Representação e Análise de Sistemas Dinâmicos Lineares

1. Por que Realimentação? Efeitos da Realimentação
2. Revisando fundamentos matemáticos
   2.1. Singularidades: Polos e zeros
3. Equações Diferencias Ordinárias (EDO) lineares
   3.1 Conceito de estado e solução de EDO via Espaço de Estados
   3.2 Solução de EDO via Expansão em Frações Parciais – Funções de Transferência (FT)
4. Sistema de 2a. ordem, localização de raízes e resposta temporal
5. BIBO estabilidade
6. Funções de Transferência e Espaço de Estados

Por que Realimentar?

Razões fundamentais para se usar realimentação?

- Garantir (ou impor) estabilidade em malha fechada
- Modificar o desempenho do sistema (e.g., resposta mais rápida)
- Reduzir o efeito de "perturbações externas" (que são desconhecidas!)
- Efeito positivo ao aumentar a robustez do sistema se há incertezas associadas a modelagem adotada (imprecisões, aproximações, envelhecimento)

Fundamentos Matemáticos

Variáveis Complexas Funções de uma variável complexa

$$s = \sigma + j\omega$$

$$G(s) = \mathrm{Re}\{G(s)\} + j\,\mathrm{Im}\{G(s)\}$$

Exemplo – Função racional em "s" (i.e., razão de dois polinômios em s)

$$G(s) = \frac{(s+2)}{s(s-1)}$$ (Grosso modo é uma **Função de Transferência (FT)**)

Singularidade de uma Função Racional em “s“

Para uma função de transferência racional própria $G(s)$, λ é chamado de:

Polo de $G(s)$ se $|G(\lambda)| = \infty$ e **Zero de $G(s)$** se $|G(\lambda)| = 0$

▷ $G_1(s) = \dfrac{(s+2)}{s(s-1)}$. Zero em $s = -2$. Polos em $s = 0$ e $s = +1$

▷ $G_2(s) = \dfrac{10(s+2)}{(s+1)(s+3)^2}$. Zero em $s = -2$. Polos em $\{-1; -3; -3\}$

Curiosidade Note que se a FT é estritamente própria como, e.g., em $G_1(s)$, então $G_1(\infty) = 0$ e $\lambda = \infty$ poderia ser um “zero” (dependendo da definição)

$\rightsquigarrow$ Toda função racional **tem o mesmo número de zeros e polos** (consideradas suas multiplicidades e os zeros no infinito)

Equações Diferencias Ordinárias (EDO)

Sistemas dinâmicos são frequentemente descritos por equações diferenciais!

Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear de ordem n

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

Exemplo Circuito RLC série

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = e(t)$$

Equação diferencial não-linear Pêndulo simples

$$ML\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + Mg\left\{\text{sen}\theta(t)\right\} = 0$$ (Há modelo linearizado?)

Equações de Estado – Espaço de Estados

Estado é o resumo ("fotografia") completo do *status* do sistema em um instante de tempo particular

▷ No instante $t = t_0$, as variáveis de estado definem as condições iniciais

▷ As **variáveis de estado** são definidas como o **conjunto mínimo de variáveis**, $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_n(t)$, tal que o conhecimento dessas variáveis no instante inicial t_0, em conjunto com o sinal de entrada aplicado, é suficiente para **determinar o estado do sistema em qualquer instante de tempo $t > t_0$!!**

▷ Dada uma equação diferencial ordinária linear de ordem n o número de variáveis de estado é igual a ordem da EDO, i.e., n

Equações de Estado – Espaço de Estados

Da equação diferencial ordinária (EDO) linear de ordem n:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

Pode-se definir n variáveis de estado (a ordem ou símbolo atribuído a variável de estado é irrelevante! Livre escolha...). Então uma escolha poderia ser:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t) & \Leftrightarrow \quad & \dot{x}_1(t) = \frac{dy(t)}{dt} = x_2(t) \\
x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} & \Leftrightarrow \quad & \dot{x}_2(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x_3(t) \\
x_3(t) &= \frac{d^2 y(t)}{dt^2} & \Leftrightarrow \quad & \dot{x}_3(t) = \frac{d^3 y(t)}{dt^3} = x_4(t) \\
&\vdots & & \vdots \\
x_n(t) &= \frac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} & \Leftrightarrow \quad & \frac{dx_n(t)}{dt} = -\frac{a_0}{a_n} x_1(t) - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) + \frac{f(t)}{a_n}
\end{aligned}$$

