

Estimadores ou Observadores de Estado

1. Estimadores ou Observadores de Estado: sistemas SISO
2. Extensões para Sistemas a Tempo Discreto
3. Controle baseado no Observador

Estimadores ou Observadores de Estado

Note que a realimentação de estados pressupõe que todas as variáveis de estado que compõem o vetor de estado x estão acessíveis, i.e., são mensuráveis tal que:

$$u = r - kx$$

Boas questões:

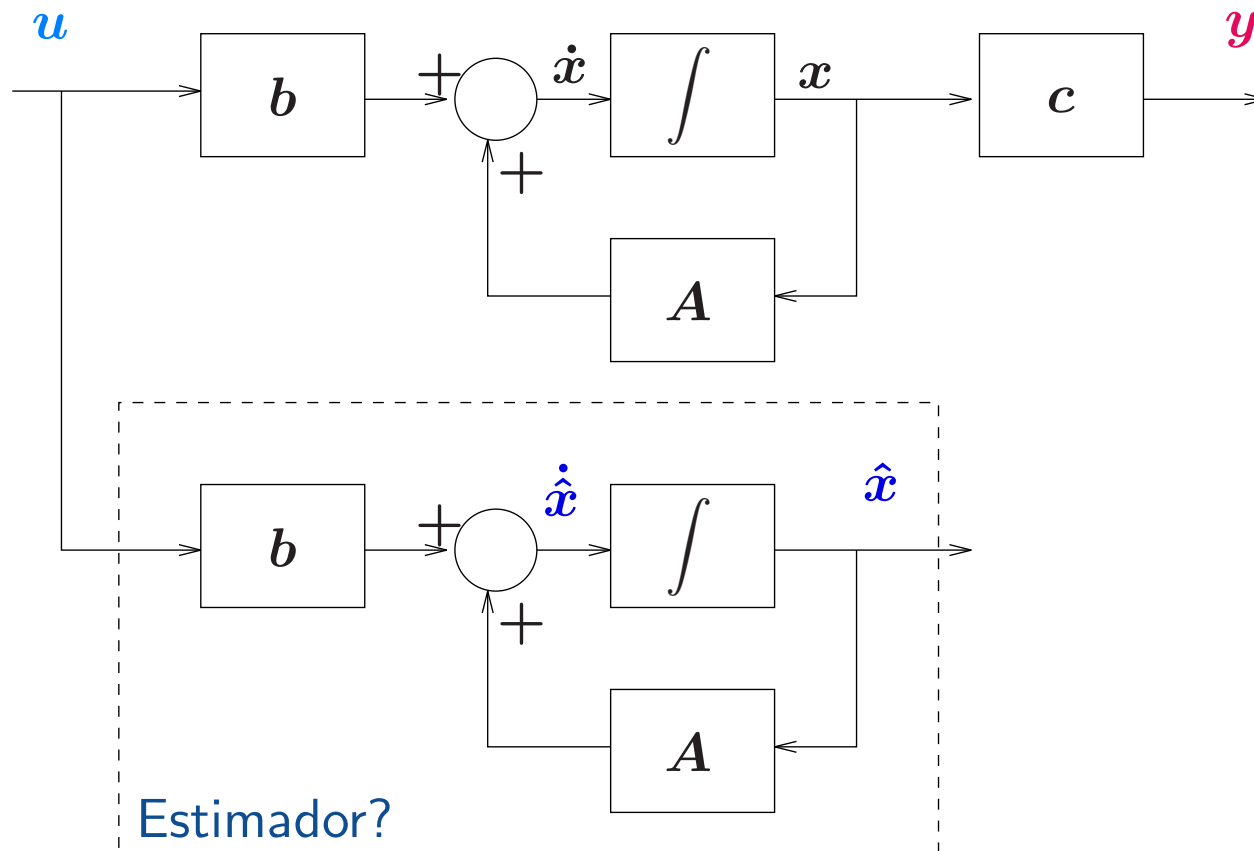
- ▷ Alguns estados podem não ser/estar acessíveis (por restrição física)
- ▷ Limitação quanto ao número de medidores (e.g., sistema de larga escala)
- ▷ E aí? Como realimentar?

