# Nyquist, Função de Sensibilidade e Desempenho Nominal


1. Revisitando o critério de estabilidade de Nyquist
   1.1. Margens de ganho e de fase
2. Erro de rastreamento e função de sensibilidade
   2.1. Vetor de margem de ganho
   2.2. Exemplo
3. Desempenho nominal
   3.1 Intrepretação gráfica por Nyquist
   3.2 Robustez ?

# Revisitando o Critério de Nyquist

- Por que estudar o critério de Nyquist? É a forma mais adequada para analisar especificações de desempenho e estabilidade robusta no domínio da freqüência

- Veja que para determinar a estabilidade relativa de um sistema em malha fechada, deve-se investigar a equação característica do sistema:

$$F(s) = 1 + KD(s)G(s) = 0 \qquad \text{(para sistemas contínuos)}$$

$$F(z) = 1 + KD(z)G(z) = 0 \qquad \text{(para sistemas discretos)}$$

onde $G(\cdot)$ denota a planta e $KD(\cdot)$ denota a forma ganho, pólo, zero do controlador

# Revisitando o Critério de Nyquist

## Teorema de Cauchy

*"Se um contorno $\Gamma_S$ no plano-s cerca* **Z** *zeros e* **P** *pólos da função $F(s)$ e não cruza nenhum pólo ou zero de $F(s)$, e ainda, a orientação do contorno é no sentido horário; o contorno correspondente $\Gamma_F$ no plano-$F(s)$ cerca a origem do plano-$F(s)$*

$$\mathbf{N} = \mathbf{Z} - \mathbf{P} \ \ \text{vezes}$$

*no sentido horário"*

# Revisitando o Critério de Nyquist

- O critério de estabilidade de Nyquist procura determinar se existe algum zero da equação característica em malha fechada

$$F = 1 + KDG = 0$$

em uma **certa região** do plano complexo

- Como normalmente o ganho de malha $KD(\cdot)G(\cdot)$ pode estar na forma fatorada de polinômios, $a(\cdot)/b(\cdot)$. Então pode ser mais **conveniente** considerar uma variação da equação característica descrita por:

$$F' = F - 1 = KDG = 0$$

# Revisitando o Critério de Nyquist

O critério de Nyquist pode ser especificado da seguinte forma para sistemas a tempo contínuo:

> *"Um sistema realimentado é estável se e somente se o contorno $\boldsymbol{\Gamma_{F'}}$ no plano-$\boldsymbol{F'}$ não envolve o ponto $\mathbf{(-1, 0)}$ quando o número de pólos de $\boldsymbol{KD(s)G(s)}$ instáveis no plano-s é nulo $(\mathsf{P} = \mathbf{0})$"*

Quando o número de pólos de $\boldsymbol{KD(s)G(s)}$ no lado direito do plano-s é não nulo, o critério de Nyquist é posto da seguinte forma:

> *"Um sistema realimentado é estável se e somente se, para o contorno $\boldsymbol{\Gamma_{F'}}$ no plano-$\boldsymbol{F'}$ o número de cercos no sentido anti-horário do ponto $\mathbf{(-1, 0)}$ é igual ao número de pólos de $\boldsymbol{KD(s)G(s)}$ instáveis no plano-s $(\mathsf{N} = -\mathsf{P})$"*

# Revisitando o Critério de Nyquist

Ao contrário do caso a tempo contínuo, o contorno $\boldsymbol{\Gamma}$ selecionado no plano-z para sistemas a tempo discreto envolve a **região de estabilidade**

- Da mesma forma que no caso contínuo, o número de **pólos instáveis** na equação característica, **P**, é conhecido. Resta determinar o número de **zeros instáveis**, **Z**, da equação característica

- Veja que o número total de pólos (incluindo os estáveis e instáveis) é igual ao número de zeros da equação característica, isto é, 'n'

