Déjà-vu – Matrizes e Linearidade

1. Revisitando Matrizes
   1.1. Traço, Simetria, Determinante
   1.2. Inversa
2. Sistema de Equações Lineares
3. Equação Característica
   3.1. Autovalor & Autovetor
4. Polinômios Coprimos
5. Função Linear
6. Sistemas Dinâmicos Lineares & Não-Lineares

Matrizes e Vetores

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$: matriz real, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$: matriz complexa
- $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ (real), $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n}$ (complexo)

Matrizes e Vetores

⇝ Transposição:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \quad x' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

$$(A+B)' = A' + B' \quad ; \quad (AB)' = B'A'$$

Traço: soma dos elementos da diagonal de uma matriz quadrada

$$A_{n\times n} \;\Rightarrow\; \mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \;;\; \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \;;\; \mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}(A)$$

Matrizes

⇝ Matriz conjugada $\bar{A}$ $(A \in \mathbb{C}^{m \times n})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+j & 0 \\ -3-3j & j & -1-5j \\ 0 & 4j & 1+j \end{bmatrix} ; \ \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1-j & 0 \\ -3+3j & -j & -1+5j \\ 0 & -4j & 1-j \end{bmatrix}$$

⇝ Matriz conjugada transposta: $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -3+3j & 0 \\ 1-j & -j & -4j \\ 0 & -1+5j & 1-j \end{bmatrix}$

$$(A+B)^* = A^* + B^* \ ; \ (AB)^* = B^* A^* \ ; \ \text{se } c \in \mathbb{C} \ \Rightarrow \ (cA)^* = \bar{c} A^*$$

Matrizes

- Simetria: $A = A'$ $(a_{ij} = a_{ji})$ $\looparrowright$ Anti-simetria: $A = -A'$ $(a_{ij} = -a_{ji})$

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então $A + A'$ é simétrica e $A - A'$ é anti-simétrica

Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então $A'A$ é simétrica e AA' também é simétrica

- Hermitiana: $A = A^*$ $(a_{ij} = \bar{a}_{ji})$ $\looparrowright$ Anti-hermitiana: $A^* = -A$

Fato: Toda matriz quadrada A pode ser expressa de maneira única como

$$A = X + jY \quad ; \quad X = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad ; \quad Y = \frac{1}{2j}(A - A^*)$$

sendo X e Y matrizes hermitianas

Determinantes

$\rightsquigarrow$ Denota-se $\det(A)$ como sendo o **determinante** da matriz quadrada $A_{n\times n}$. É uma função escalar calculada a partir de uma linha arbitrária k da matriz

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} C_{kj}$$

ou a partir de uma coluna l qualquer

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{il} C_{il}$$

sendo C_{pq} os **cofatores** dados por

$$C_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}$$

e M_{pq} os menores associados aos elementos a_{pq} da matriz $A_{n\times n}$. O menor M_{pq} é o determinante da matriz de dimensão $(n-1)\times(n-1)$ obtida a partir da eliminação da linha p e da coluna q da matriz A

Propriedade dos Determinantes

$\rightsquigarrow$ Se duas linhas (ou colunas) de uma matriz são trocadas de posição, o sinal do determinante também é trocado

$\rightsquigarrow$ $\det(A') = \det(A) \quad ; \quad \det(A^*) = \det(\bar{A})$

$\rightsquigarrow$ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$\rightsquigarrow$ $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ (para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

$\rightsquigarrow$ $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(A)\det(D)$

+ sobre Matrizes

$\rightsquigarrow$ Matriz Ortogonal: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \mathbf{I}$

$\rightsquigarrow$ Matriz Unitária: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \mathbf{I}$

Note que o determinante de uma matriz hermitiana é sempre real

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{det}(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{det}(\bar{\boldsymbol{A}}') = \mathbf{det}(\bar{\boldsymbol{A}})$$

$\rightsquigarrow$ Se $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$ a matriz $\boldsymbol{A}$ é chamada singular

Inversa de Matrizes

⇝ $A_{n\times n}$ possui uma inversa A^{-1} se $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_{n\times n}$

⇝ A inversa de uma matriz é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\text{Adj }(A)$, sendo Adj (A) a matriz **adjunta** da matriz A, definida como Adj $(A) = [\text{Co }(A)]'$ e Co (A) é a matriz **cofatora** de A, composta pelos cofatores C_{ij} da matriz A

⇝ Relembrando, Cofator:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M|_{ij}$$

$|M|_{ij}$ – o menor do $\det(A)$ que é formado quando se remove a i-ésima linha e j-ésima coluna do $\det(A)$

Inversa de Matrizes

- A inversa de uma matriz ortogonal é igual à sua transposta

$$\boldsymbol{A^{-1} = A'}$$

- A inversa de uma matriz unitária é igual à sua conjugada transposta:

$$\boldsymbol{A^{-1} = A^*}$$

- Inversa de uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2\times 2}}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Partições de Matrizes

Uma identidade matricial $AB = C$ pode ser particionada de várias maneiras:

$$\left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 & A_1B_2 \\ \hline A_2B_1 & A_2B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_1B_1 + A_2B_2 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} C_1 \\ \hline C_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array}\right]$$

Fórmulas para Matrizes Invertíveis

Para uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ com A_{11} e A_{22} quadradas

$\rightsquigarrow$ Se A_{11} é não singular (invertível), pode escrever:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

com $\Delta \triangleq A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$

Fato: A é não singular sse Δ é não singular

Fórmulas para Matrizes Invertíveis

$\rightsquigarrow$ No entanto, note que se A_{22} é não-singular, então

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Delta} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & \mathrm{I} \end{bmatrix}$$

$\hat{\Delta} \triangleq A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$; **A é não singular sse $\hat{\Delta}$ é não singular**

Δ ($\hat{\Delta}$) é chamado de complemento de Schur de A_{11} (A_{22})

Fórmulas para Matrizes Invertíveis

$\rightsquigarrow$ Se $\boldsymbol{A}$ é não singular

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} \Delta^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} \Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}^{-1} & -\hat{\Delta}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} \hat{\Delta}^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} \hat{\Delta}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1}$$