Discussão Preliminar – Aquecendo os motores

Copiando as matrizes do Sistema. Dados: A , b , c , u , y . Como reconstruir x ?

$$\dot{x} = Ax + bu \quad ; \quad y = cx$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu$$



Discussão Preliminar – Aquecendo os motores

É uma boa estratégia apenas copiar as matrizes do Sistema? Depende...

▷ Note que se $\hat{x}(0) = x(0)$, então $\hat{x}(t) = x(t), \forall t \geq 0$

▷ (A, c) observável $\iff x(0)$ pode ser determinado através de u e y

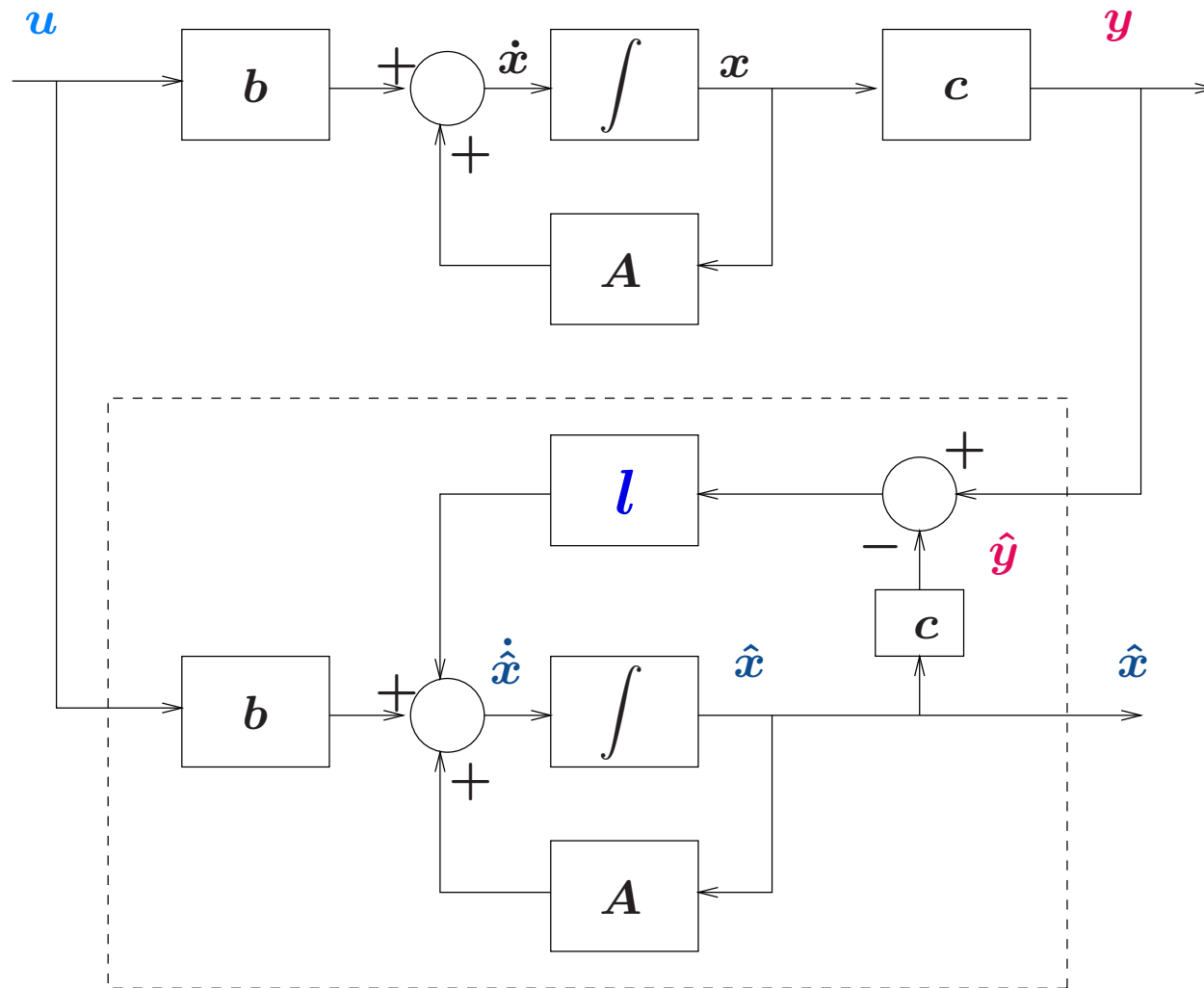
▶ Desvantagens/Dificuldades

\rightsquigarrow O cômputo de $x(0)$ é mandatório!