Portanto o número de **zeros estáveis** é dado por

$$\boldsymbol{n} - \mathbf{Z}$$

e o número de de **pólos estáveis** é

$$\boldsymbol{n} - \mathbf{P}$$

# Revisitando o Critério de Nyquist

Aplicando o Teorema de Cauchy, o mapeamento do contorno do círculo de raio unitário através de $F'(z) = 1 + F(z)$ no plano-$F'$, envolverá a origem **N** vezes sempre que:

$$\mathsf{N} = (n - \mathsf{Z}) - (n - \mathsf{P}) = \mathsf{P} - \mathsf{Z}$$

Portanto o critério de Nyquist para sistemas discretos é

$$\mathsf{Z} = \mathsf{P} - \mathsf{N}$$

## Notas

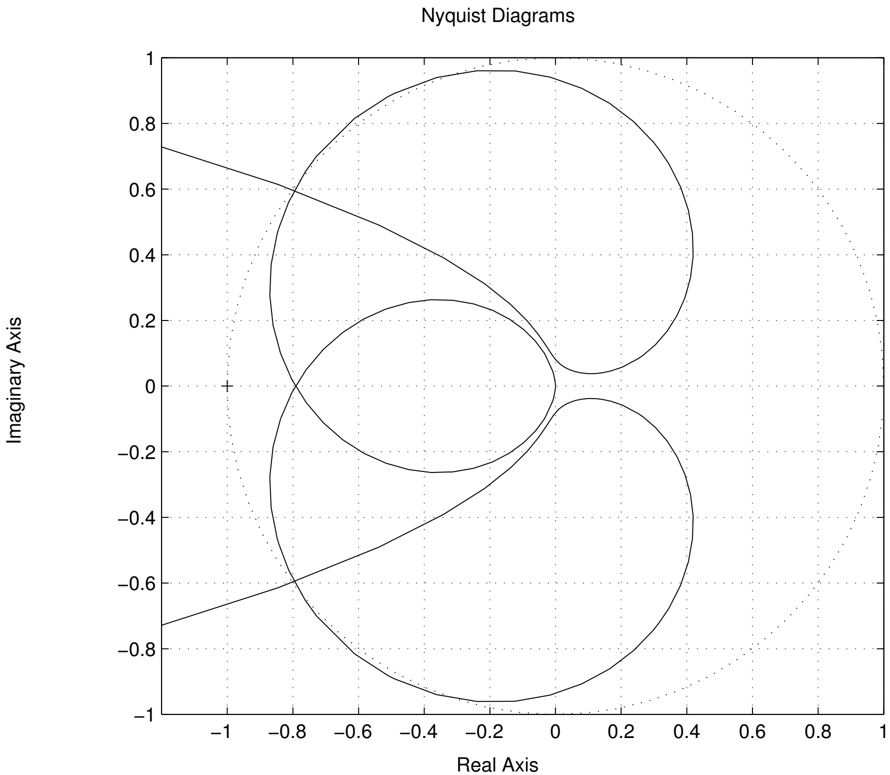
- O contorno envolvendo o círculo unitário é tomado no **sentido anti-horário**, isto é, de $0$ rad $\longrightarrow \pi$ rad $\longrightarrow 2\pi$ rad
- Faça **N** igual ao número de cercos no **sentido anti-horário** do ponto -1