Fórmulas para Matrizes Invertíveis

$\rightsquigarrow$ Para $\boldsymbol{A}$ bloco-triangular

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{11}^{-1}} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}} & \boldsymbol{A_{22}^{-1}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A_{22}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{11}^{-1}} & -\boldsymbol{A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A_{22}^{-1}} \end{bmatrix}$$

Fórmulas para Matrizes Invertíveis

- Se A_{11} é não-singular: $\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$

- Se A_{22} é não-singular: $\det(A) = \det(A_{22})\det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$

- Para matrizes quaisquer $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ e $C \in \mathbb{C}^{n\times m}$ então:

$$\det\begin{bmatrix} \mathsf{I}_m & B \\ -C & \mathsf{I}_n \end{bmatrix} = \det(\mathsf{I}_n + CB) = \det(\mathsf{I}_m + BC)$$

- Para quaisquer $x, y \in \mathbb{C}^n$ então: $\det(\mathsf{I}_n + xy^*) = 1 + y^*x$

Sistema de Equações Lineares

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

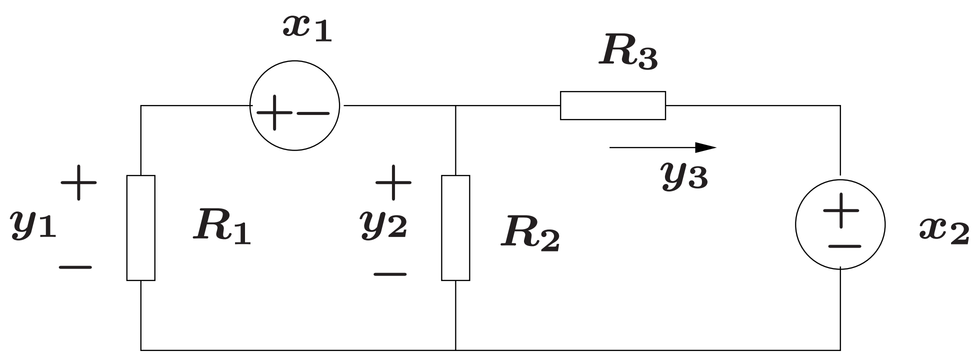
Escrito na forma matricial: $y = Ax$

$$
y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

$\rightsquigarrow$ Interpretação: y é a medida (ou valor observado) e x é a incógnita; ou y é a saída (resultado) e x é a entrada (ou a ação); $y = Ax$ define um mapeamento (função ou transformação) de $x \in \mathbb{R}^n \mapsto y \in \mathbb{R}^m$

Exemplo – Circuito Linear

x_j são as tensões das fontes independentes e y_i as variáveis (tensão ou corrente):



$$\rightsquigarrow \begin{cases} \frac{y_1}{R_1} + \frac{y_2}{R_2} + y_3 = 0 \\ y_1 = x_1 + y_2 \\ y_2 = R_3 y_3 + x_2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/R_1 & 1/R_2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -R_3 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{Solução?}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{y} = M^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x}$$

Exemplo – Circuito Linear

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\text{Adj }(M) = \frac{1}{\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1R_2}}\text{Adj }(M)$$

sendo Adj (M) a transposta da matriz cofatora: Adj $(M) = [\text{Co }(A)]'$

Cofatores: $C_{11} = R_3$, $C_{12} = R_3$, $C_{13} = 1$, $C_{21} = -\left(-\frac{R_3}{R_2} - 1\right) = \frac{(R_2+R_3)}{R_2}$, $C_{22} = -\frac{R_3}{R_1}$, $C_{23} = -\frac{1}{R_1}$, $C_{31} = 1$, $C_{32} = 1$, $C_{33} = -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = -\frac{(R_1+R_2)}{R1R2}$

$$\therefore \quad \text{Adj }(M) = \begin{bmatrix} R_3 & \frac{(R_2+R_3)}{R_2} & 1 \\ R_3 & -\frac{R_3}{R_1} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{R_1} & -\frac{(R_1+R_2)}{R_1R_2} \end{bmatrix}$$

então...

Exemplo – Circuito Linear

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{y} = \frac{1}{\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_1R_2}} \begin{bmatrix} R_3 & \frac{(R_2+R_3)}{R_2} & 1 \\ R_3 & -\frac{R_3}{R_1} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{R_1} & -\frac{(R_1+R_2)}{R_1R_2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x}$$

ou, reduzindo...

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\frac{1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \begin{bmatrix} R_1(R_2+R_3) & R_1R_2 \\ -R_2R_3 & R_1R_2 \\ -R_2 & -(R_1+R_2) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x}$$

Equação Característica

$\rightsquigarrow$ Considere a equação linear $\boldsymbol{\lambda x = Ax}$ ($\boldsymbol{\lambda}$ um escalar), reescrita da forma

$$(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$\rightsquigarrow$ $\exists$ uma solução $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ sse $\mathbf{det}\,(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$, i.e., $(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \boldsymbol{A})$ é singular ou, em outras palavras: $\mathbf{det}(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$

Se $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, $\mathbf{det}(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$ é a equação característica de ordem $\boldsymbol{n}$, com $\boldsymbol{n}$ raízes $\boldsymbol{\lambda_i}$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n}$ denominadas de autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$, tal que:

$$\boldsymbol{\lambda_i x_i = A x_i} \quad ; \quad \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n}$$

$\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{x_i}$: autovetor associado ao autovalor $\boldsymbol{\lambda_i}$

$\rightsquigarrow$ Note que para $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, pode ser que $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$

Polinômios Coprimos

$\rightsquigarrow$ São polinômios que não possuem fator comum. Dados dois polinômios p_0 e p_1, com o grau de p_1 menor ou igual ao grau de p_0, pode-se usar o algoritmo de Euclides para determinar se p_0 e p_1 possuem ou não um fator comum

$\rightsquigarrow$ Determine os polinômios $p_2, \ldots, p_k$ tais que p_{i+1} seja o resto da divisão de p_{i-1} por p_i

$\rightsquigarrow$ Dessa forma, garante-se que os polinômios p_i possuem grau estritamente decrescente e que existem polinômios q_i, $i = 1, \ldots, k$ tais que
$p_{i-1} = q_i p_i + p_{i+1}$

$\rightsquigarrow$ A sequência termina quando encontra-se p_k que divide p_{k-1}, ou, se p_0 e p_1 não possuem fator comum, a sequência termina com p_k igual a uma constante não nula. Se houver um fator comum, o maior denominador comum entre p_0 e p_1 é dado pelo p_k que divide p_{k-1}

