Sistemas a Tempo Discreto - Projeto

1. Projeto via Emulação

   1.1 Controladores Equivalentes Discretos

   1.2 Mapeamento polo-zero

   1.3 Avaliação do projeto

2. Especificações de Projeto diretamente no domínio discreto

3. Lugar das Raízes no domínio-$\mathcal{Z}$

   3.1 Exemplo de projeto - Fly-by-Wire

Projeto via Emulação

- É a aproximação a tempo discreto de um controlador a tempo contínuo $G_c(s)$ que já foi projetado e que atende as especificações de projeto (Uma estratégia específica para o controlador PID foi apresentada na aula 19)

- Embora facilmente obtida, a aproximação do controlador a tempo discreto descrito por $D(z)$ pode degradar as especificações temporais quando comparado ao controlador a tempo contínuo $G_c(s)$

- A qualidade da aproximação está vinculada ao período de amostragem T (quanto menor T, melhor pode ser a aproximação) e também à qualidade do projeto de controle a tempo contínuo

Projeto via Emulação

Mapeamento de polos e zeros

Polos: Os polos do controlador $G_c(s)$ são mapeados usando $z = e^{sT}$

- Se $G_c(s)$ possui um polo em $s = -a$, então $D(z)$ terá um polo em $z = e^{-aT}$

- Se $G_c(s)$ tem um polo em $s = -a + jb$, então $D(z)$ terá um polo em $re^{j\theta}$, sendo $r = e^{-aT}$ e $\theta = bT$

Zeros finitos: Zeros finitos de $G_c(s)$ são mapeados em zeros de $D(z)$ usando $z = e^{sT}$. Aplicam-se as mesmas regras utilizadas para polos

Zeros em $s = \infty$: são mapeados em zeros de $D(z)$ no ponto $z = -1$

Projeto via Emulação

Ganho: **O ganho do controlador a tempo discreto emulado, $D(z)$**, deve estar **casado** com o ganho do controlador a tempo contínuo $G_c(s)$ na frequência $s = 0$ (i.e., onde se obtém o ganho DC). O ganho DC para discreto é obtido na frequência $z = 1$. Neste caso, deve atender também a restrição abaixo para o mapeamento do controlador:

$$\text{Ganho DC} = \lim_{s \to 0} G_c(s) = \lim_{z \to 1} D(z)$$

Projeto via Emulação

Exemplo Considere $G_c(s) = \dfrac{a}{s+a}$, com um polo em $s = -a$ e um zero em $s = \infty$. Então mapeamento polo-zero gera:

$$D(z) = \tilde{K}\,\frac{z+1}{z-e^{-aT}}$$

Para o casamento do ganho DC, note que: $\lim_{s\to 0} G_c(s) = 1$, então

$$\text{Ganho DC} = 1 = \lim_{z\to 1} \tilde{K}\,\frac{z+1}{z-e^{-aT}} \qquad \text{ou} \qquad \tilde{K} = \frac{1-e^{-aT}}{2}$$

Logo, o equivalente discreto para $G_c(s)$ é

$$D(z) = \frac{\left(1-e^{-aT}\right)(z+1)}{2\left(z-e^{aT}\right)}$$

Projeto via Emulação

Exemplo de Projeto via Emulação com Mapeamento polo-zero. Considere:

$$G(s) = \frac{1}{s(10s+1)} = \frac{0.1}{s(s+0.1)}$$

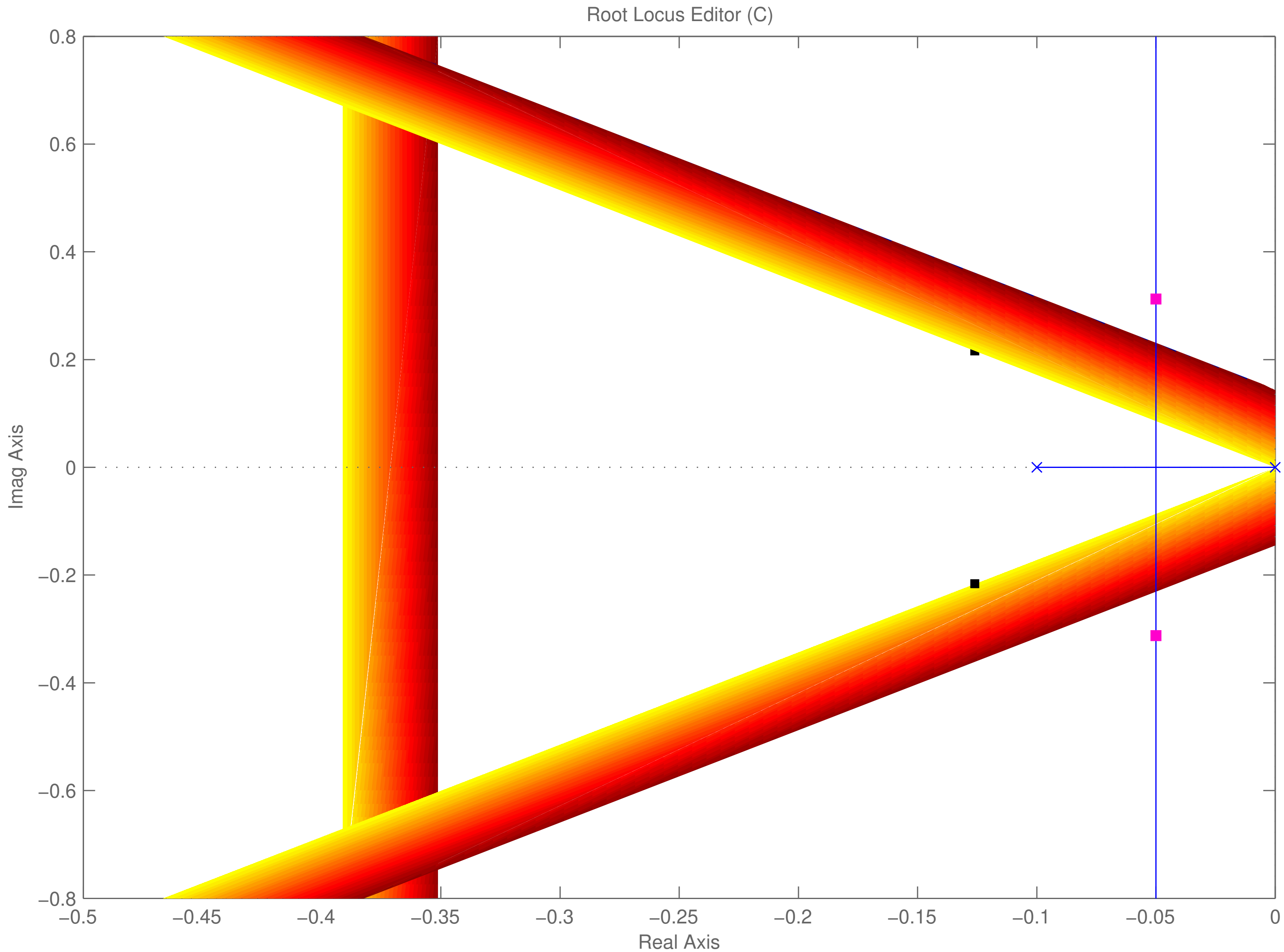
Objetivos: Projetar $D(z)$ via Emulação tal que $M_p \leq 16\%$, $t_a \leq 10$s

• Escolha o período de amostragem para fornecer ao menos 10 amostras do tempo de subida

⇝ Das especificações temporais obtém-se: $\zeta \geq 0.5$ e $\zeta\omega_n \geq 4/10 = 0.4$

⇝ Qual é uma região aceitável para se localizar os polos em malha fechada no plano-s?

Lugar das Raízes para $G(s) = \frac{0.1}{s(s+0.1)}$



Projeto via Emulação

Uma escolha para o controlador a tempo contínuo:

$$G_c(s) = K\,\frac{s+\tilde{z}}{s+\tilde{p}} = K\,\frac{(s+0.1)}{(s+1)}$$

É uma boa escolha? Como fica agora o LR do sistema em malha fechada?