# Revisitando o Critério de Nyquist

**Exemplo** Considere o seguinte ganho de malha:

$$KD(s)G(s) = K \times \frac{(s+1)(s^2+2s+43.25)}{s^2(s^2+2s+82)(s^2+2s+101)}$$

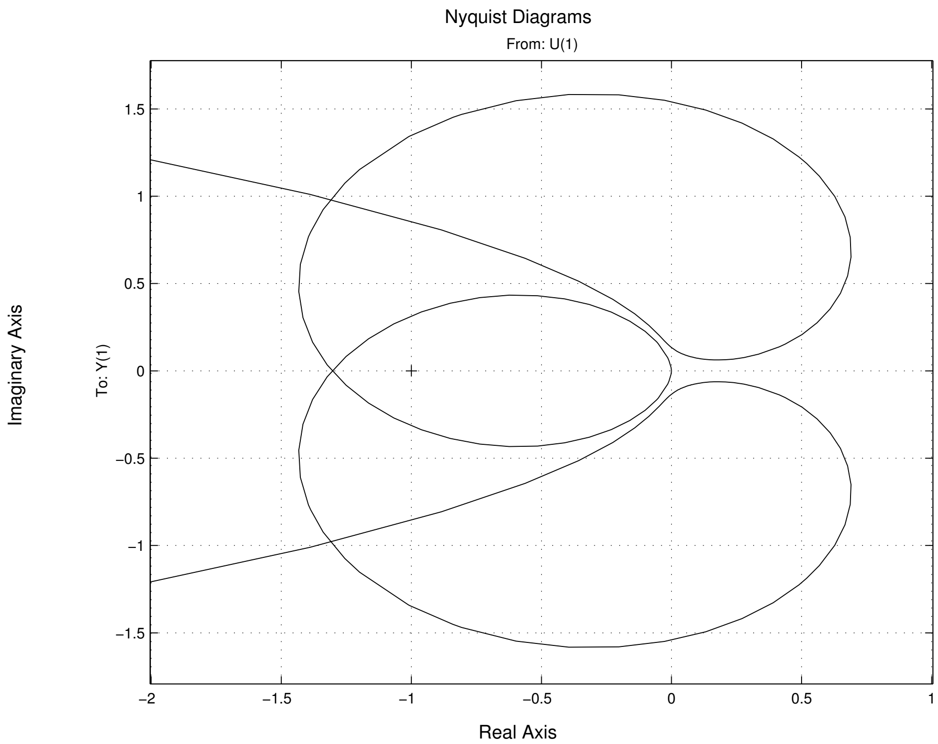
Os pólos são $s_{1,2} = 0$, $s_{3,4} = -1 \pm 10i$ e $s_{5,6} = -1 \pm 9i$. O contorno $\Gamma_{F'}$ no plano-$F'$ é apresentado abaixo para $K = 85$




$$\mathsf{Z} = \mathsf{N} + \mathsf{P} = 0 + 0 = 0$$

# Revisitando o Critério de Nyquist

Por outro lado, considere o ganho estático igual a $\boldsymbol{K = 140}$. O respectivo diagrama de Nyquist é apresentado abaixo




$$\mathbf{Z = N + P = 2 + 0 = 2}$$

- Uma simples verificação dos pólos em malha fechada obtém-se: $\boldsymbol{0.1817 \pm 10.4502i}$; $\boldsymbol{-1.8162 \pm 8.5242i}$; $\boldsymbol{-0.3655 \pm 0.7721i}$ **(instabilidade!!)**

## Revisitando o Critério de Nyquist

Sob a ótica do critério de estabilidade de Nyquist pode-se definir duas margens de estabilidade em relação ao ponto critíco $(-1, 0)$:

- *"Margem de Ganho – MG – é o incremento no ganho do sistema quando a fase é* $-180^0$ *que resultará em um sistema marginalmente estável com a intersecção do ponto* $(-1, 0)$ *no diagram de Nyquist"*

- *"Margem de Fase – MF – é a quantidade de deslocamento em fase de* $DG$ *na magnitude* $1$ *que resultará em um sistema marginalmente estável com a intersecção do ponto* $(-1, 0)$ *no diagram de Nyquist"*

# Erro de Rastreamento e Função Sensibilidade

- As margens de ganho e fase fornecem uma medida de **estabilidade relativa** para **sistemas nominais**, porém podem eventualmente ser um indicador de projeto "impreciso" para alguns sistemas