\rightsquigarrow E se A for instável? Ainda é possível obter estimativas para o estado?

Note que a saída $y(t)$ não está sendo usada. Não há informação sobre o comportamento da saída do sistema. Reavaliar: pode-se considerar a comparação (diferença) entre a saída do sistema original dada por $y = cx(t)$ com a saída do sistema que se propõe a estimar $\hat{y} = c\hat{x}(t)$

Estimadores ou Observadores de Estado



Estimadores ou Observadores de Estado

Estimador assintótico:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x}(t) + bu + \underbrace{l(y - c\hat{x})}_{\text{inovação}}, \quad l \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ &= (A - lc)\hat{x} + bu + ly\end{aligned}$$

Definindo-se o erro “de estimativa” da forma $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$, então:

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \underbrace{Ax + bu}_{\dot{x}(t)} - \underbrace{(A - lc)\hat{x} - bu - l(cx)}_{\dot{\hat{x}}(t)} \\ &= (A - lc)(x - \hat{x}) \\ &= (A - lc)e(t)\end{aligned}$$

Boa nova: Se os autovalores de $(A - lc)$ puderem ser arbitrariamente alocados, então é possível impor que o erro $e(t)$ de estimativa tenda a zero (e: $\hat{x} \rightarrow x$)!

Estimadores ou Observadores de Estado

Teorema Os autovalores de $(A - lc)$ podem ser alocados arbitrariamente através da escolha de um ganho l se, e somente se, o par (A, c) for observável

Demonstração Por dualidade, se (A', c') é controlável, então os autovalores de $(A' - c'k)$ podem ser alocados arbitrariamente. Basta fazer $l = k' \dots$ ■

Nota: Por dualidade, as discussões de projeto apresentadas para realimentação de estados podem ser estendidas para observador de estados. Então vamos visitar o projeto de observadores via Lyapunov

Observadores de Estado via Lyapunov

Projeto de estimador de ordem n para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

via equação de Lyapunov (procedimento **dual** à alocação de autovalores)

1. Escolha uma matriz $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ estável com os autovalores desejados (diferentes de A)
2. Escolha l arbitrário tal que (F, l) seja controlável
3. Obtenha a única solução T da equação de Lyapunov

$$TA - FT = lc$$

⇒ condições duais para que T seja não singular

Observadores de Estado via Lyapunov

4. Um estimador para x é da forma:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Tbu(t) + ly(t) \\ \hat{x}(t) = T^{-1}z(t) \end{cases}$$

Note que definindo-se $e(t) \triangleq z(t) - Tx(t)$, então

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{z}(t) - T\dot{x}(t) \\ &= Fz(t) + Tbu(t) + lcx(t) - TAx(t) - Tbu(t) \end{aligned}$$

e, como de Lyapunov: $TA = FT + lc$, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Fz(t) + lcx(t) - (FT + lc)x(t) \\ &= F(z(t) - Tx(t)) = Fe(t) \end{aligned}$$

Se F é estável, então $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, e $z \rightarrow Tx$. Portanto $T^{-1}z$ é um estimador para x

Estimador de estado de ordem reduzida - Por quê?

