\lambda + k_1$$

▷ Além disso, para os autovalores em malha fechada em $-0.707 \pm j0.707$, tem-se também o polinômio característico em malha fechada:

$$\Delta_f(\lambda) = (\lambda + 0.707 + j0.707)(\lambda + 0.707 - j0.707) = \lambda^2 + 1.414\lambda + 0.9997$$

Exemplo – Hubble

Ao igualar os polinômios característicos em malha fechada Δ_f:

$$\Delta_f(\lambda) = \lambda^2 + 1.4140\lambda + 0.9997 = \lambda^2 + k_2\lambda + k_1$$

obtém-se: $K = \begin{bmatrix} 0.9997 & 1.4140 \end{bmatrix}$

Matlab Um *script* usando a função "*place*" (esta função pode ser usada para sistemas de qualquer dimensão, e também para sistemas MIMO ou SISO):

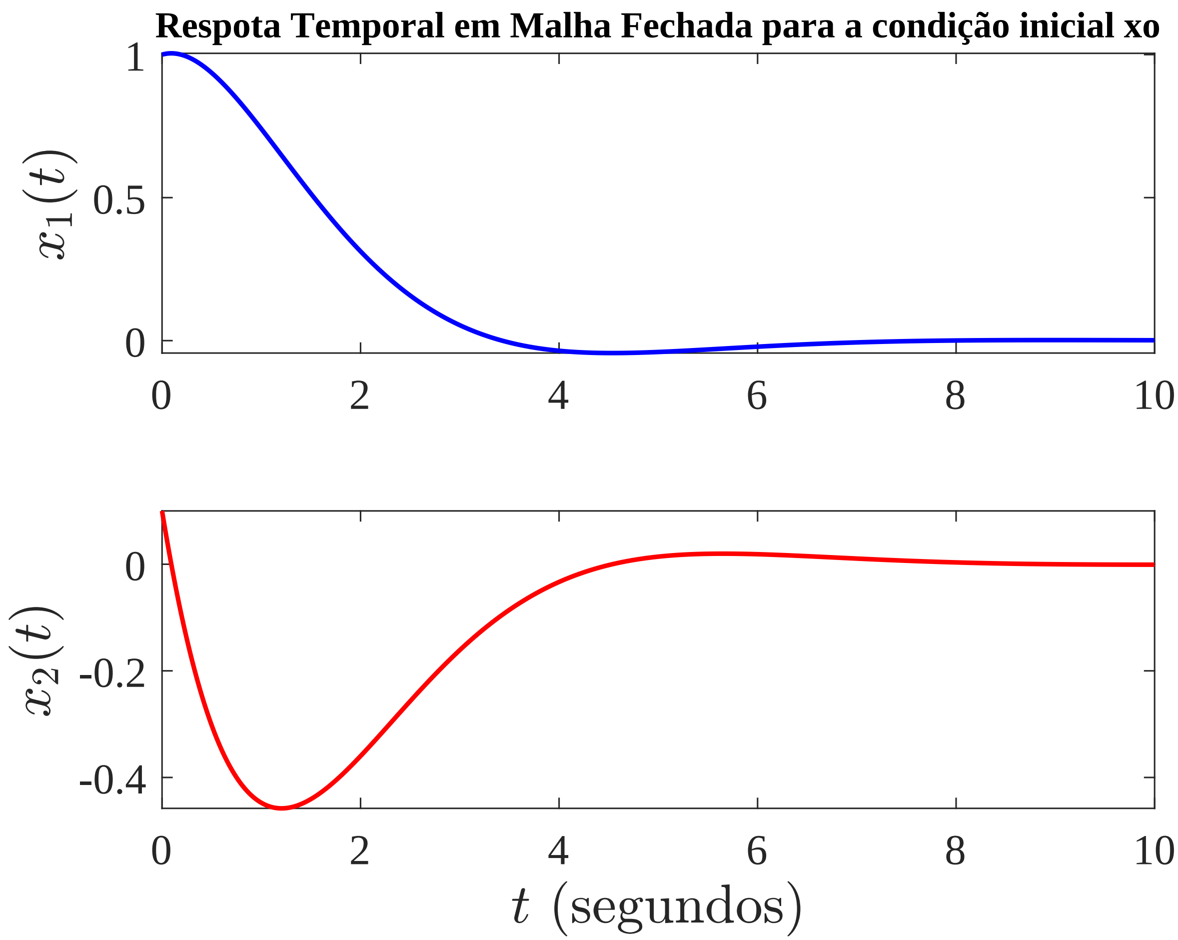
```
A=[0 1;0 0],B=[0; 1]
if rank(ctrb(A,B)) == size(A,1)   % Garante controlabilidade!
  disp('Autovalores em malha fechada:')
  p=[-0.707+j*0.707 -0.707-j*0.707]
  disp('Ganho K de realimentação de estados:')
  K=place(A,B,p)
end
```