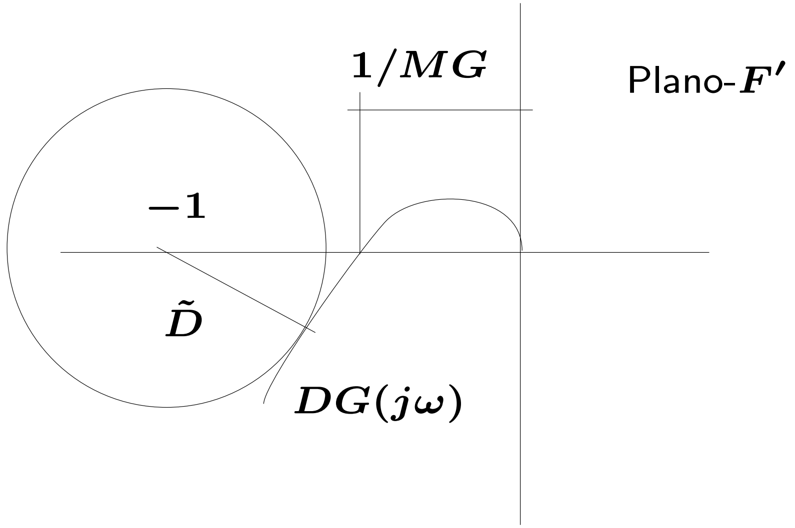
- Pode-se obter uma "margem" mais "robusta" em termos da função de sensibilidade.

Do esquema de realimentação unitária padrão o erro de rastreamento é dado por

$$\boldsymbol{E(j\omega) = \frac{1}{1 + D(j\omega)G(j\omega)} R(j\omega) \triangleq \mathcal{S}(j\omega)R(j\omega)}$$

onde $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ é definida como sendo a função de sensibilidade

A distância do ponto $-1$ ao **ponto mais próximo** da curva de Nyquist $DG$ é dado por $\tilde{D}$ na figura abaixo

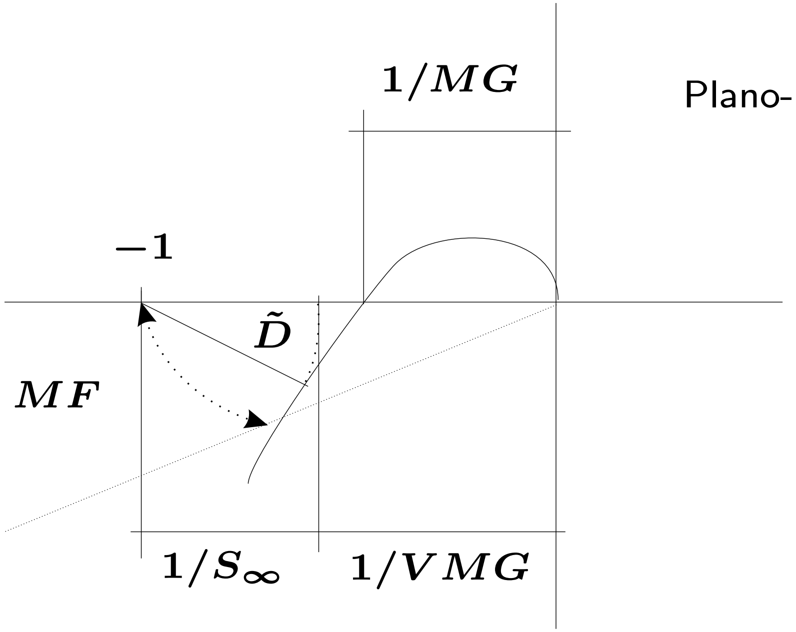



$$
\begin{aligned}
\tilde{D} &= \text{Menor distância do ponto } -1 \text{ a curva de Nyquist} \\
&= \min_{\omega} |-1 - DG(j\omega)| = \min_{\omega} |1 + DG(j\omega)| \\
&= \left( \max_{\omega} \left[ \frac{1}{|1 + DG(j\omega)|} \right] \right)^{-1} = \left( \max_{\omega} |\mathcal{S}(j\omega)| \right)^{-1}
\end{aligned}
$$

definindo-se $\mathcal{S}_\infty \triangleq \max_\omega |\mathcal{S}(j\omega)|$, obtém-se $\tilde{D} = \frac{1}{\mathcal{S}_\infty} = \mathcal{S}_\infty^{-1}$

Portanto a menor distância entre a curva de Nyquist e o ponto $-1$ é $1/\mathcal{S}_\infty$ ou, em outras palavras, a maior magnitude da função sensibilidade na freqüência, $\omega$, produz a **maior proximidade** com o ponto $-1$ !!