Polinômios Coprimos

Exemplo: Considere $p_0 = s^3 - 6s^2 + 11s - 6$ e $p_1 = s^2 - 5s + 4$

$$p_0 = \underbrace{(s-1)}_{q_1} p_1 + \underbrace{(2s-2)}_{p_2}$$

$$p_1 = \underbrace{(0.5s-2)}_{q_2} p_2 + \underbrace{0}_{p_3}$$

$p_2 = 2(s-1)$ é o maior denominador comum

Exemplo: $p_0 = s^3 + 4s^2 - 2s + 1$ e $p_1 = s^2 + 2s - 1$

$$p_0 = (s+2)p_1 + (-5s+3)$$

$$p_1 = (-0.2s - 0.52)p_2 + 0.56$$

$\Longrightarrow$ não possuem fator comum, i.e., p_0 e p_1 são polinômios coprimos

Polinômios Coprimos

A matriz de Sylvester pode ser usada para determinar se dois polinômios são ou não coprimos. Considere, por exemplo, os polinômios

$$p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3$$

$$q(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3$$

A existência de um fator comum implica que existem polinômios

$$a(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \quad ; \quad b(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2$$

tais que

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{a(s)}{b(s)} \quad \Longrightarrow \quad p(s)b(s) + q(s)(-a(s)) = 0$$

Polinômios Coprimos

Agrupando as incógnitas (coeficientes de $a(s)$ e $b(s)$) em um vetor da forma:

$$x = \begin{bmatrix} -a_0 & b_0 & -a_1 & b_1 & -a_2 & b_2 \end{bmatrix}'$$

e agrupando os coeficientes de $p(s)$ e $q(s)$ em uma matriz da forma:

$$\mathcal{S}x \triangleq \begin{bmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & p_1 & q_0 & p_0 & 0 & 0 \\ q_2 & p_2 & q_1 & p_1 & q_0 & p_0 \\ q_3 & p_3 & q_2 & p_2 & q_1 & p_1 \\ 0 & 0 & q_3 & p_3 & q_2 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 & p_3 \end{bmatrix} x = 0, \quad \hookrightarrow \quad \exists x \neq 0 \text{ sse } \det(\mathcal{S}) = 0 \ldots$$

$\mathcal{S}$ é denominada matriz de Sylvester associada aos polinômios $p(s)$ e $q(s)$, podendo ser construída de diversas maneiras equivalentes, dependendo do empilhamento escolhido para o vetor x

$\rightsquigarrow$ Os polinômios são coprimos sse $\det(S) \neq 0$, i.e., $x \equiv 0$ e $\nexists\, a(s)$ e $b(s) \neq 0$

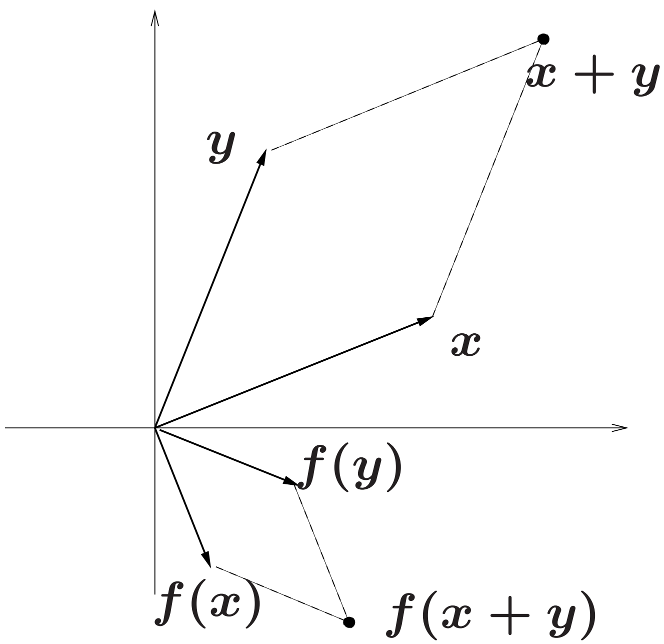
Função Linear

Uma função $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear se:

$\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{f(x+y) = f(x) + f(y)}$, $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$

$\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{f(\alpha x) = \alpha f(x)}$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$

i.e., verifica-se o princípio da superposição

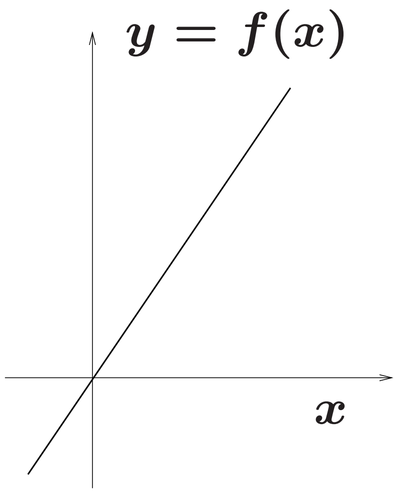


Exemplo: $\boldsymbol{f(x) = Ax}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

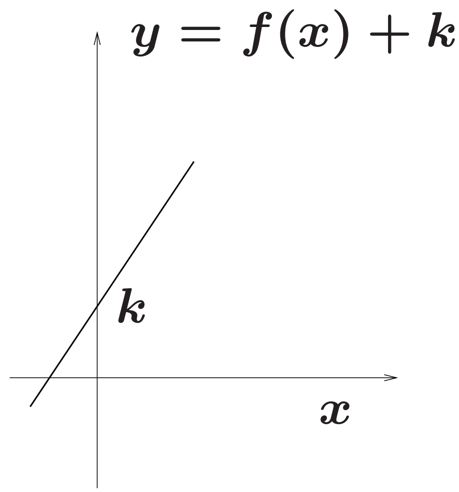
$\rightsquigarrow$ Qualquer função linear $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pode ser escrita na forma $\boldsymbol{f(x) = Ax}$