Valor do ganho K? Note que em malha fechada obtém-se

$$\frac{G(s)G_c(s)}{1+G(s)G_c(s)} = \frac{0.1\,K}{s^2+s+0.1\,K} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Escolha, por exemplo, $\zeta = 0.5$. Então tem-se $2\zeta\omega_n = 1 \;\Rightarrow\; \omega_n \leq 1$. Particularmente, escolhendo $\omega_n = 1$ obtém-se $K = \omega_n^2/0.1 = 10$ (Note que provavelmente selecionar $\zeta = 0.5$ seja a pior escolha a se fazer?)

Projeto via Emulação

Seleção do período de amostragem T? Para $\omega_n = 1$rad/s tem-se $t_s \approx \frac{1.8}{\omega_n} = 1.8$s. Portanto: $T = \frac{t_s}{10} = 0.18 \approx 0.2$ s

Equivalente discreto do controlador – Forma do controlador discreto

$$D(z) = \tilde{K}\,\frac{z-\hat{z}}{z-\hat{p}}$$

- Aloque o zero $\tilde{z} = 0.1$ em $\hat{z} = e^{-0.1\times 0.2} = 0.9802$
- Aloque o polo $\tilde{p} = 1$ em $\hat{p} = e^{-1\times 0.2} = 0.8187$
- Calcule o ganho DC:

$$\text{Ganho DC} = \lim_{s\to 0} G_c(s) = 1 = \lim_{z\to 1} D(z) = \tilde{K}\,\frac{(1-0.9802)}{(1-0.8187)}$$

$$\therefore \qquad D(z) = 9.15\,\frac{(z-0.9802)}{(z-0.8187)}$$

Projeto via Emulação

MATLAB

```
Gc = tf([10 1],[1 1]);         % FT Controlador contínuo
Transfer function:
10 s + 1
--------
 s + 1

Dz = c2d(Gc,0.2,'matched')    % equivalente discreto T=0.2 e matched
Dz_zpk= zpk(Dz)               % Forma fatorada
Zero/pole/gain:
9.1544 (z-0.9802)
-----------------
   (z-0.8187)
```

Projeto via Emulação

Avaliação de Projeto Para analisar o comportamento do compensador projetado é necessário determinar a transformada-$\mathcal{Z}$ da planta contínua precedida por um SOZ:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{(1-e^{-sT})}{s}G(s)\right\} = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

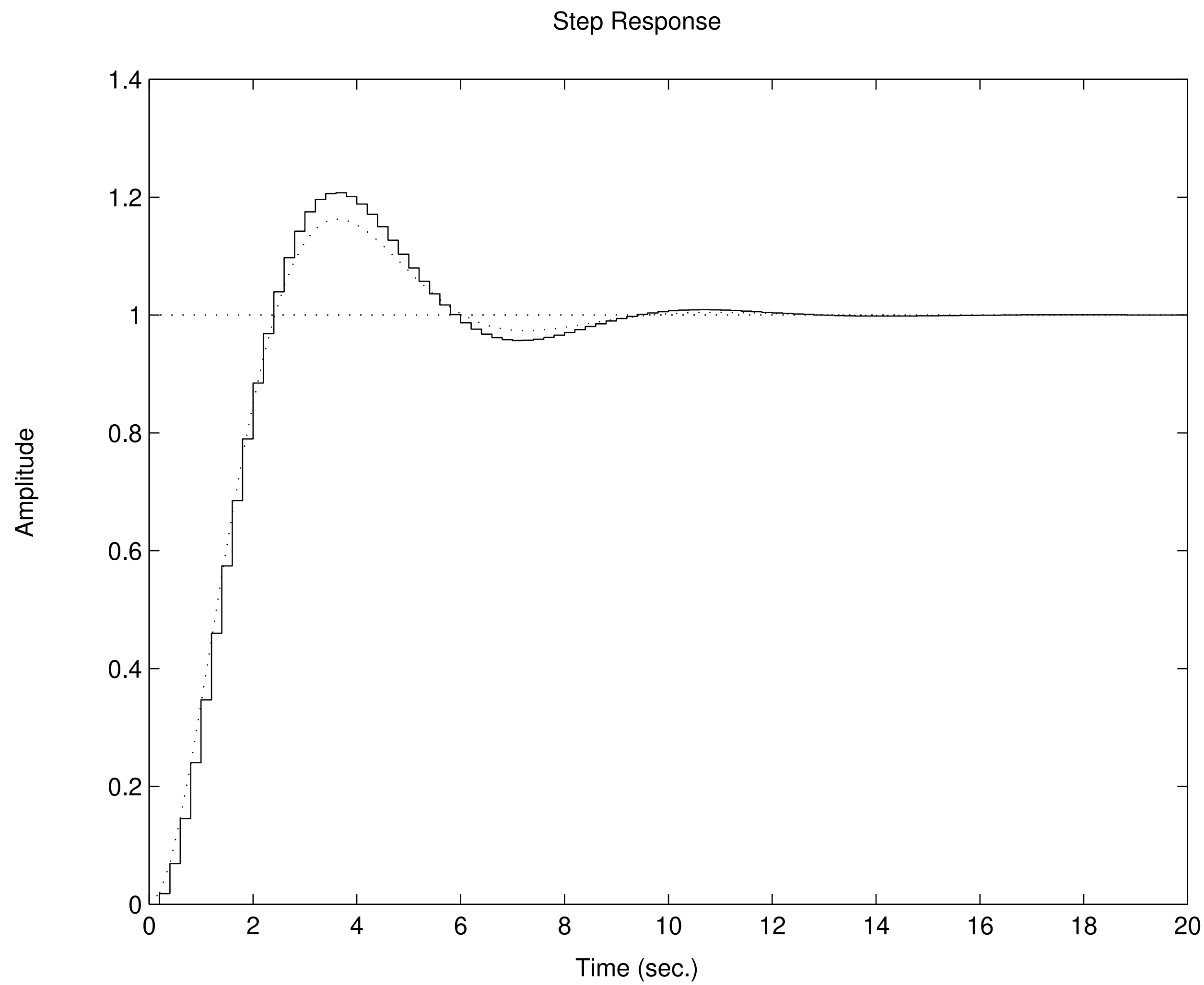
Matlab

```
Gz = c2d(tf([1],[10 1 0]),0.2)      % Planta discretizada p/ T=0.2s
Gz_zpk = zpk(Gz)                    % Forma fatorada


Zero/pole/gain:
0.0019867 (z+0.9934)
--------------------
  (z-1) (z-0.9802)
```

Projeto via Emulação – Avaliação do Projeto

▷ Projeto contínuo (linha pontilhada) e Projeto discreto (linha cheia)



Projeto via Emulação – Avaliação do Projeto

Problema: Para $T = 0.2$s tem-se sobre-elevação de $M_p = 20\%$ (a restrição é: $M_p \leq 16\%$. Note que reduzindo o período de amostragem para $T = 0.1$s, tem-se $\Rightarrow M_p = 18\%$ (neste caso a frequência de amostragem é 10Hz, que é $\approx$ 63 vezes mais rápida que ω_n)

Solução: Otimizar o projeto do controlador contínuo $G_c(s)$ para obter uma folga quanto a sobre-elevação

Nota: Uma caminho "fácil" seria retornar ao projeto e impor no projeto que $\zeta > 0.5$ (enfim, reduzindo significativamente a sobre-elevação mas, ao mesmo tempo, impactando no tempo de acomodação). O efeito é alterar o ganho K

Efeitos do SOZ O SOZ tem como Função de Transferência:

$$\begin{aligned} \text{SOZ}(j\omega) &= \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} \\ &= e^{-j\omega T/2} \underbrace{\left\{ \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} \right\}}_{\textbf{seno !!}} \frac{2j}{j\omega} \\ &= T e^{-j\omega T/2} \frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2} \end{aligned}$$

▷ Desta forma **o SOZ introduz um deslocamento em fase de $-\omega T/2$**, **que corresponde a um atraso no tempo de $T/2$**. Além disso multiplica o ganho por uma função de magnitude sen$(\omega T/2)/(\omega T/2)$

Efeito do SOZ no Projeto via Emulação

Efeito da Taxa de Amostragem – Considere o controle para a planta do exemplo anterior, porém selecionando $T = 1$s (sim, um período de amostragem maior... É esperado que o projeto discreto fique pior... **A ideia é evidenciar o efeito de atraso no tempo fruto do SOZ**). Note que a planta + SOZ e o respectivo controlador discretizado (com $T = 1$s) são dados por:

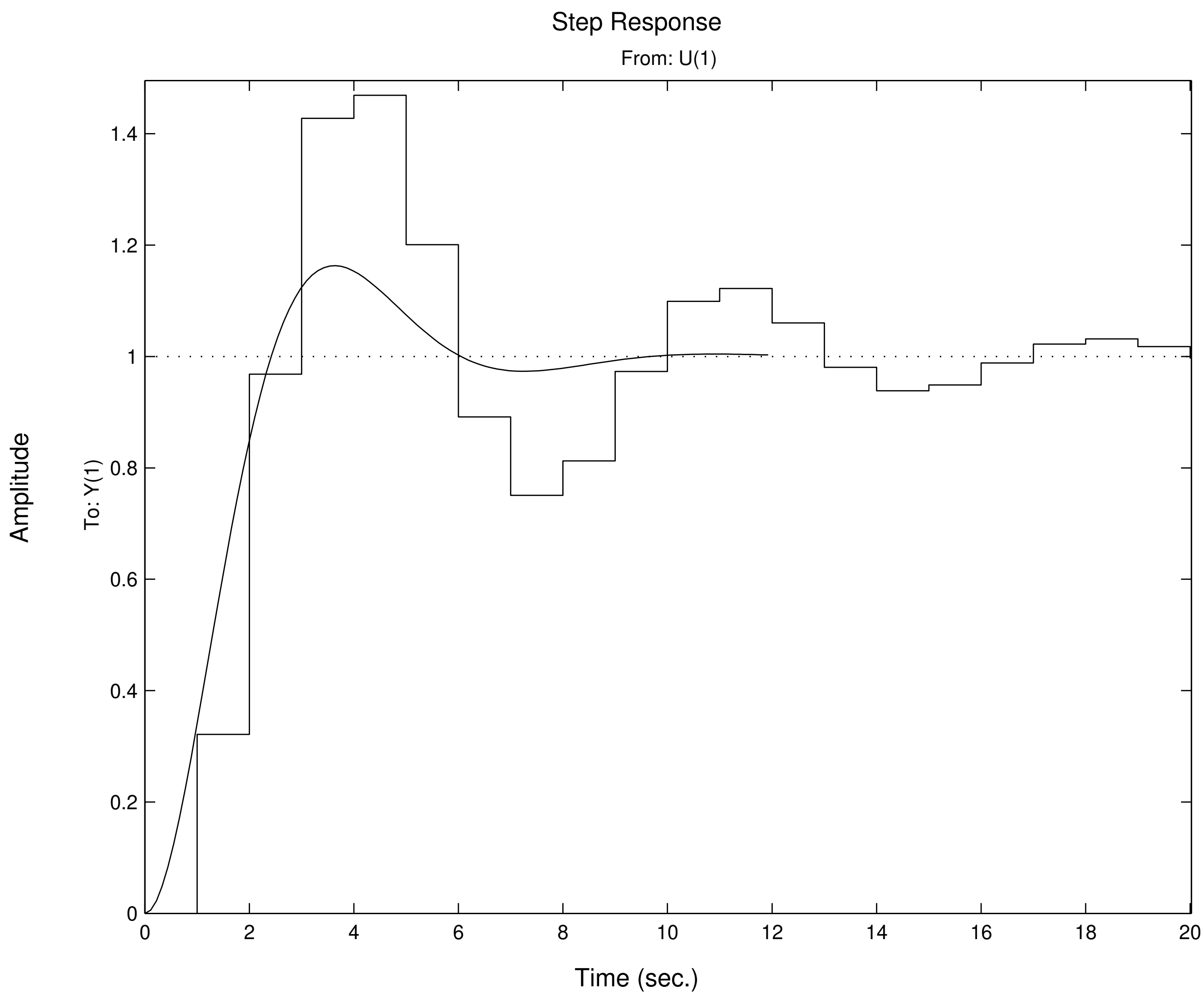
$$G(z) = 0.048374 \times \frac{(z + 0.9672)}{(z - 1)(z - 0.9048)}$$

$$D(z) = 6.6425 \times \frac{(z - 0.9048)}{(z - 0.3679)}$$

A resposta temporal em malha fechada é apresentada a seguir

Efeito do SOZ no Projeto via Emulação

Note que houve uma degradação da resposta ao degrau com $M_p \approx 48\%$

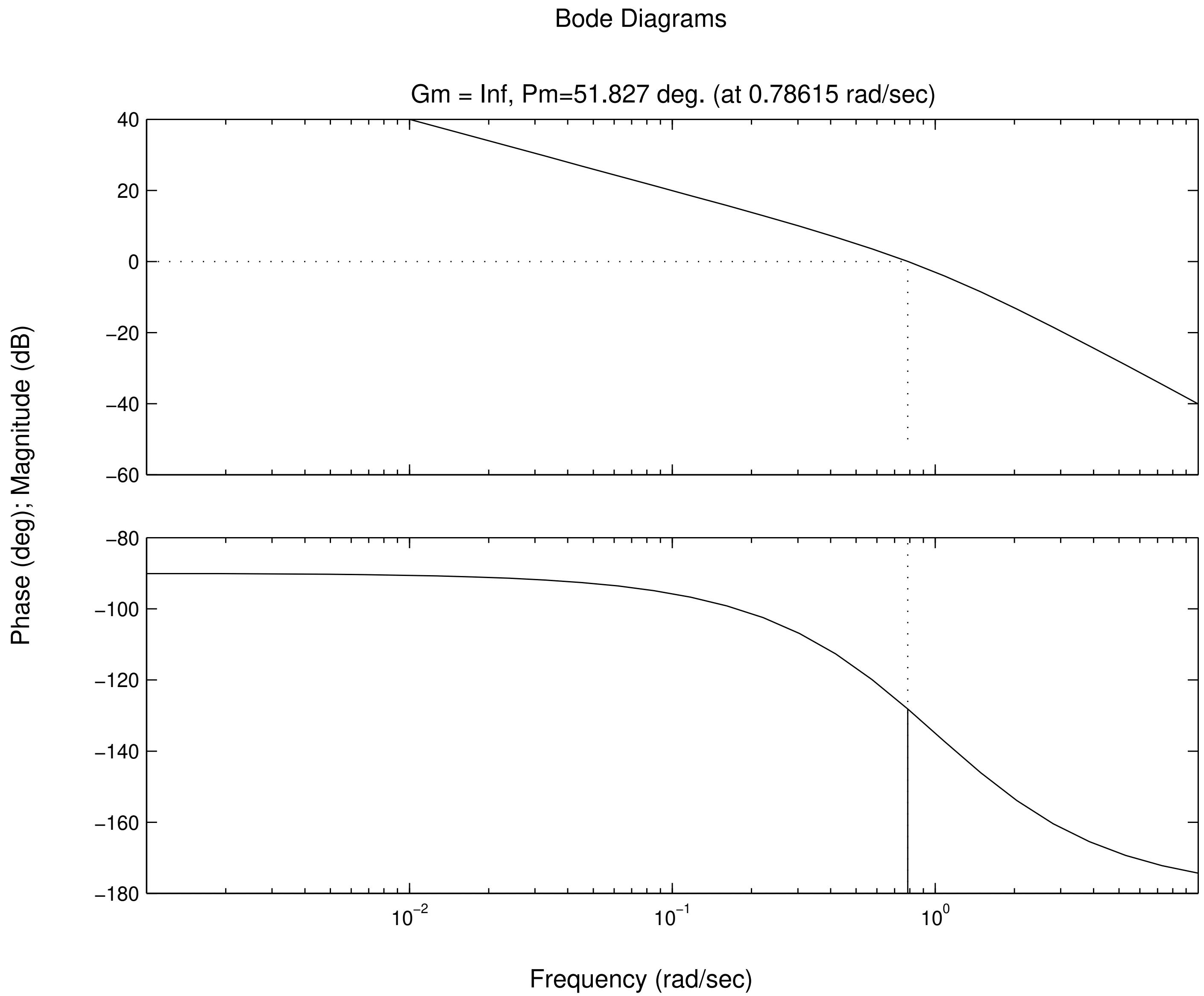


Efeito do SOZ no Projeto via Emulação

$\rightsquigarrow$ Por que uma sobre-elevação tão elevada quando se considera $\boldsymbol{T = 1}$s ao invés de $\boldsymbol{T = 0.2}$s (como no exemplo anterior)?