- No diagrama de Nyquist abaixo, VMG é denominado vetor de margem de ganho



## Nota

Do diagrama anterior, pode-se notar que se a curva de Nyquist aproxima-se do ponto $-1$ sobre o eixo real negativo, então o VMG será exatamente a MG

Ainda da figura anterior, tomando as quantidades $\tilde{D} = 1/\mathcal{S}_\infty$ e VMG, obtém-se

$$\frac{1}{VMG} + \frac{1}{\mathcal{S}_\infty} = 1$$

e portanto o vetor de margem de ganho é dado por:

$$VMG = \frac{\mathcal{S}_\infty}{\mathcal{S}_\infty - 1}$$

# Erro de Rastreamento e Função Sensibilidade

**Exemplo** Considere o processo instável representado pela planta

$$G(s) = \frac{2 - s}{2s - 1}$$

São propostos dois controladores $KD(s)$ para esta planta:

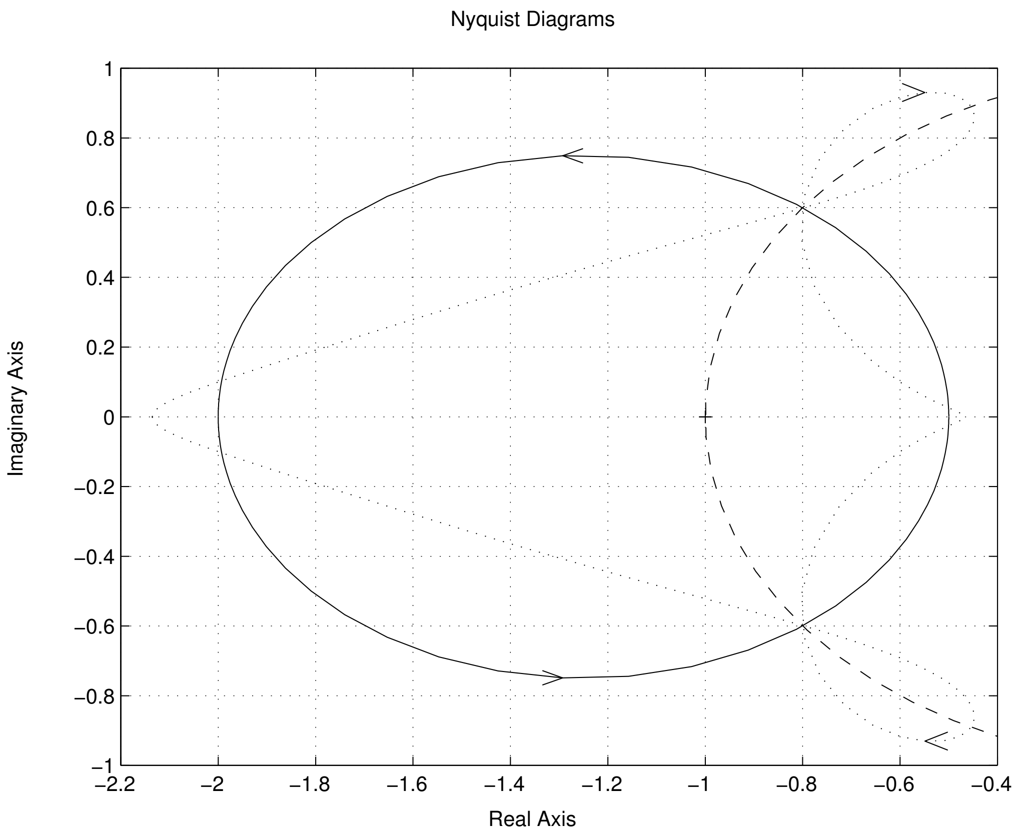
1. $KD_1 = 1$
2. $KD_2 = \dfrac{s + 3.3}{3.3s + 1} \times \dfrac{s + 0.55}{0.55s + 1} \times \dfrac{1.7s^2 + 1.5s + 1}{s^2 + 1.5s + 1.7}$