Funções

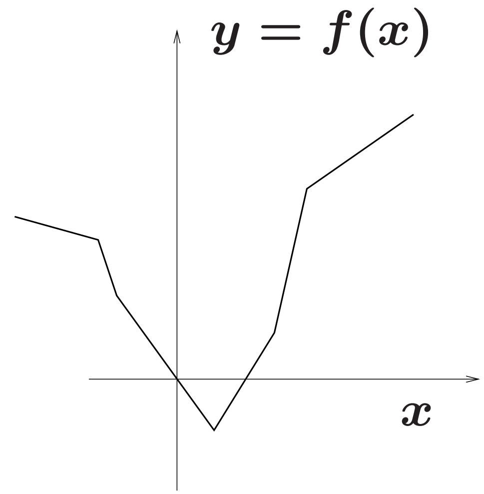
Linear



Afim



Linear por partes



Linearização

⇝ Funções não-lineares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciáveis em $x_0 \in \mathbb{R}^n$

⇝ Para x próximo de x_0, $f(x)$ aproxima-se de $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$

⇝ $Df(x_0)_{ij} = \left.\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_0}$ $\rightarrowtail$ Matriz Jacobiana

⇝ Se $y = f(x)$ e $y_0 = f(x_0)$, definem-se: $\delta x \triangleq x - x_0$ (variação da entrada) e $\delta y \triangleq y - y_0$ (variação da saída). Então

$$\delta y = f(x) - f(x_0) \approx \cancel{f(x_0)} + Df(x_0)\delta x - \cancel{f(x_0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\delta y \approx Df(x_0)\delta x$$

⇝ Para pequenas variações em torno de x_0 $\rightarrowtail$ aproximadamente linear

Exemplo

Considere o sistema não-linear descrito por:

$$\ddot{y}(t) + (1 + y(t))\dot{y}(t) - 2y(t) + 0.5y^3(t) = 0$$

Definindo-se $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$, tem-se o modelo em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_1 - \frac{x_1^3}{2} - (1 + x_1)x_2 \end{bmatrix} = f(x(t))$$

A matriz Jacobiana é dada da forma:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 - \frac{3x_1^2}{2} - x_2 & -(1 + x_1) \end{bmatrix}$$

Para um ponto de equilíbrio x_e dado, a matriz Jacobiana é constante

Sistemas Lineares – Curiosidade

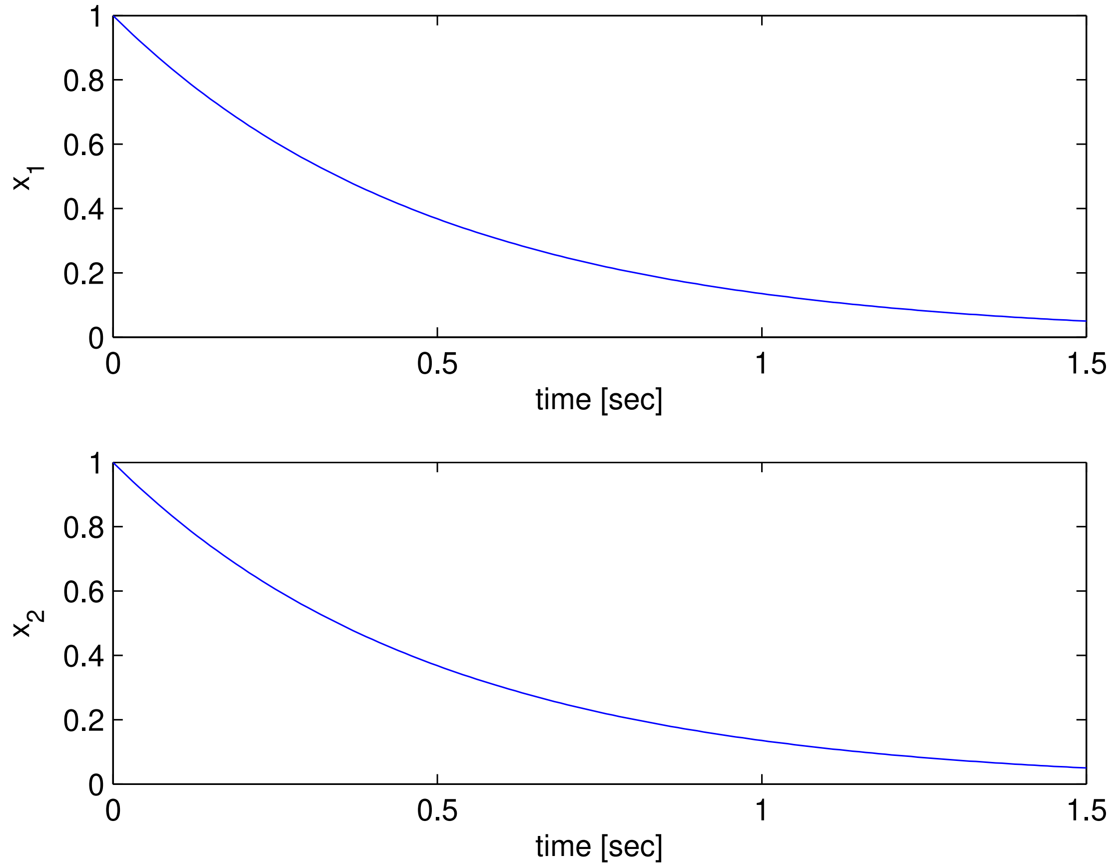
⇝ Considere o sistema dinâmico linear:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u(t) \end{cases}$$

condições iniciais: $x_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $x_2(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