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

Se o sistema é observável, pode ser colocado na forma canônica observável. Por exemplo, para $n = 4$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Note que $y(t) = x_1(t)$ (primeira variável de estado) e, portanto, pode ser "mais barato" construir um estimador de estado apenas para as outras variáveis x_i , $i = 2, 3, \dots, n$, já que x_1 é mensurável

Estimador de estado de ordem reduzida

Método por equação de Lyapunov

1. Escolha $F \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ estável com autovalores distintos de A
2. Escolha l arbitrário tal que (F, l) seja controlável
3. Obtenha a solução única $T \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$ da equação de Lyapunov
 $TA - FT = lc$
4. A equação de estado $(n - 1)$ -dimensional estima x

$$\dot{z} = Fz + Tbu + ly$$
$$\hat{x} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Estimador de estado de ordem reduzida

Note que a equação

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

pode ser escrita da forma

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix} \hat{x}$$

e portanto $y = c\hat{x}$ e $z = T\hat{x}$. Então, y é um estimador para cx e z é um estimador para Tx . Definindo o erro: $e(t) = z(t) - Tx(t)$ tem-se

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{z}(t) - T\dot{x}(t) \\ &= Fz(t) + Tbu(t) + lcx(t) - TAx(t) - Tbu(t) \\ &= Fe(t) \end{aligned}$$

e, novamente, se F é estável, então $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$

Realimentação a partir de Estados Estimados

Para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \end{cases}$$

Se (A,b) é controlável, então pode-se alocar os autovalores de $(A - bk)$ de forma arbitrária via a realimentação de estados: $u = r - kx$

► Se nem todas as variáveis de estados estão disponíveis (são medidas) então é necessário estimá-las via observador de estados

Veja se (A,c) é observável, então um observador de estados de ordem completa ou reduzida pode ser projetado com autovalores posicionados de forma arbitrária

Realimentação a partir de Estados Estimados

- ▶ Estimador de ordem n (completa)

$$\dot{\hat{x}} = (A - lc)\hat{x} + bu + ly$$

A escolha de l (ou melhor, dos autovalores de $(A - lc)$) determina a taxa (velocidade) com que o estado estimado \hat{x} aproxima-se do estado do sistema

Ao realimentar com os estados estimados: $u = r - k\hat{x}$, cabe perguntar:

- ▶ Os autovalores de $(A - bk)$ e de $(A - lc)$ se alteram devido a combinação?
- ▶ O estimador altera a Função de Transferência de r para y ?