Equações de Estado – Espaço de Estados

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & -a_3/a_n & \cdots & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/a_n \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{f(t)}_{u(t)}$$

Ou, em notação compacta: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^1$

Equações de Estado – Espaço de Estados

Exemplo Para o circuito RLC série: $Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = e(t)$

Reescreva: $Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} + v_C(t) = e(t)$, sendo que: $i_L(t) = C\dot{v}_C(t)$

Definem-se como variáveis de estado a corrente no indutor e tensão no capacitor:

$$x_1(t) = i_L(t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = v_C(t)$$

Então: $\dot{x}_1(t) = -\dfrac{R}{L}x_1(t) - \dfrac{1}{L}x_2(t) + \dfrac{1}{L}e(t)$ e $\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}x_1(t)$

ou
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{e(t)}_{u(t)}$$

Equações de Estado – Espaço de Estados

Outra descrição em espaço de estados para o mesmo circuito RLC série?

Para o circuito RLC série: $Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = e(t)$, definem-se como variáveis de estado:

$$x_1(t) = \int i(t)dt \quad \text{e} \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t)$$

Então é fácil notar que $x_2(t) = i(t)$ e, por sua vez $\dot{x}_2(t) = \dfrac{di(t)}{dt}$

Portanto: $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ e $\dot{x}_2(t) = -\dfrac{1}{LC}x_1(t) - \dfrac{R}{L}x_2(t) + \dfrac{1}{L}e(t)$

ou $$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{e(t)}_{u(t)}$$

Solução de EDO lineares via Espaço de Estados?

▷ Uma mesma EDO tem diferentes representações em espaço de estado e todas são equivalentes entre si

▷ Representado a EDO linear na forma de espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$, pode-se computar a solução $x(t)$ (trajetórias!) para uma condição inicial $x(0)$ dada, da forma:

$$\boxed{\Rightarrow \quad x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

▷ Cômputo via Matlab usando: `lsim` - **simulador linear**

Solução de EDO via Expansão em Frações Parciais

1. Aplica-se a transformada de Laplace na equação diferencial
2. Resolve-se a equação algébrica em s para a variável de saída
3. Expande-se em frações parciais
4. Obtêm-se a solução no tempo via Transformada de Laplace inversa

1o. Caso – Polos reais distintos $\quad G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} = \dfrac{N(s)}{(s+s_1)\ldots(s+s_n)}$

$$G(s) = \frac{k_1}{s+s_1} + \ldots + \frac{k_n}{s+s_n}, \text{ sendo } k_i = (s+s_i)G(s)\Big|_{s=-s_i}$$

Exemplo – $G(s)$ tem polos reais distintos

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s+1}{s^3+s^2-6s} = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s-2} + \frac{k_3}{s+3}$$

$$k_1 = s\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=0} = \cancel{s}\frac{\overset{0}{s}+1}{\cancel{s}(\overset{0}{s}-2)(\overset{0}{s}+3)} = -\frac{1}{6}$$

$$k_2 = (s-2)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=2} = \cancel{(s-2)}\frac{\overset{2}{s}+1}{\overset{2}{s}\,\cancel{(s-2)}\,(\overset{2}{s}+3)} = \frac{3}{10}$$

$$k_3 = (s+3)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=-3} = \cancel{(s+3)}\frac{\overset{-3}{s}+1}{\overset{-3}{s}\,(\overset{-3}{s}-2)\,\cancel{(s+3)}} = -\frac{2}{15}$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$: $\quad g(t) = k_1 + k_2e^{2t} + k_3e^{-3t} = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10}e^{2t} - \frac{2}{15}e^{-3t}$

Solução de EDO via Expansão em Frações Parciais

2o. Caso – Polos reais repetidos $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} = \dfrac{N(s)}{(s+s_1)(s+s_2)^r}$

$$G(s) = \frac{k_1}{s+s_1} + \frac{k_{21}}{s+s_2} + \frac{k_{22}}{(s+s_2)^2} + \ldots + \frac{k_{2r}}{(s+s_2)^r}$$

sendo $k_{2j} = \dfrac{1}{(r-j)!}\dfrac{d^{r-j}}{ds^{r-j}}\left((s+s_2)^r G(s)\right)\Bigg|_{s=-s_i}, \; j = 1, \ldots, r$