$\rightsquigarrow$ Para responder a esta questão vamos analisar a resposta em frequência do sistema a tempo contínuo e descrito no diagrama de Bode a seguir

A tempo contínuo: MG$= \infty$ e MF$= 51.8^0$



Efeito do SOZ no Projeto via Emulação

$\triangleright$ Uma **explicação parcial** a esta sobre-elevação elevada está associado ao SOZ que pode ser aproximado por um atraso no tempo de $T/2$s. Para $T/2$s tem-se um decréscimo em fase na frequência de cruzamento ($\omega_{cruz} = 0.79$ rad/s) de

$$\Delta\phi = -\frac{\omega_{cruz}\, T}{2} = \frac{0.79\,(1)}{2}\text{rad} = 22.35^0$$

então o SOZ produz uma redução na Margem de Fase aproximadamente igual a $\text{MF} = 51.8^0 \; - \; 22.35^0 = 29.45^0$

$\triangleright$ Como o amortecimento ζ está diretamente associado a MF pela relação $\text{MF} \approx \zeta \times 100$, logo

$$\zeta \approx 0.295 \qquad \Rightarrow \qquad M_p \approx 38\% \;!!$$

Note que neste exemplo, especificou-se uma sobre-elevação máxima de 16 %

Especificações de Projeto diretamente domínio-$\mathcal{Z}$

Rastreamento de referência – Erro em estado estacionário

Suponha que a FT do controlador seja $D(z) = U(z)/E(z)$ e que a entrada da planta é precedida por um SOZ. Então a FT discreta da planta é

$$G(z) \triangleq \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

E o erro em estado estacionário, entre a entrada de referência e a saída, é:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

Isto é, análogo ao modelo contínuo!

Constantes de Erro no domínio-$\mathcal{Z}$

Para entrada degrau $R(z) = \dfrac{z}{z-1}$

O erro para uma entrada de referência degrau é

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{1}{1 + D(z)G(z)} \, \frac{z}{z-1}$$

Se o sistema é estável em malha fechada (todas as raízes de $1 + D(z)G(z)$ estão no interior do círculo unitário), então, pelo Teorema do Valor Final:

$$e(\infty) \;=\; \lim_{z \to 1} (z-1)E(z) = \frac{1}{1 + D(1)G(1)} \triangleq \frac{1}{1 + K_p}$$

$\rightsquigarrow$ O tipo do sistema é dado pelo número de integradores, ou polos em $z = 1$. Se houver ao menos um integrador, então $e(\infty) \to 0$

Constantes de Erro no domínio-$\mathcal{Z}$

Para entrada rampa $R(z) = \dfrac{Tz}{(z-1)^2}$. O erro é

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{1}{1 + D(z)G(z)}\,\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Então pelo Teorema do Valor Final:

$$e(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) = \lim_{z\to 1}\frac{Tz}{(z-1)\left[1 + D(z)G(z)\right]} \triangleq \frac{1}{K_v}$$

A constante de velocidade K_v, para um sistema Tipo 1, pode ser calculada da forma:

$$K_v = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)D(z)G(z)}{Tz}$$

Especificações Temporais no plano-z

Os polos em malha fechada do sistema de 2a. ordem no caso contínuo são

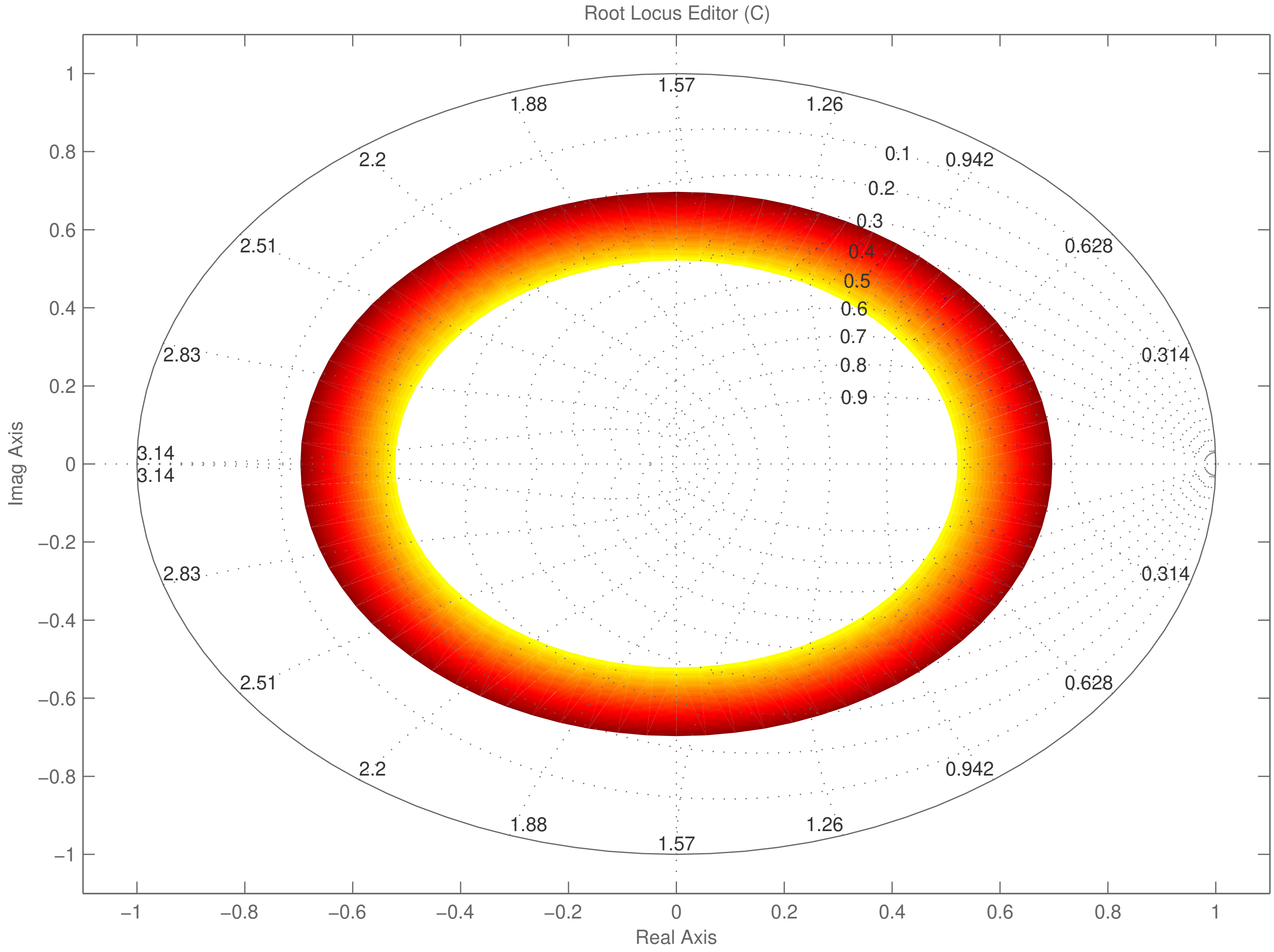
$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad , \text{ se } \quad 0 < \zeta < 1$$

e podem ser mapeados em lugares do plano-z através da relação $z = e^{sT}$. As especificações de sobre-elevação (via ζ) e tempo de acomodação t_a (via $\zeta\omega_n$) são apresentadas a seguir com as regiões correspondentes no plano-z