Exemplo – Hubble

Matlab Um *script* simulando a resposta temporal em malha fechada:

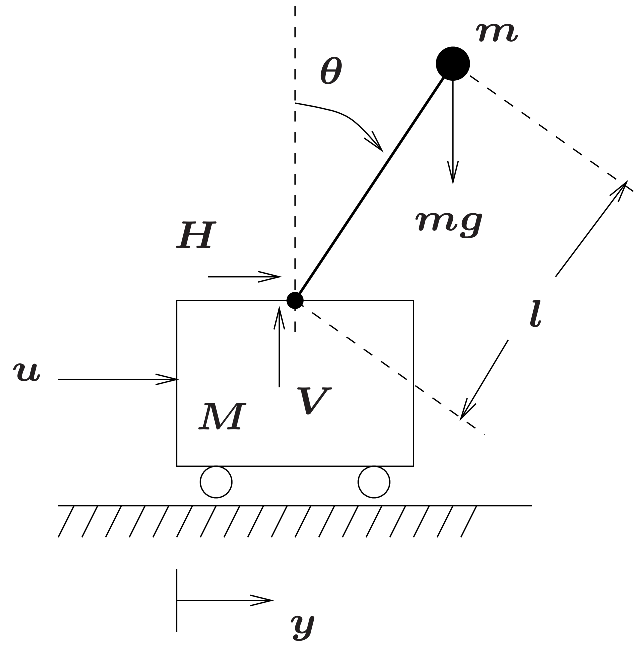
```
A=[0 1;0 0],B=[0; 1]
% Autovalores em malha fechada
p=[-0.707+j*0.707 -0.707-j*0.707];
% Projeto do ganho de realimentação de estados
K=place(A,B,p)
% Malha fechada considerando todos os estados medidos, i.e. C=I
sistema=ss(A-B*K,[],eye(2),[])
% condição inicial (deslocamento e velocidade angulares)
xo=[1;0.1];
% Resposta temporal em malha fechada para a condição inicial xo
initial(sistema,xo)
```

Exemplo – Hubble



Exemplo – Pêndulo invertido sobre um carrinho

Retornemos ao pêndulo invertido sobre um carrinho visto na Aula 6 (pág. 20):



E cujo modelo "global" obtido é dado pelas equações diferencias:

$$\begin{cases} (M+m)\,\ddot{y} + ml\ddot{\theta} & = & u \\ l\ddot{\theta} + \ddot{y} - g\theta & = & 0 \end{cases}$$

Exemplo – Pêndulo invertido sobre um carrinho

▷ Por curiosidade, na pág. 25 da aula 6, ao aplicar a transformada de Laplace (com condições iniciais nulas) nas equações diferenciais obteve-se:

$$\begin{cases} (M+m)\,s^2Y(s)+mls^2\Theta(s) & = & U(s) \\ \left(ls^2-g\right)\Theta(s)+s^2Y(s) & = & 0 \end{cases}$$

A FT da entrada u para o deslocamento y do carrinho é dada por:

$$G_{yu}(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{ls^2-g}{s^2\Big[(M+m)ls^2-g(M+m)\Big]}$$

E a FT da entrada u para o deslocamento angular θ da haste é:

$$G_{\theta u}(s)=\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{-1}{(M+m)ls^2-g(M+m)}$$

que é instável

Pêndulo invertido sobre um carrinho

Vamos obter uma representação em espaço de estados. Note que da relação no modelo "global" dado por $l\ddot{\theta} + \ddot{y} - g\theta = 0$, pode-se isolar $\ddot{y}$:

$$\ddot{y} = g\theta - l\ddot{\theta}$$

que, substituído em $(M+m)\,\ddot{y} + ml\ddot{\theta} = u$, gera:

$$(M+m)(g\theta - l\ddot{\theta}) + ml\ddot{\theta} = u$$

$$Mg\theta - Ml\ddot{\theta} + mg\theta - \cancel{ml\ddot{\theta}} + \cancel{ml\ddot{\theta}} = u$$