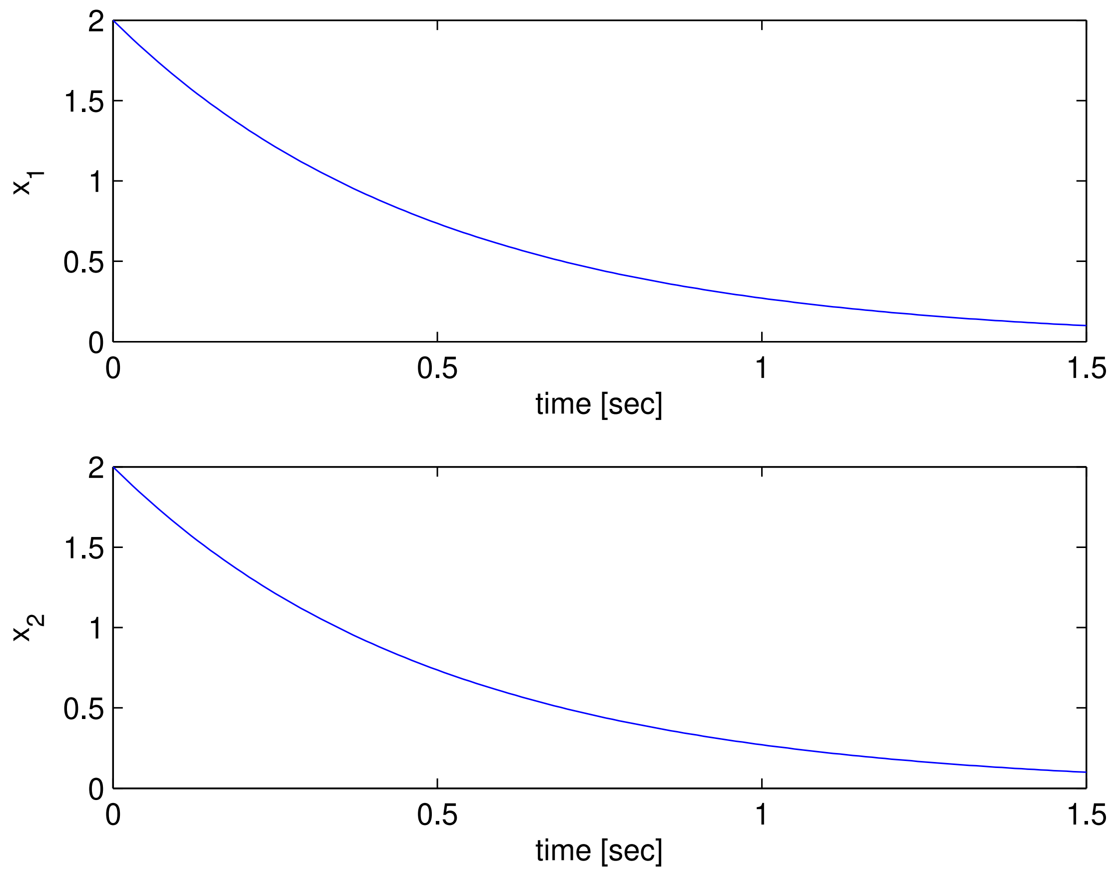
Sistemas Lineares – Curiosidade

⇝ Sistema autônomo com entrada nula $(u = 0)$ e condição inicial $x_1(0)$:



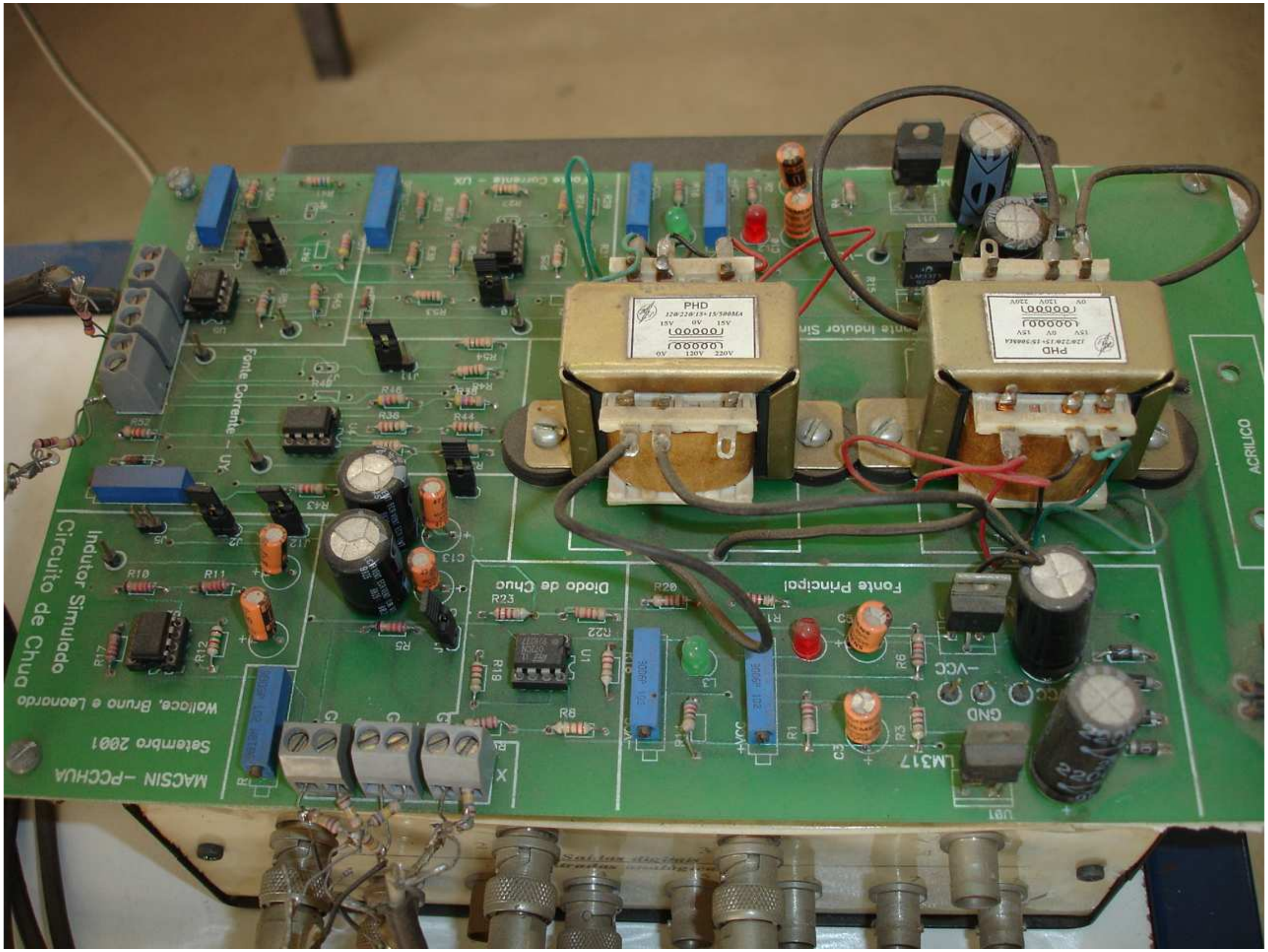
Sistemas Lineares – Curiosidade

⇝ Sistema autônomo com entrada nula ($\boldsymbol{u = 0}$) e condição inicial $\boldsymbol{x_2(0)}$:

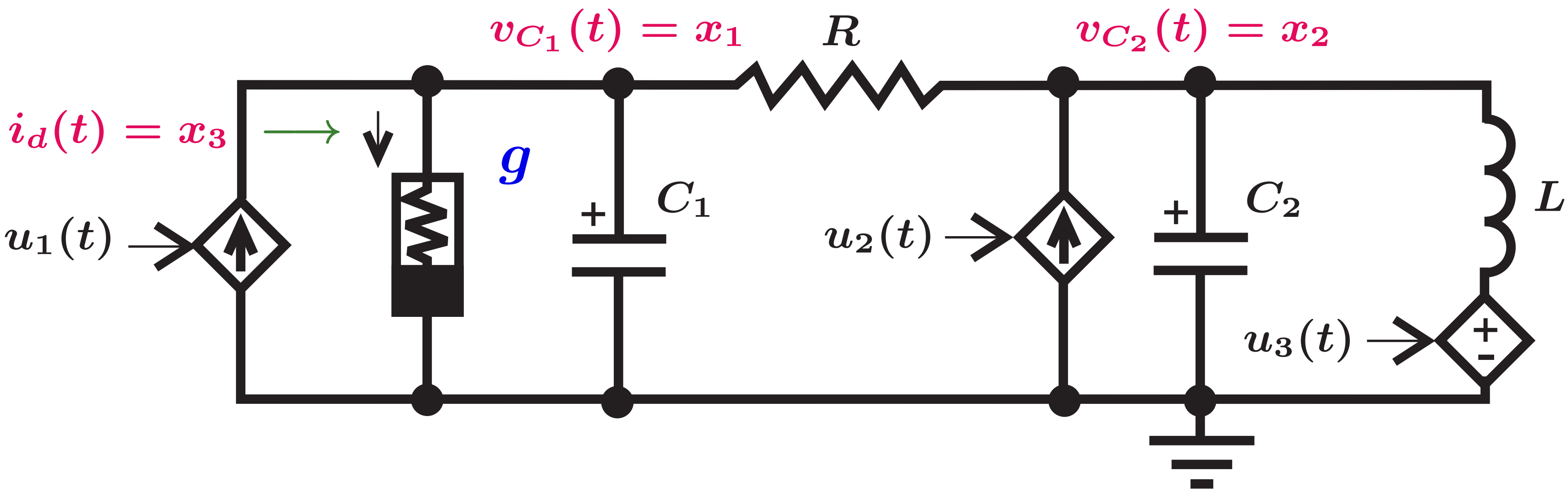


Há diferenças significativas na resposta temporal para condições iniciais diferentes?

Sistemas Não-Lineares – PCCHUA



Resistor não-linear g – Diodo de CHUA

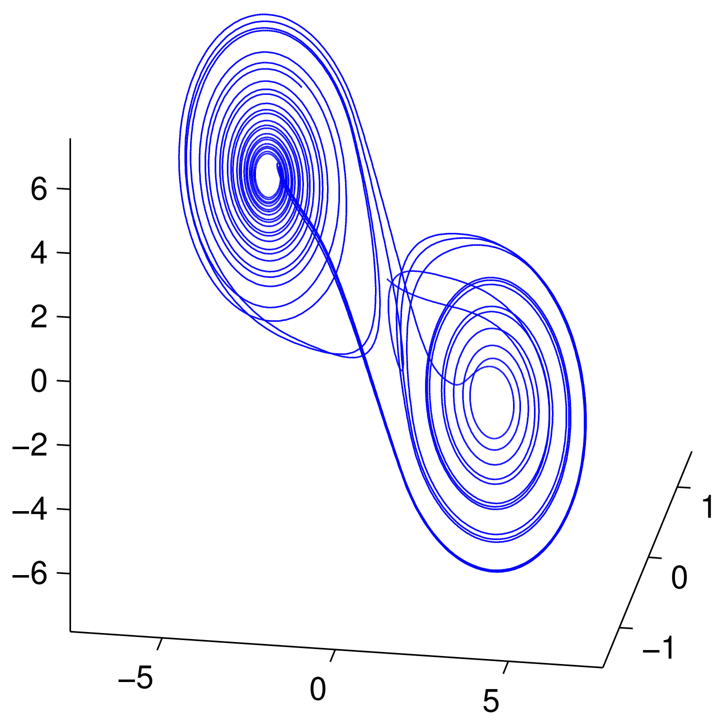


Modelo em Espaço de Estados?

$$
\begin{cases}
\dfrac{dv_{C_1(t)}}{dt} = \dot{x}_1(t) = \dfrac{1}{C_1}\left\{\dfrac{x_2(t)}{R} - \dfrac{x_1(t)}{R} - g(x_1(t))\right\} \\[2ex]
\dfrac{dv_{C_2}(t)}{dt} = \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{C_2}\left\{\dfrac{x_1(t)}{R} - \dfrac{x_2(t)}{R} + x_3(t)\right\} \\[2ex]
\dfrac{di_d(t)}{dt} = \dot{x}_3(t) = -\dfrac{x_2(t)}{L} - \dfrac{R_0}{L}x_3(t)
\end{cases}
$$