Exemplo – $G(s)$ tem polos reais repetidos

$$G(s) = \frac{2s+3}{s(s+1)^2} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_{21}}{s+1} + \frac{k_{22}}{(s+1)^2}$$

Para o polo na origem ($s=0$): $k_1 = \cancel{s}\dfrac{2\cancelto{0}{s}+3}{\cancel{s}(\cancelto{0}{s^2}+1)^2} = 3$

▷ Para o **polo repetido** -1, é mais fácil calcular k_{22} primeiro e depois k_{21} (derivar):

$$k_{22} = \cancel{(s+1)^2}\frac{2\cancelto{-1}{s}+3}{\cancelto{-1}{s}\ \cancel{(s^2+1)^2}} = -1$$

$$k_{21} = \frac{d}{ds}\left\{\cancel{(s+1)^2}\frac{2s+3}{s\ \cancel{(s^2+1)^2}}\right\} = \frac{d}{ds}\left\{(2s+3)\ s^{-1}\right\} \text{ (derivando o produto)}$$

$$k_{21} = 2s^{-1} - (2s+3)s^{-2} = \frac{2}{s} - \frac{2s+3}{s^2} = \frac{2}{-1} - \frac{[2(-1)+3]}{(-1)^2} = -3$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$: $g(t) = k_1 + k_{21}e^{-t} + k_{22}e^{-t} = 3 - 3e^{-t} - te^{-t}$

Solução de EDO via Expansão em Frações Parciais

3o. Caso – Polos conjugados complexos $G(s) = \dfrac{N(s)}{(s + (\alpha + j\omega))(s + (\alpha - j\omega))}$

$$G(s) = \frac{k_1}{s + (\alpha + j\omega)} + \frac{k_2}{s + (\alpha - j\omega))}$$

Exemplo Sistema de 2a. ordem: $G(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

▷ Raízes $\left(\frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2}\right)$: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

▷ Se $0 < \zeta < 1$, os polos são conjugados complexos: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$

▷ Definem-se $\alpha = \zeta\omega_n$ e $\omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$, tal que $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$

Solução de EDO via Expansão em Frações Parciais

$$
\begin{aligned}
k_1 &= (s + (\alpha - j\omega))\left.\frac{\omega_n^2}{(s + (\alpha + j\omega))(s + (\alpha - j\omega))}\right|_{s=-\alpha+j\omega} \\
&= \frac{\omega_n^2}{-\alpha + j\omega + \alpha + j\omega} = \frac{\omega_n^2}{2j\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= (s + (\alpha + j\omega))\left.\frac{\omega_n^2}{(s + (\alpha + j\omega))(s + (\alpha - j\omega))}\right|_{s=-\alpha-j\omega} \\
&= \frac{\omega_n^2}{-\alpha - j\omega + \alpha - j\omega} = \frac{-\omega_n^2}{2j\omega}
\end{aligned}
$$

Solução de EDO via Expansão em Frações Parciais

Portanto

$$G(s) = \frac{\omega_n^2/(2j\omega)}{(s+(\alpha+j\omega))} + \frac{-\omega_n^2/(2j\omega)}{(s+(\alpha-j\omega))}$$

▷ Aplicando a transformada de Laplace inversa, obtém-se a resposta temporal:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\omega_n^2}{2j\omega} e^{(-\alpha t)} \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{(-\zeta\omega_n t)} \text{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right) \end{aligned}$$

▷ Que interpretação se tem em termos de resposta temporal?