Logo pode-se escrever a equação diferencial:

$$-Ml\ddot{\theta} + (M+m)g\theta = u \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{Ml}\,\theta - \frac{1}{Ml}\,u}$$

Pêndulo invertido sobre um carrinho

Note novamente que de $l\ddot{\theta} + \ddot{y} - g\theta = 0$, pode-se isolar $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\theta - \frac{1}{l}\ddot{y}$$

que, substituído em $(M + m)\,\ddot{y} + ml\ddot{\theta} = u$, gera:

$$(M + m)\ddot{y} + ml\left(\frac{g}{l}\theta - \frac{1}{l}\ddot{y}\right) = u$$

$$M\ddot{y} + \cancel{m\ddot{y}} + \frac{mlg}{l}\theta - \cancel{\frac{ml}{l}\ddot{y}} = u$$

Ou, em outras palavras, obtém-se uma segunda equação diferencial:

$$M\ddot{y} + mg\theta = u \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u}$$

Pêndulo invertido sobre um carrinho

Definindo como variáveis de estado: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$. Então:

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\frac{mg}{M}\,x_3 + \frac{1}{M}\,u$$
$$\dot{x}_3 = \dot{\theta} = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \ddot{\theta} = \frac{(M+m)g}{Ml}\,x_3 - \frac{1}{Ml}\,u$$

Que gera o modelo em espaço de estados de 4a. ordem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix}}_{B} u$$

Pêndulo invertido sobre um carrinho

- Neste exemplo vamos considerar que os parâmetros do sistema são dados por
  - M – massa do carrinho $2kg$
  - m – massa do pêndulo $1kg$
  - g – aceleração da gravidade $9.8m/s^2$
  - l – comprimento em relação ao centro de massa do pêndulo $0.5m$
- Além disso, vamos supor que todas as variáveis de estado são medidas sendo:

$$y(t) = Cx(t) = \mathbf{I}\, x(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C=\mathbf{I}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

O sistema em malha aberta é estável?

- Para checar se o sistema em malha aberta é estável, basta calcular os autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$ e avaliar se todos têm parte real negativa

Os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são:

$$\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{5.4222} \quad \mathbf{-5.4222}$$

Claramente o sistema em malha aberta é instável

Pêndulo invertido sobre um carrinho

- O sistema é controlável? Para tanto monta-se a matriz de Controlabilidade dada por

$$\mathcal{C} = \left[\begin{array}{cccc} B & AB & A^2B & A^3B \end{array}\right]$$

Ou, em outras palavras:

$$\mathcal{C} = \left[\begin{array}{rrrr} 0 & 0.5 & 0 & 4.9 \\ 0.5 & 0 & 4.9 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -29.4 \\ -1 & 0 & -29.4 & 0 \end{array}\right], \text{posto}(\mathcal{C}) = 4 = n \implies \text{Sistema controlável}$$