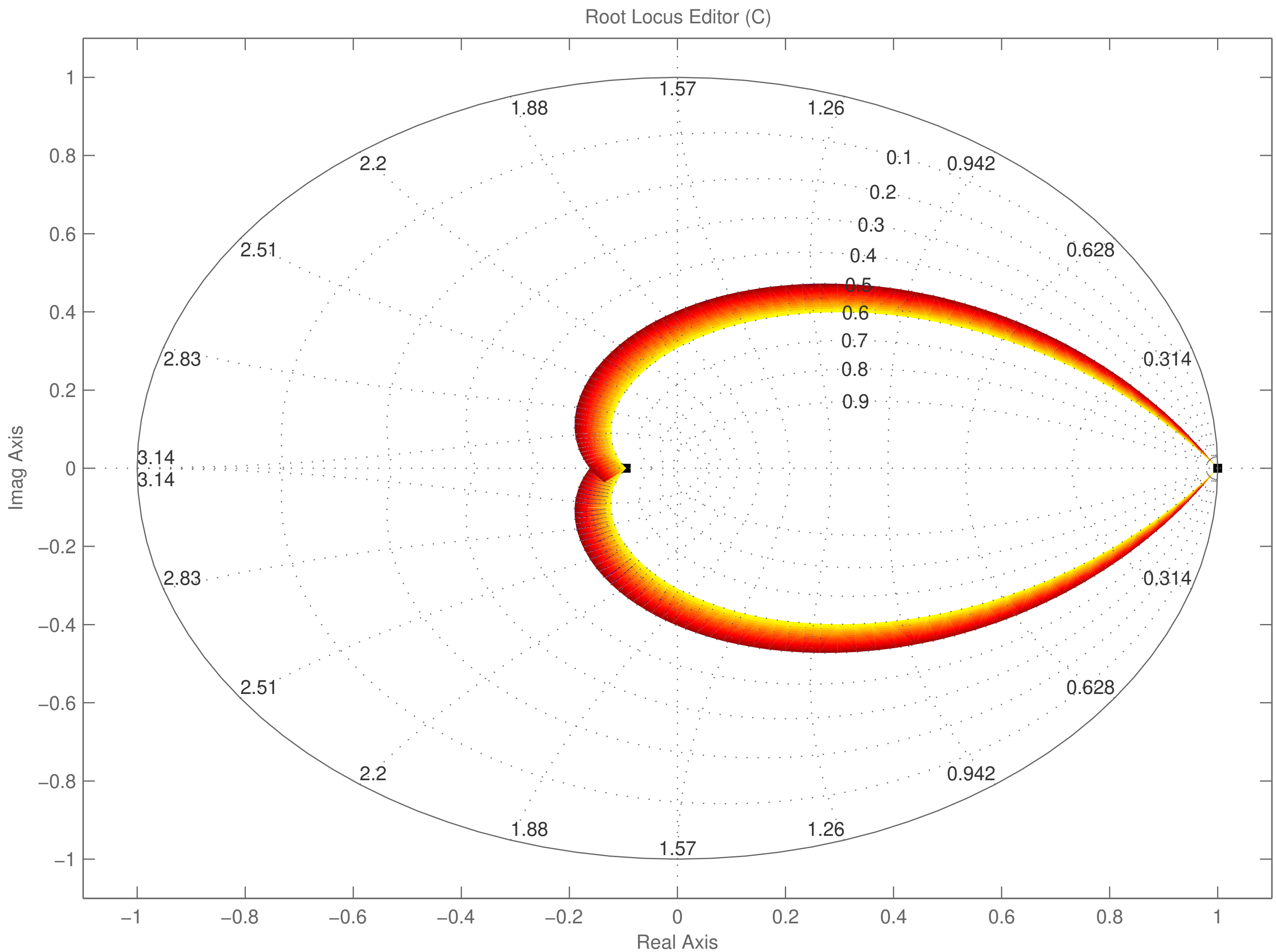
Nota Como a parte real $-\zeta\omega_n$ é mapeada em $r = e^{-\zeta\omega_n T}$, da especificação $t_a \leq 4/\zeta\omega_n$ tem-se $\zeta\omega_n \geq 4/t_a$, que é mapeado em um círculo de raio

$$r_0 = e^{-4T/t_a}$$

Especificações no plano-z – Tempo de acomodação



Especificações no plano-z – Amortecimento



Projeto via Lugar das Raízes no domínio-$\mathcal{Z}$

- O projeto é realizado diretamente no domínio discreto com a planta $G(s)$ representada no domínio-$\mathcal{Z}$ por $G(z)$ (levando em conta o SOZ)

- É função do período de amostragem T (mas não requer que T seja muito pequeno para ajudar o projeto, como no caso da Emulação)

- Pode ser desenvolvido no plano-z usando técnicas de construção do Lugar das Raízes

Projeto via Lugar das Raízes no domínio-$\mathcal{Z}$

Problema – Obter o controlador discreto $D(z)$ satisfazendo as especificações de desempenho, dado que a planta discreta a ser controlada (que inclui o SOZ) é:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Lugar das Raízes no plano-z – Como a EC do sistema discreto é

$$1 + D(z)G(z) = 0$$

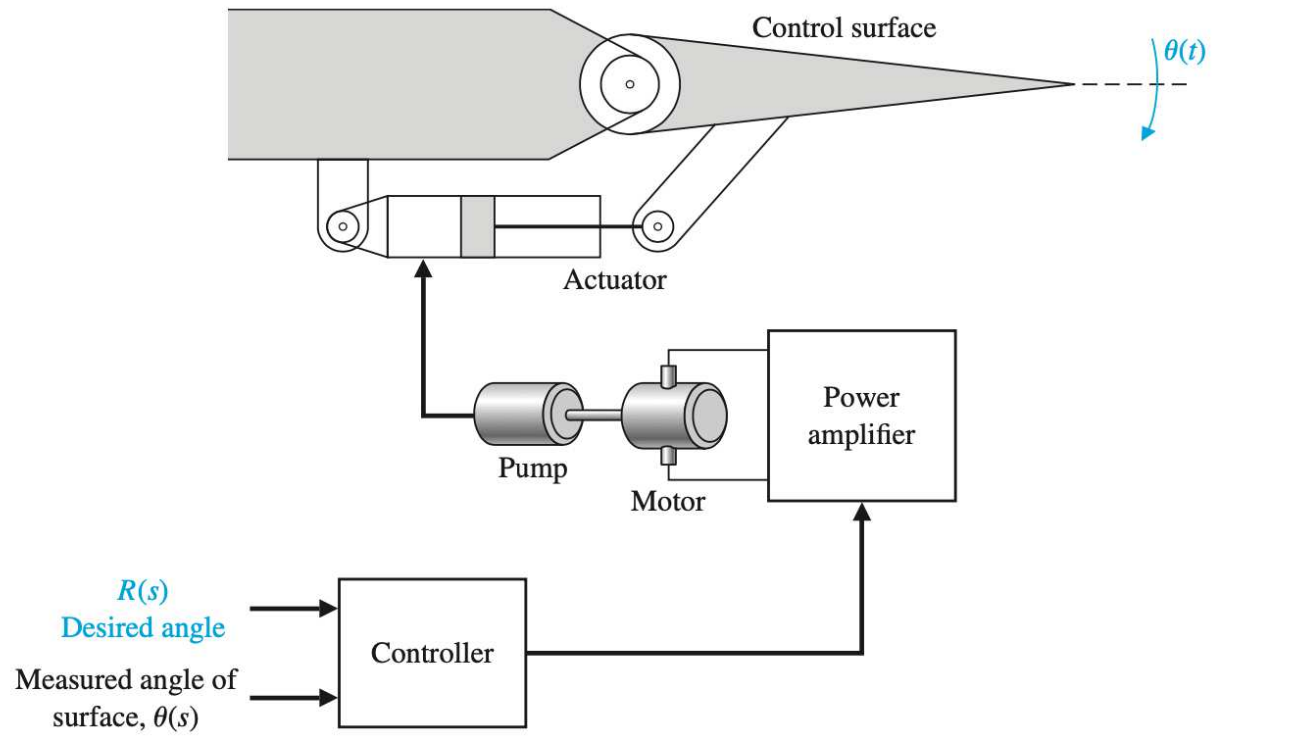
e **não existe nenhuma diferença prática entre 'z' e 's'**, **as regras de construção do Lugar das Raízes no discreto são as mesmas do plano-s** e não precisamos "reaprender" nada quanto as regras de traçado