Exemplo Encontre $y(t)$ para $Y(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)}$

▷ Define-se $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

▷ Note que $Y(s)$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Solução de Equações Diferenciais Ordinárias

Note que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\text{sen}\,\omega t$$

Portanto

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\text{sen}\,\omega t\right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega t + \zeta\text{sen}\,\omega t\right) \end{aligned}$$

▷ Como as raízes do sistema de 2a ordem são $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, então

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(s)}{\mathrm{Re}(s)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\cancel{\omega_n}\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\,\cancel{\omega_n}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

em outras palavras, é o cálculo do ângulo para um triângulo com cateto oposto $\sqrt{1-\zeta^2}$, cateto adjacente ζ e, portanto, $h^2 = \left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2 + \zeta^2 = 1$, i.e., a hipotenusa é igual a "1". Portanto, é fácil concluir que:

$$\theta = \mathrm{sen}^{-1}\sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{ou} \quad \theta = \cos^{-1}\zeta$$

Então a solução temporal é:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\cos\omega t\ \mathrm{sen}\ \theta + \mathrm{sen}\ \omega t\ \cos\theta\right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \theta\right), \quad \theta = \cos^{-1}\zeta \end{aligned}$$

▷ Interpretação?

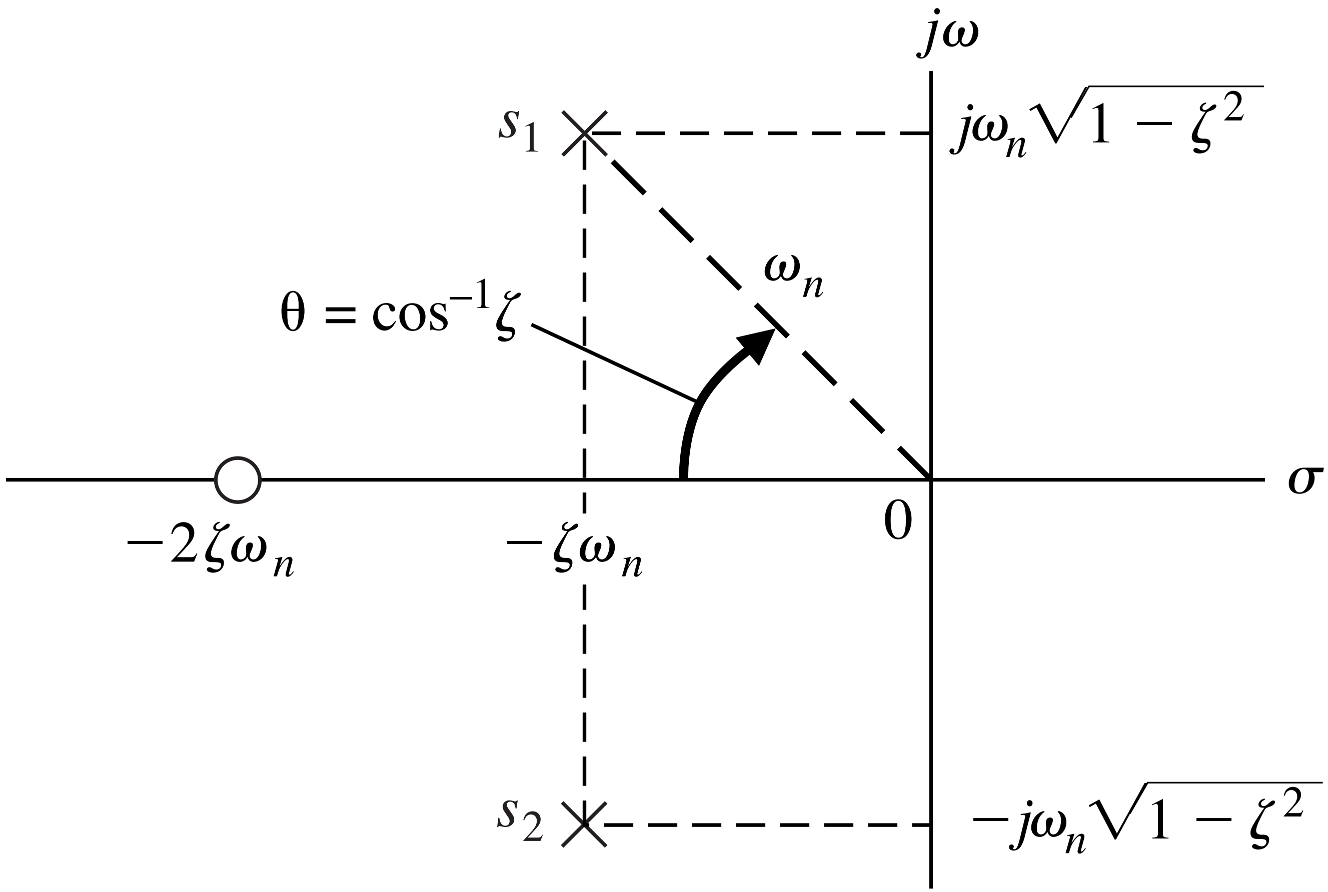
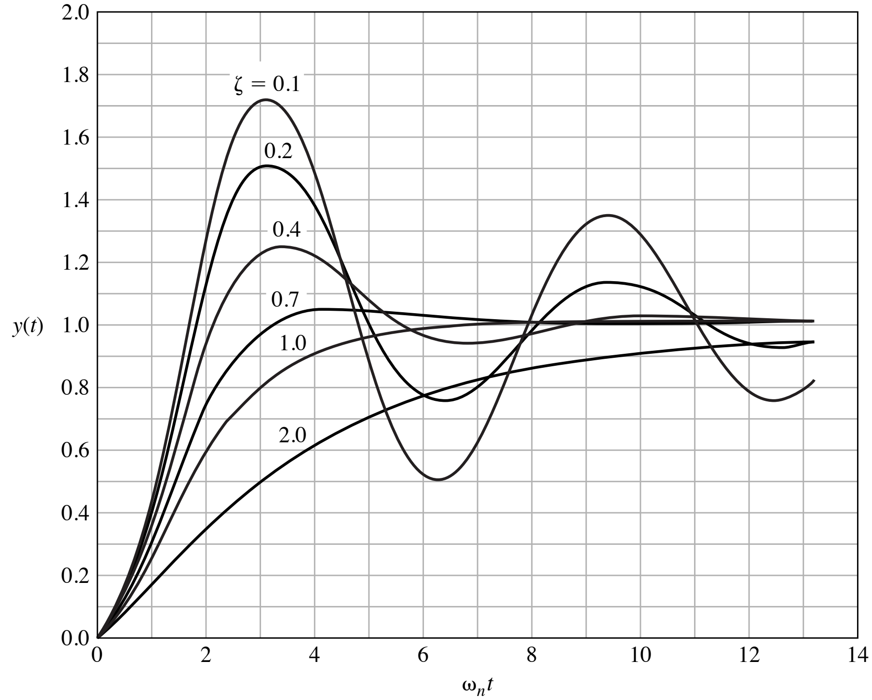
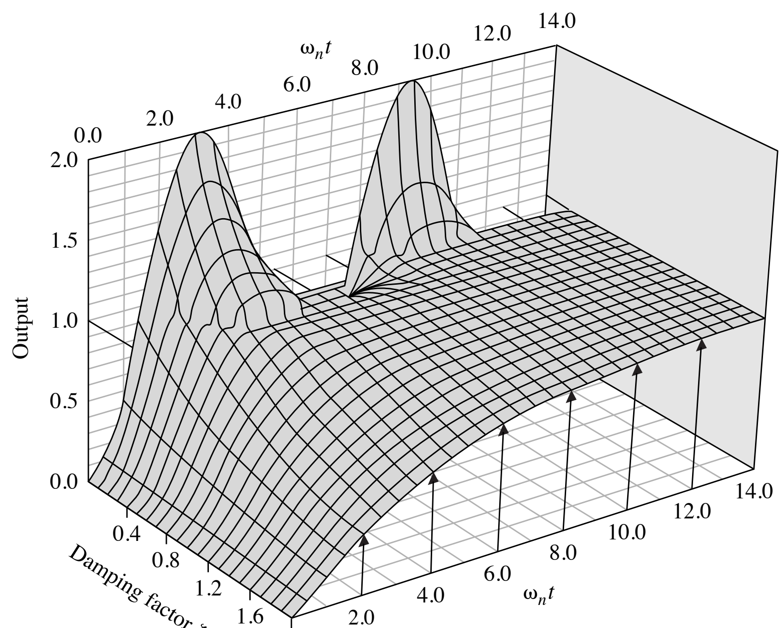


Figure 2.9 An *s*-plane plot of the poles and zeros of *Y*(*s*)



(a)



(b)

Figure 5.5 (a) Transient response of a second-order system (Eq. 5.9) for a step input (b) The transient response of a second-order system (Eq. 5.9) for a step input as a function of ζ and $\omega_n t$