Pêndulo invertido sobre um carrinho

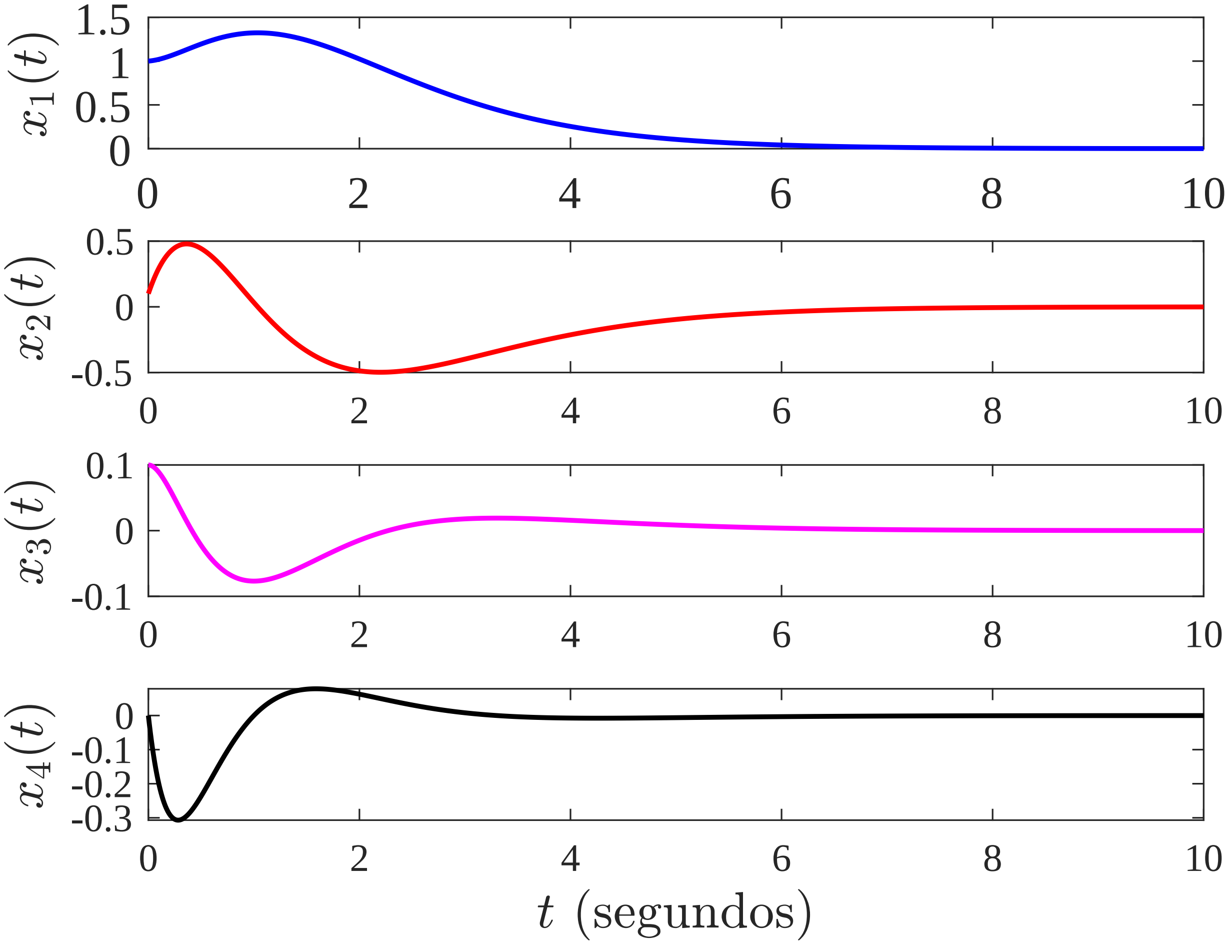
- Como o sistema é controlável, então é possível alocar de forma arbitrária os autovalores de $A - BK$, de tal forma que o sistema em malha fechada seja estável via realimentação de estados com a lei de controle:

$$u(t) = -Kx(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} x(t)$$

- Vamos escolher como autovalores em malha fechada: -1, -1.5, -2 e -2.5
- Neste caso, o ganho de realimentação é dado por:

$$K = \begin{bmatrix} -0.7653 & -1.9643 & -47.5327 & -7.9821 \end{bmatrix}$$

Resposta Temporal em Malha Fechada



Matlab

```
M = 2;          % massa do carrinho
m = 1;          % massa do pêndulo
g = 9.8;        % aceleração da gravidade
l = 0.5;        % comprimento da haste

A = [0 1 0 0;
    0 0 -m*g/M 0;
    0 0 0 1;
    0 0 ((M+m)*g)/(M*l) 0];
B = [0; 1/M; 0; -1/(M*l)];

%Checando estabilidade em malha aberta
if all(real(eig(A)) < 0), disp('Sistema em malha aberta estável')
   else, disp('Sistema em malha aberta instável')
end
```

Matlab

```
% Sistema ontrolável? Construa a matriz de Controlabilidade
Co = ctrb(A,B);

% Cheque se posto(Co) = n, para se ter controlabilidade
if rank(Co) == size(A,1), disp('O sistema é controlável')
   else, disp('O sistema não é controlável. Aborte!'), return
end

% Defina os autovalores em malha fechada desejados
p=[-1;-1.5; -2;-2.5];

% Compute o ganho de realimentação de estados
K = place(A,B,p)
```

Matlab

```
% Escreva o sistema em malha fechada
sistema=ss(A-B*K,zeros(4,1),eye(4),[]);

%Defina o tempo de simulação
t = 0:0.01:10;

%Defina a entrada nula
u = zeros(1,length(t));

%Defina  uma condição inicial
x0=[1;0.1;0.1;0];

%Resposta temporal - simulador linear
lsim(sistema,u,t,x0)
```