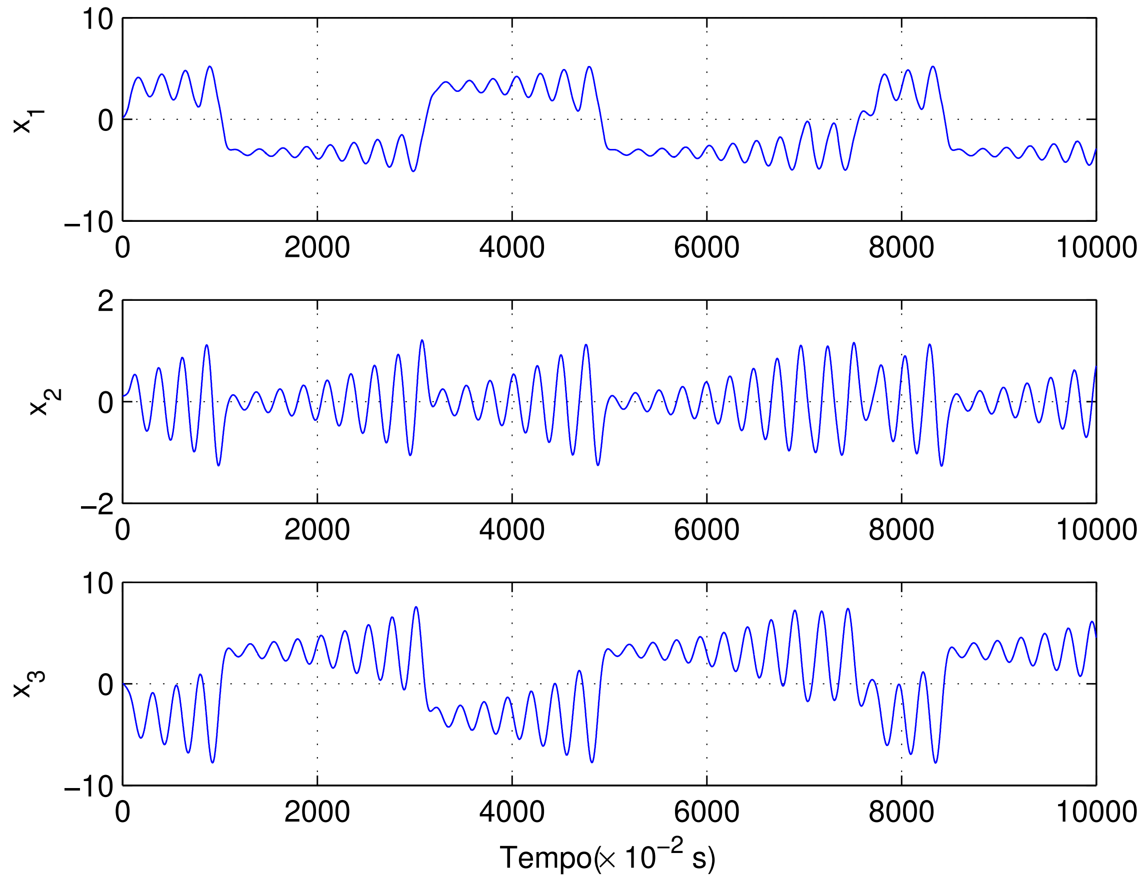
Sensível à condição inicial?

⇝ Depende da condição inicial, $x(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}'$



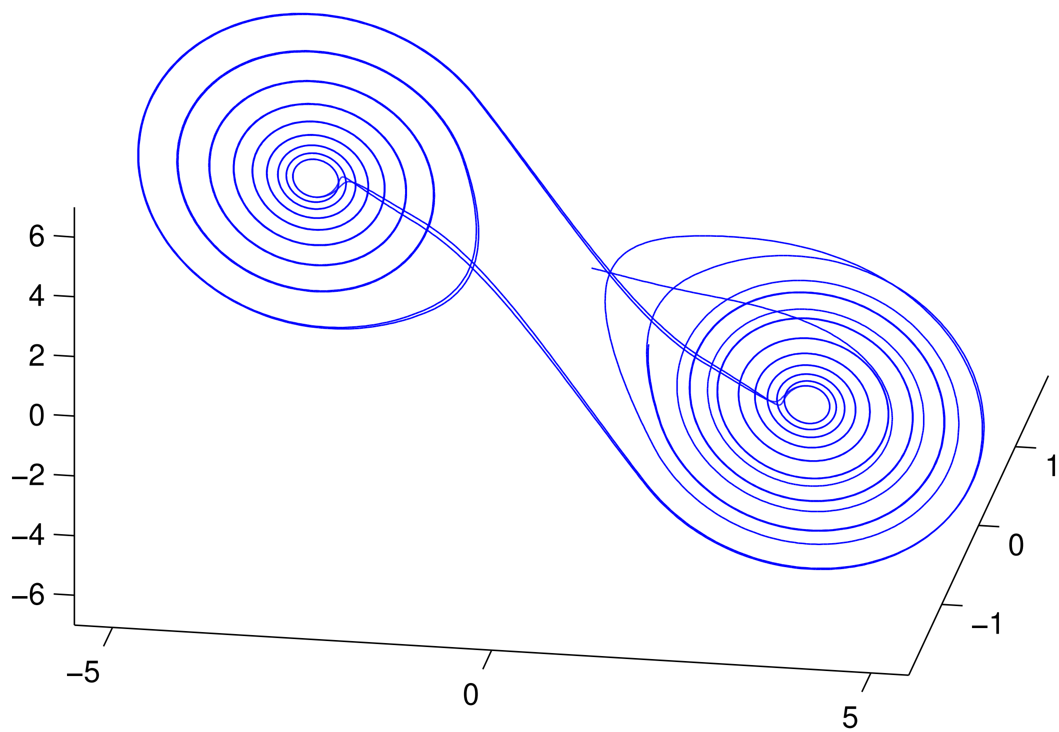
Sensível à condição inicial?

⇝ Ainda com a mesma condição inicial: $x(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0.1} & \mathbf{0.1} & \mathbf{0.1} \end{bmatrix}'$