Estabilidade Entrada-Saída

- Considere o sistema SISO, LIT, causal e relaxado em $t = 0$, descrito por

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$g(t)$: é a resposta ao impulso do sistema, ou seja, a saída do sistema no tempo t para um impulso aplicado na entrada no instante $\tau = 0$

Definição Um sistema relaxado é BIBO estável (do inglês *Bounded-Input — Bounded-Output*) se para qualquer entrada limitada a saída também for limitada

- Uma entrada $u(t)$ é limitada se $\mid u(t) \mid \leq u_m < \infty$ para todo $t \geq 0$

Teorema Um sistema SISO, LIT, relaxado em $t = 0$: $y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$ é BIBO estável se, e somente se, $g(t)$ for absolutamente integrável no intervalo $[0, \infty)$:

$$\int_0^\infty \mid g(t) \mid \; dt \leq M < \infty \quad \text{para alguma constante } M$$

Exercício: Considere um sistema cuja relação entre a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$ é descrita pela Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2}$$

Questão: Após definir de forma apropriada o vetor de estados $x(t)$, obtenha as matrizes A, B e C que descrevem este sistema na forma de Espaço de Estados:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{cases}$$

Note que $u(t)$ é a entrada e $y(t)$ é a saída do sistema

Solução Note que $G(s)$ é a função de transferência quando se aplica a Transformada de Laplace à equação diferencial linear de segunda ordem: $\ddot{y}(t) = u(t)$ com condições iniciais nulas. Portanto, pode-se escolher como variáveis de estado, por exemplo:

$$x_1(t) = y(t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Claro que bastam duas variáveis de estado para representar a EDO de segunda ordem...
Note ainda que:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \quad \text{e} \quad \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = u(t)$$

Então o modelo em espaço de estados é:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Suponha que, alternativamente, alguém escolhesse as duas variáveis de estado de uma forma diferente, por exemplo:

$$x_2(t) = y(t) \quad \text{e} \quad x_1(t) = \dot{y}(t)$$

Então:

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) \quad \text{e} \quad \dot{x}_1(t) = \ddot{y}(t) = u(t)$$

E, neste caso, o modelo em espaço de estados seria:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Que também é uma representação em espaço de estados válida, apesar das matrizes A, B e C serem diferentes !! De fato, as duas formas em espaço de estados são completamente equivalentes!

Funções de Transferência e Espaço de Estados

Exercício: Considere a mesma Função de Transferência anterior, i.e.: $G(s) = \frac{1}{s^2}$

Questão: Como obter uma descrição em Espaço de Estados usando o Matlab — especificamente usando a função `tf2ss`?

Curiosidade – Usualmente no Matlab usam-se nomes para as funções que são "razoavelmente" auto-explicativas. Pode-se ler `tf2ss` da forma: *"converts a single-input transfer function into an equivalent state-space representation"*. Em outras palavras, `tf2ss` seria o acrônimo para: *converte uma transfer function 2 ("to" – para) state- space*

Funções de Transferência e Espaço de Estados

```
>> NUM=[1],  DEN = [1 0 0]
>> [A,B,C,D] = tf2ss(NUM,DEN)

A =
     0     0
     1     0
B =
     1
     0
C =
     0     1
D =
     0
```

Funções de Transferência e Espaço de Estados

Exercício: E o contrário, como se obtém, via Matlab, a função de transferência de uma descrição em espaço de estados? Além disso, de fato a represetação

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

é equivalente a:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

isto é, geram realmente a mesma função de transferência?

Funções de Transferência e Espaço de Estados

```
>> A=[0 1;0 0],B=[0;1],C=[1 0],D=0
A =
     0     1
     0     0
B =
     0
     1
C =
     1     0
D =
     0
>> [num,den]=ss2tf(A,B,C,D)  % state space to transfer function
>> G=tf(num,den)   % tf - transfer function
G =


   1
  ---
  s^2
```

Funções de Transferência e Espaço de Estados

```
>> A=[0 0;1 0],B=[1;0],C=[0 1],D=0
A =
     0     0
     1     0
B =
     1
     0
C =
     0     1
D =
     0
>> [num,den]=ss2tf(A,B,C,D)  % state space to transfer function
>> G=tf(num,den)   % tf - transfer function
G =

   1
  ---
  s^2
```