Exemplo de Projeto – Controle Fly-by-Wire

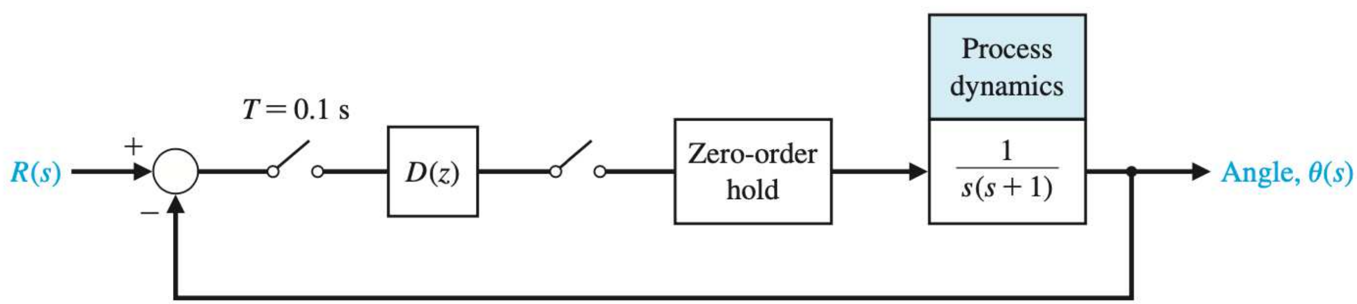
O Boeing 777 ou o Airbus A380 são exemplos de aeronaves completamente integradas em um esquema conhecido por fly-by-wire. A filosofia desta abordagem implica que vários componentes do sistema são inter-conectados de forma elétrica ao invés da forma mecânica tradicional (cabos), e operam sob a supervisão de computadores de bordo responsáveis por monitoramento, controle e coordenação de tarefas. Naturalmente o apelo para este tipo de estratégia implica em menos peso adicionado (ausência de cabos e estruturas mecânicas, a menos, como no Boeing 777, que tem um sistema de back-up analógico) e consumo de combustível, possivelmente mais segurança ao automatizar estratégias, etc.

Fly-by-Wire – Cockpit Airbus A380

Exemplo de Projeto – Controle Fly-by-Wire



(a)



Exemplo de Projeto – Controle Fly-by-Wire

- O modelo da planta é descrito por

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Com o SOZ obtém-se

$$G(s)\text{SOZ}(s) = \frac{1}{s(s+1)}\frac{1-e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s^2(s+1)}$$

- Objetivo de controle

Projetar um controlador discreto $D(z)$ tal que o ângulo da superfície de controle siga o ângulo desejado

Exemplo de Projeto – Controle Fly-by-Wire

- Variável controlada

Ângulo da superfície de controle , $\theta(t)$

- Período de Amostragem: $T = 0.1$s

- Especificações de projeto

E1. $M_p \leq 5\%$ **para entrada degrau unitário. Portanto** $\zeta \geq 0.69$

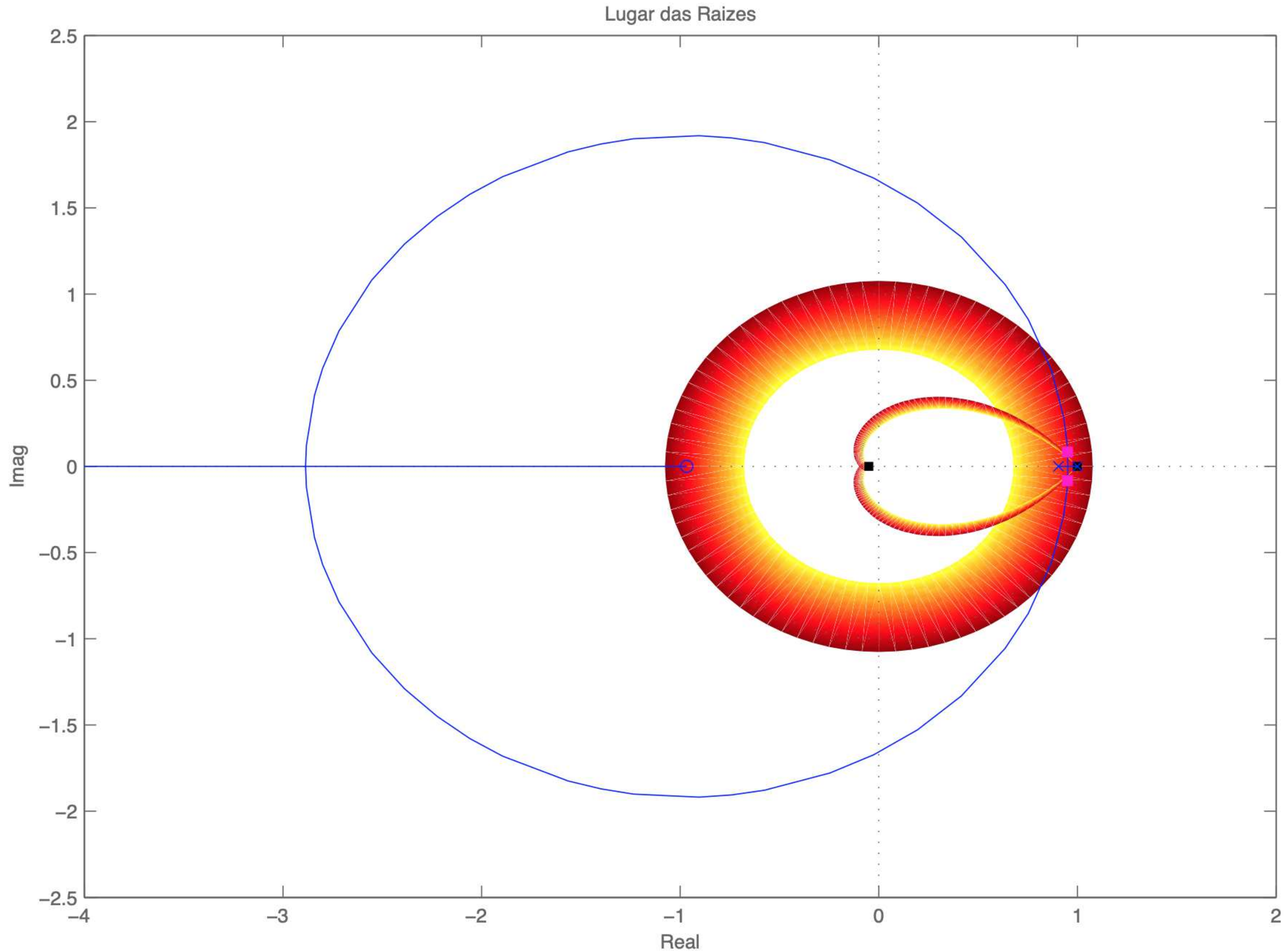
E2. $t_a \leq 1$s **para entrada degrau unitário. Então** $r_0 = e^{-4T/t_a} = 0.67$