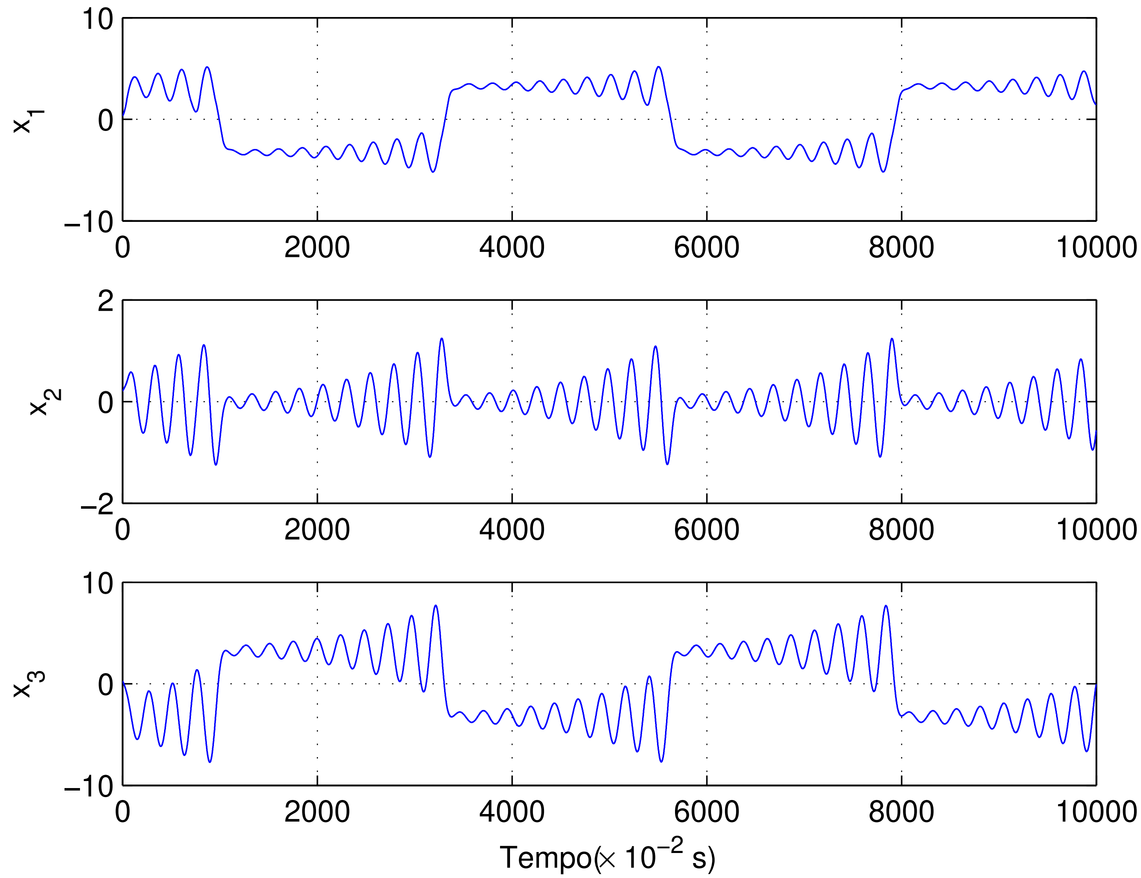
Sensível à condição inicial?

⇝ Outra condição inicial, $x(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{0.3} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.3} \end{bmatrix}'$



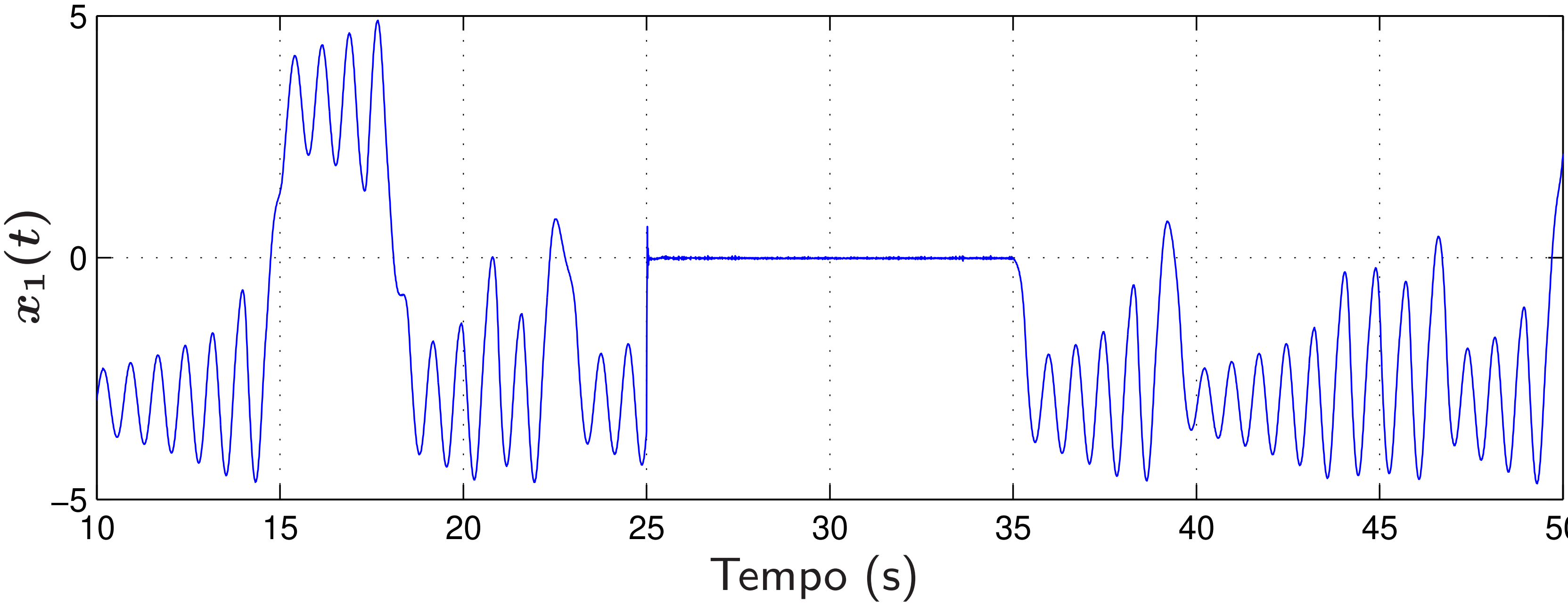
Sensível àa condição inicial? Caótico...

⇝ Ainda com a outra condição inicial, $x(0) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}'$



A resposta do sistema pode “ser alterada”?

$\rightsquigarrow$ Por exemplo, forçar que a tensão $v_{C_1}(t)$ (ou x_1) se anule durante o intervalo de tempo 25s e 35s. Como?



MATLAB

- `det(A)` – determinante de uma matriz quadrada A
- `inv(A)` – inversa de uma matriz quadrada A
- `A'` – conjugada transposta de uma matriz A
- `eig(A)` – retorna os autovalores de uma matriz quadrada A
- `[V,D]=eig(A)` – retorna duas matrizes: V corresponde ao autovetores de A e D (diagonal) corresponde aos autovalores de A
- `lsim` – simula a resposta temporal de um modelo linear e invariante no tempo para entradas arbitrárias