**a)** Os controladores estabilizam o sistema em malha fechada?

**b)** Se algum estabiliza, qual é a margem de fase e de ganho?

**c)** Qual dos controladores é mais robusto?

**a)** Considere os diagramas de Nyquist para $L_i = KD_iG$, $i = 1, 2$ abaixo




O diagrama $L_1 = KD_1G$ é a linha cheia '–' e $L_2 = KD_2G$ é a linha pontilhada ':'

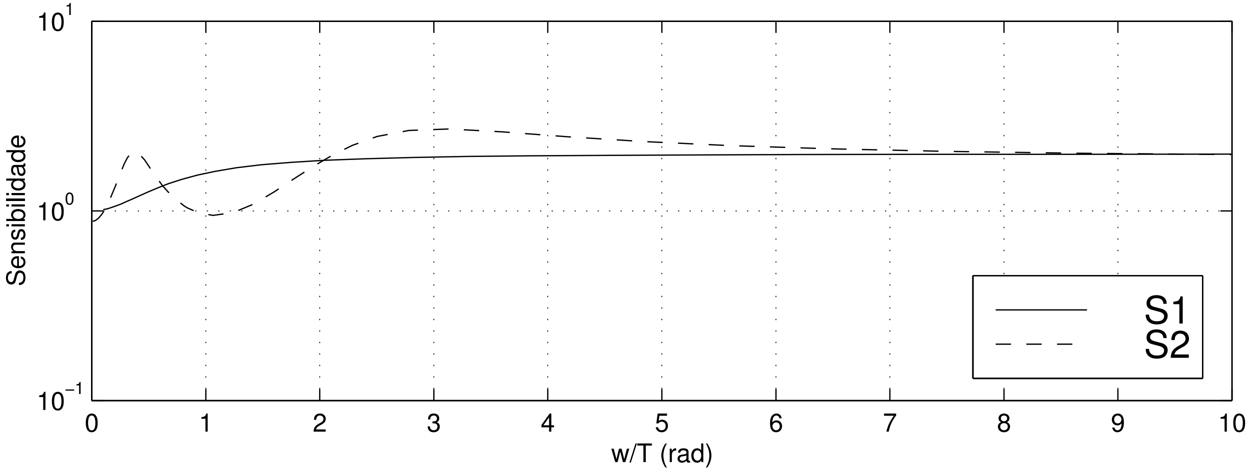
## Erro de Rastreamento e Função Sensibilidade

Veja que o número de pólos instáveis do ganho de malha é **P**$= \mathbf{1}$. Analisando os diagramas de Nyquist nota-se que para cada controlador obtém-se um envolvimento no sentido anti-horário, **N**$= -\mathbf{1}$, e portanto **Z**$= \mathbf{0}$ (indicando estabilidade!)

**b)** Os valores de Margens de fase *são iguais* para os dois controladores: MF$= \mathbf{36.87^0}$. Para o controlador 1, obtém-se $\boldsymbol{MG \approx 1/0.55 = 1.82}$ e para o controlador 2, $\boldsymbol{MG = 1/0.5 = 2}$

**c)** Veja que a noção de "robustez" pode ser também analisada em termos das variações das funções de sensibilidade em função da freqüência para cada controlador, como apresentado abaixo

# Erro de Rastreamento e Função Sensibilidade




Pode-se concluir que apesar da MG do controlador 2 ser *um pouco maior*, sob a ótica da análise envolvendo a função sensibilidade $\boldsymbol{\mathcal{S}}$, é o controlador cuja curva de Nyquist mais se aproxima do ponto $-\mathbf{1}$, pois possui a maior magnitude $\forall\boldsymbol{\omega}$. Pode-se concluir então que o controlador 1 é o mais "robusto" quando se analisa variações conjuntas de MG e MF