Exemplo de Projeto – Controle Fly-by-Wire

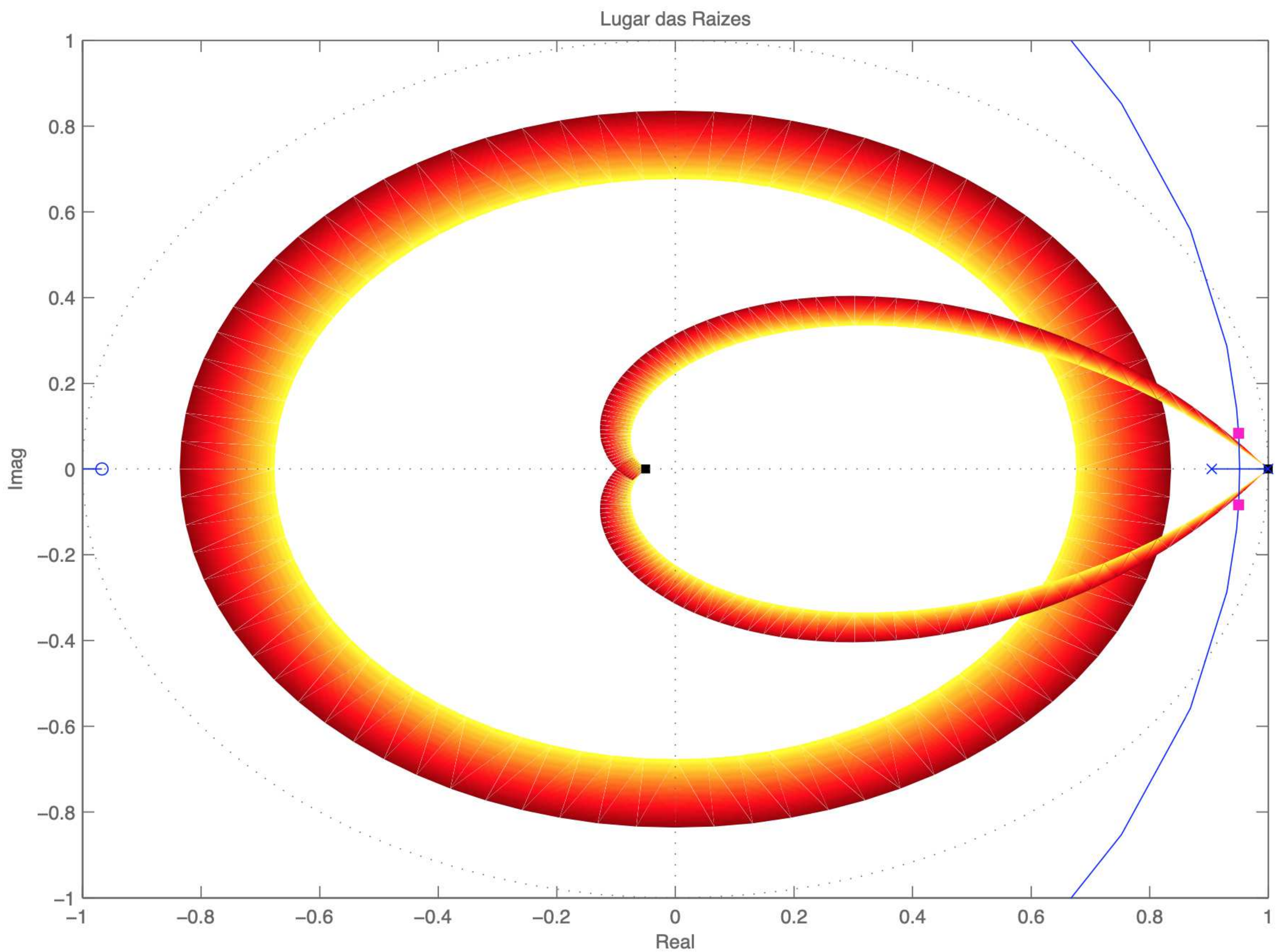
Obtenção de $G(z)$:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \mathcal{Z}\left\{G(s)\mathsf{SOZ}(s)\right\} \\
&= \mathcal{Z}\left\{\left(1-e^{-sT}\right)\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right)\right\} \\
&= \frac{ze^{-T}-z+Tz+1-e^{-T}-Te^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})} \\
&= \frac{0.004837z+0.004679}{(z-1)(z-0.9048)}
\end{aligned}
$$

Lugar das Raízes para $D(z) = K$



Lugar das Raízes para $D(z) = K$. Um zoom



Exemplo de Projeto – Controle Fly-by-Wire

▷ Note que da análise do Lugar das Raízes anterior, não é possível satisfazer as especificações selecionando um controlador que seja apenas um ganho estático

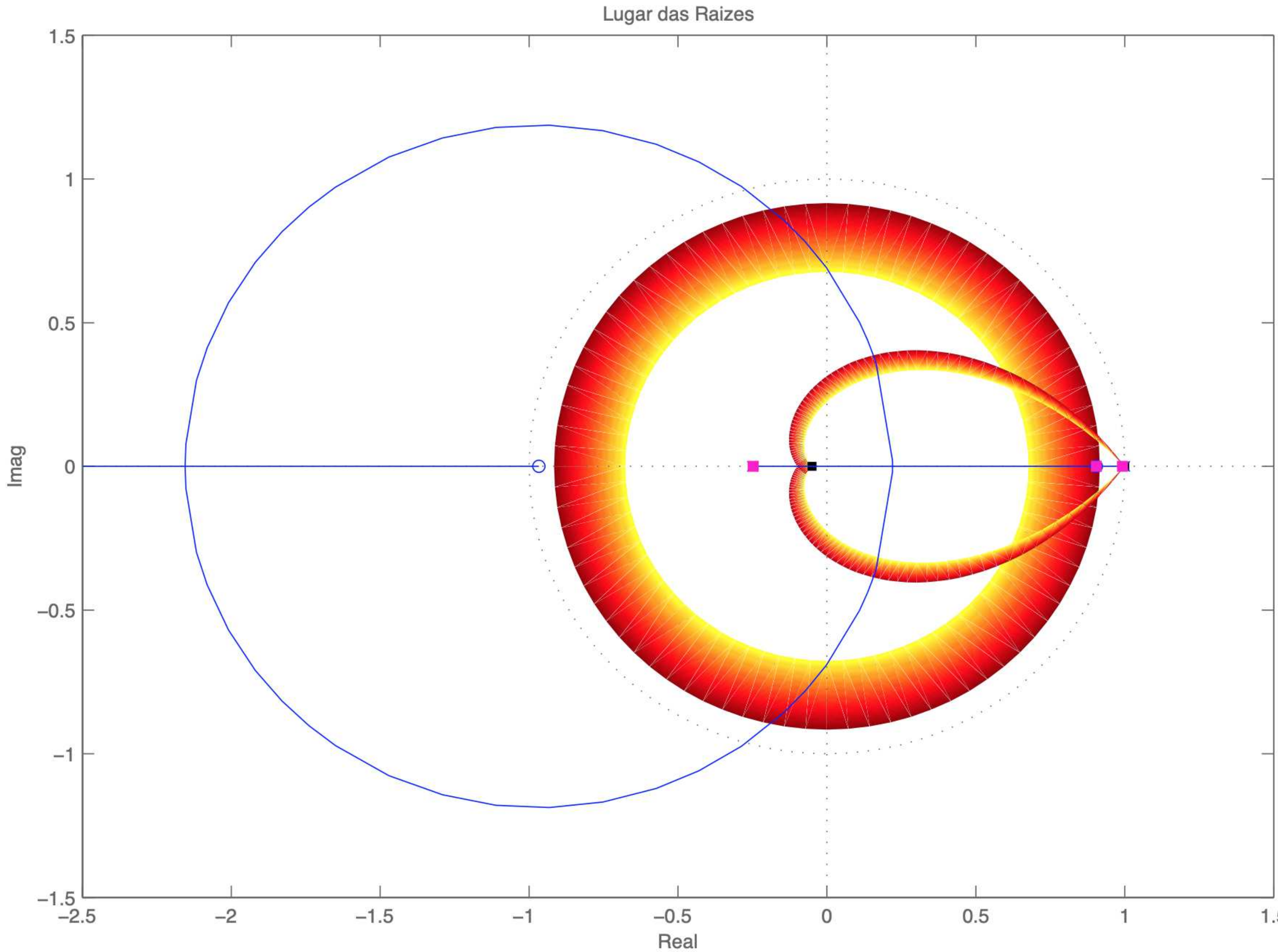
Alternativa – já que há um integrador na descrição da planta, pode-se selecionar um controlador do tipo: $D(z) = K\frac{z-\hat{z}}{z-\hat{p}}$

Sugestão – Selecione o zero $\hat{z}$ tal que cancele o efeito do polo da planta $G(z)$ em 0.9048, i.e., $\hat{z} = 0.9048$