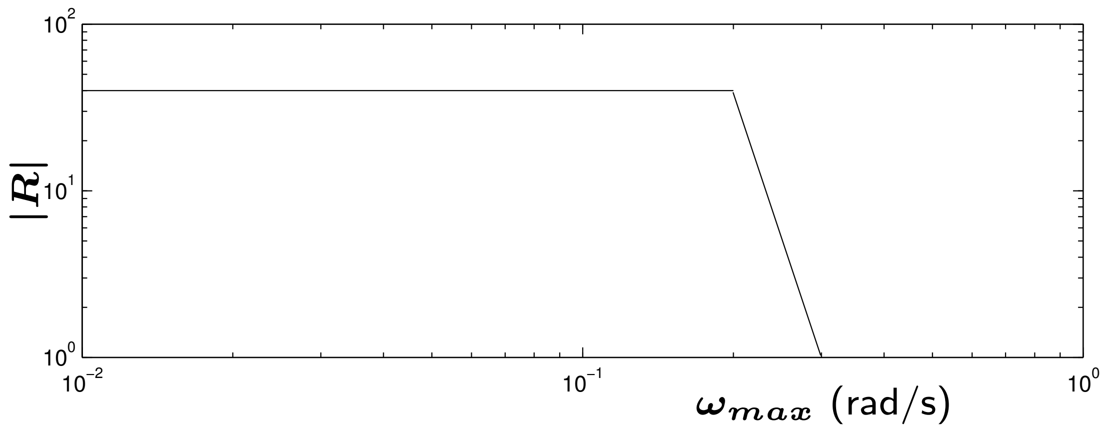
# Desempenho Nominal

- É possível obter especificações de projeto no domínio da freqüência de caráter mais geral do que as MG, MF e VMG se for possível fornecer uma descrição em freqüência para a entrada de referência e os sinais de distúrbio. Tal condição é conhecida por **desempenho nominal**

- Supondo que os sinais possam ser processos aleatórios com espectro de freqüência em um domínio especificado, ter-se-ia um caráter mais geral

# Desempenho Nominal

Para ilustração, considere sinais descritos por soma de senóides com freqüências em um domínio especificado. Para se descrever um envelope em freqüência deste sinal de entrada, pode-se considerar a soma das senóides com amplitudes englobadas por uma função magnitude $|\boldsymbol{R}|$. Exemplificando, suponha que a entrada de rastreamento seja uma composição de senóides onde cada uma tenha magnitude máxima de $\mathbf{40}$ até um certo valor de freqüência, $\boldsymbol{\omega_{max}}$ e valores muito pequenos em magnitude para valores de freqüência superior a $\boldsymbol{\omega_{max}}$ como ilustrado abaixo



# Desempenho Nominal

Posto isto, uma **especificação de resposta** poderia ser descrita em termos do erro de rastreamento da seguinte forma:

> *"A magnitude do erro de rastreamento do sistema é menor do que uma margem pré-especificada, '$\ell_{erro}$', (por exemplo, valores abaixo de $0.01$), para qualquer senóide com freqüência $\omega_\ell$ e amplitude $|R(j\omega_\ell)|$"*

- Já sabe-se que a função sensibilidade, $\mathcal{S}$, é diretamente proporcional ao erro de rastreamento, além disso **quantifica a relação de uma entrada de referência sobre o erro**. Particularmente para um valor pré-determinado de margem de erro de rastreamento desejado obtém-se em magnitude:

$$|E| \;=\; |\mathcal{S}|\,|R| < \ell_{erro}$$

# Desempenho Nominal

No intuito de tornar a análise **"independente"** do espectro da entrada $\boldsymbol{R}$ e do limitante do erro ($\boldsymbol{\ell_{erro}}$), pode-se normalizar o problema definindo-se um função auxiliar que em magnitude é dada por:

$$|\boldsymbol{W_1}| = \frac{|\boldsymbol{R}|}{\boldsymbol{\ell_{erro}}}$$

tal que

$$|\boldsymbol{\mathcal{S}}| \times \frac{|\boldsymbol{R}|}{\boldsymbol{\ell_{erro}}} = |\boldsymbol{\mathcal{S}}|\,|\boldsymbol{W_1}| < \boldsymbol{1}, \quad \forall \omega$$

ou simplesmente: $$|\boldsymbol{\mathcal{S}}| < |\boldsymbol{W_1}|^{-1}, \quad \forall \omega$$

- Portanto um bom desempenho em termos do erro de rastreamento é obtido se a curva de magnitude de $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ está **"embutida"** na curva de magnitude de $|\boldsymbol{W_1}|^{-1}$, que por sua vez relaciona a entrada $\boldsymbol{R}$ e o nível de erro, $\boldsymbol{\ell_{erro}}$

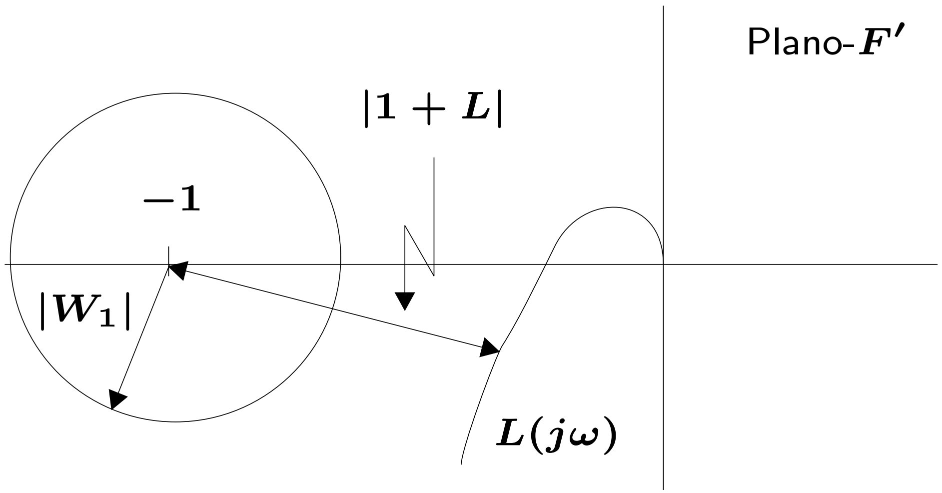
# Desempenho Nominal

**Nota** Pode-se obter uma interpretação gráfica bastante interessante para a relação de desempenho nominal em termos do diagrama de Nyquist. Usando o fato que o ganho de malha é $L = DG$, veja que

$$|\mathcal{S}|\ |W_1| = \left|\frac{1}{1+L}\right| \times |W_1| < 1, \qquad \Leftrightarrow \qquad |W_1| < |1+L|\,, \quad \forall\omega$$

Note que $|1+L|$ representa a cada freqüência a **distância** da curva de Nyquist, $L(j\omega)$, ao ponto $-1$. Então para o desempenho nominal ser verificado, necessariamente a curva de Nyquist $L(j\omega)$ não pode interceptar o disco de raio $|W_1|$ centrado no ponto -1, como ilustrado a seguir

# Desempenho Nominal




Note que se o ganho de malha $L \gg 1$, então $|\mathcal{S}| \approx 1/\,|DG|$, portanto

$$\frac{|W_1|}{|DG|} < 1 \qquad \Rightarrow |DG| > |W_1| \ , \quad \forall\omega$$

**Exemplo** Considere um sistema com realimentação unitária onde se deseja $\ell_{erro} = 0.005$ para qualquer entrada senoidal com amplitude unitária ($|R| = 1$) e freqüência menor do que 100 Hz. Esboçe a função de desempenho $W_1$ para este projeto

**Solução** Em rad/s obtém-se o domínio $0 \leq \omega \leq 2\pi f = 200\pi$. Veja que para $\ell_{erro} = 0.005$ implica que a função $W_1$ procurada é um filtro com amplitude $|R| / \ell_{erro} = 200$ e corte em $200\pi$ rad/s. A figura abaixo ilustra esta função $W_1$