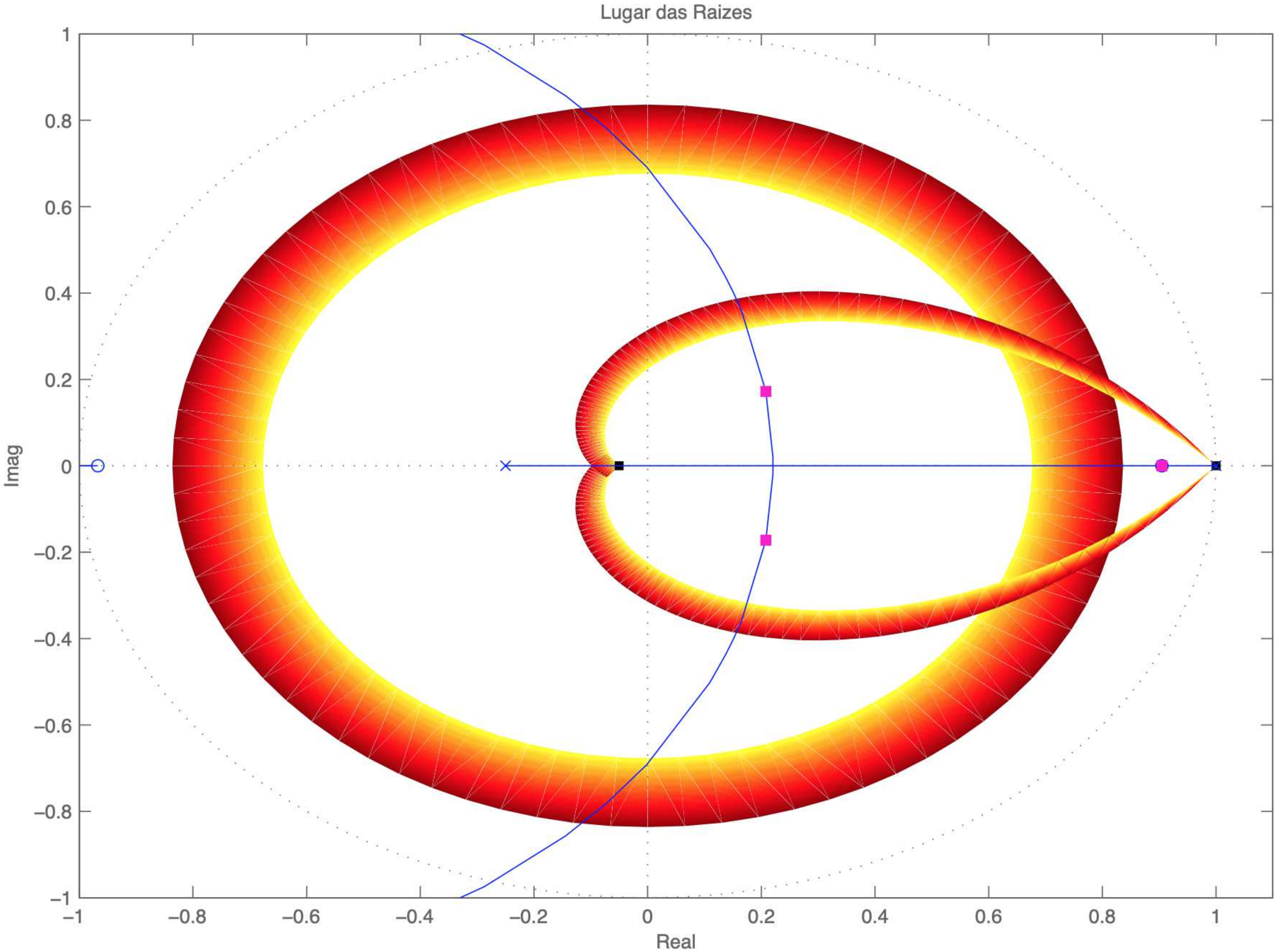
▷ Selecione $\hat{p}$ de tal forma que o Lugar das Raízes percorra a região especificada para se ter a intersecção que satisfaça tanto overshoot (M_p) como tempo de acomodação (t_a). Por exemplo, escolha $\hat{p} = -0.25$. Desta forma:

$$D(z) = K\frac{z-0.9048}{z+0.25}$$

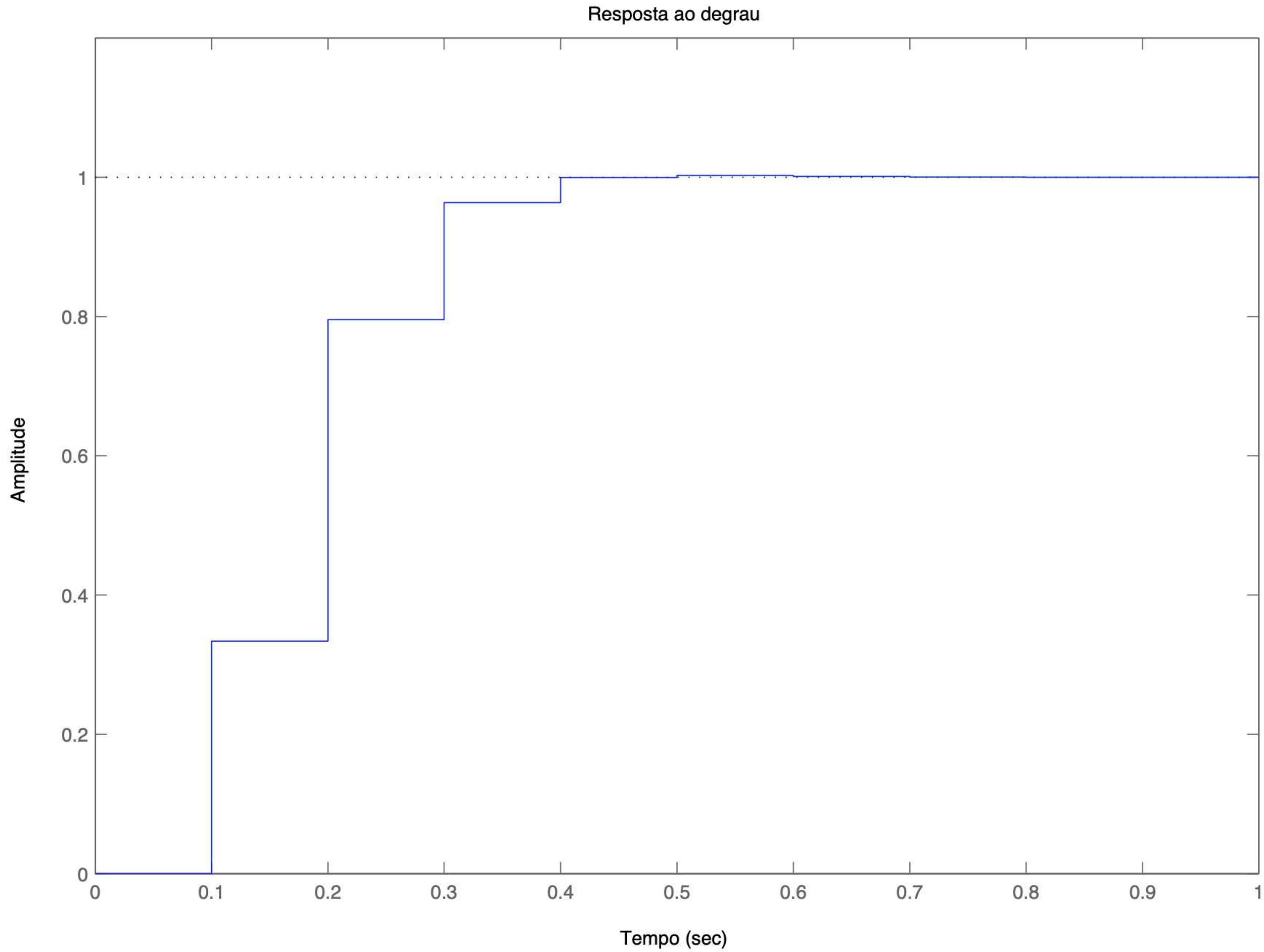
Lugar das Raízes para $G(z) \times K\,\frac{z-0.9048}{z+0.25}$. Um zoom



LR para $G(z) \times K\frac{z-0.9048}{z+0.25}$ – Selecionando $K = 69$



Resposta em malha fechada com $D(z) = 69\,\frac{z-0.9048}{z+0.25}$



Exercícios

1. Projete um controlador digital para o sistema fly-by-wire com especificações:

   1.1 $M_p \leq 2\%$ para entrada degrau unitário

   1.2 $t_a \leq 0.5$s para entrada degrau unitário

2. Projete um controlador digital para o sistema fly-by-wire considerando que o período de amostragem é $T = 0.01$s e atenda as especificações:

   2.1 $M_p \leq 1\%$ para entrada degrau unitário

   2.2 $t_a \leq 0.5$s para entrada degrau unitário