Realimentação a partir de Estados Estimados

Combinando as equações usando $u = r - k\hat{x}$ pode-se escrever

$$\dot{x} = Ax + bu$$

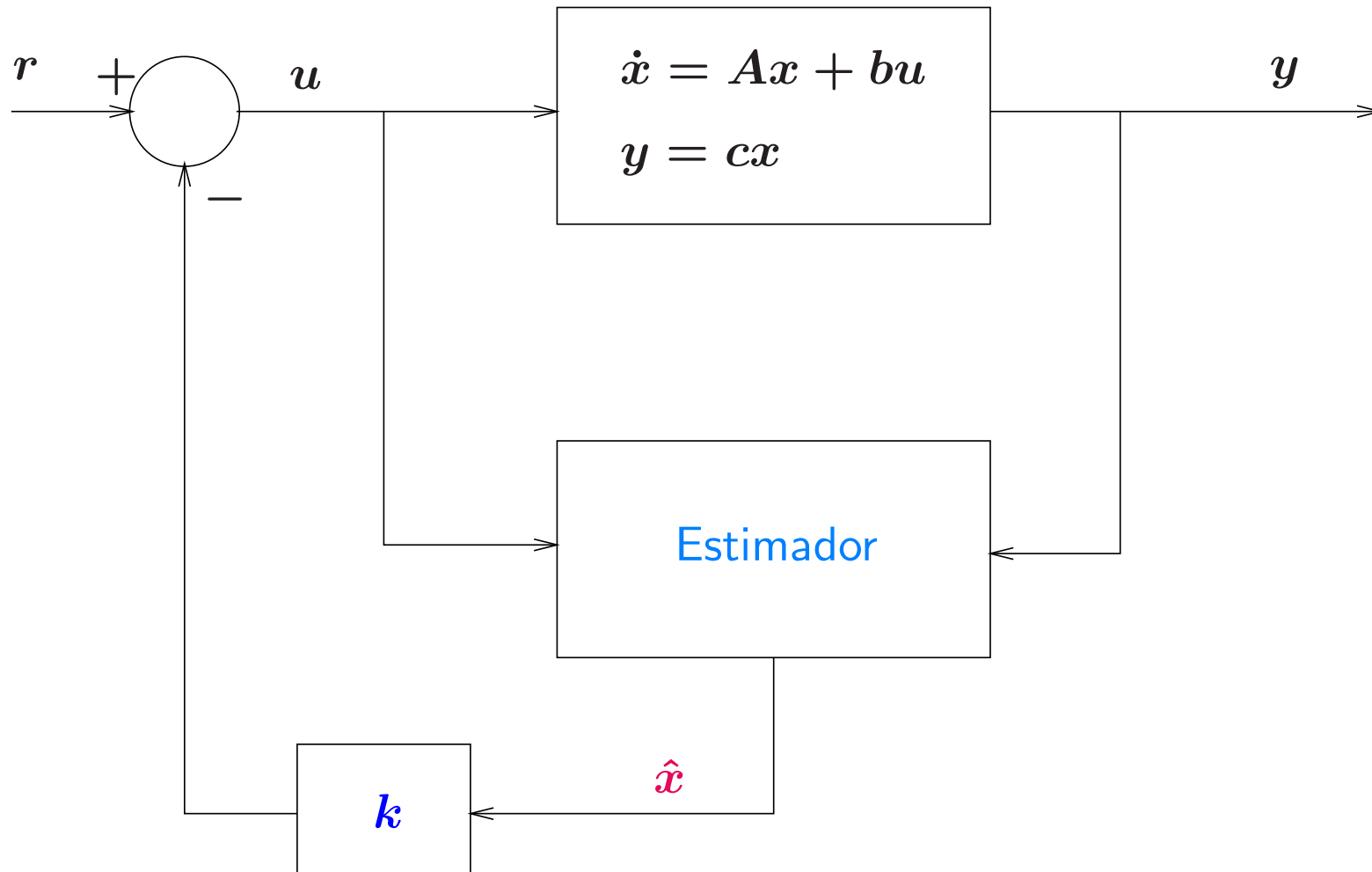
$$\dot{x} = Ax - bk\hat{x} + br$$

e também: $\dot{\hat{x}} = (A - lc)\hat{x} + bu + lc x = (A - lc)\hat{x} + b(r - k\hat{x}) + lc x$

E tem-se o sistema aumentado de dimensão $2n$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -bk \\ lc & A - lc - bk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} r$$
$$y = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

Realimentação a partir de Estados Estimados



Realimentação a partir de Estados Estimados

Vamos aplicar uma transformação de similaridade para obter uma **descrição em termos do estado x e do erro de estimativa e** . De fato, o que se deseja é avaliar a **dinâmica conjunta do erro de estimativa e do estado** (não exatamente do estado estimado). Faça:

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$P \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ; \quad P^{-1} = P$$

Realimentação a partir de Estados Estimados

Sistema equivalente para realimentação e erro de estimação, $\begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{e} \end{bmatrix}'$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} A & -bk \\ lc & A - lc - bk \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} = \begin{bmatrix} A - bk & -bk \\ 0 & A - lc \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix}$$

Realimentação a partir de Estados Estimados

Sistema equivalente para realimentação de estados e erro de estimação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk & bk \\ 0 & A - lc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} r$$
$$y = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

- ▷ Os autovalores da matriz dinâmica são a união dos autovalores de $(A - bk)$ e $(A - lc)$. **Portanto o estimador não altera os autovalores nem tem seus autovalores modificados pela conexão**
- ▷ Este fato é denominado **Princípio da Separação** e indica que o projeto do observador e do ganho de realimentação podem ser executados de forma independente!

Realimentação a partir de Estados Estimados

▷ Note que o sistema aumentado é não controlável (forma canônica), e a FT do sistema é igual à da equação $\dot{x} = (A - bk)x + br$ com $y = cx$, i.e., dada por

$$G_f(s) = c(sI - A + bk)^{-1}b \implies \text{não aparece o estimador!}$$

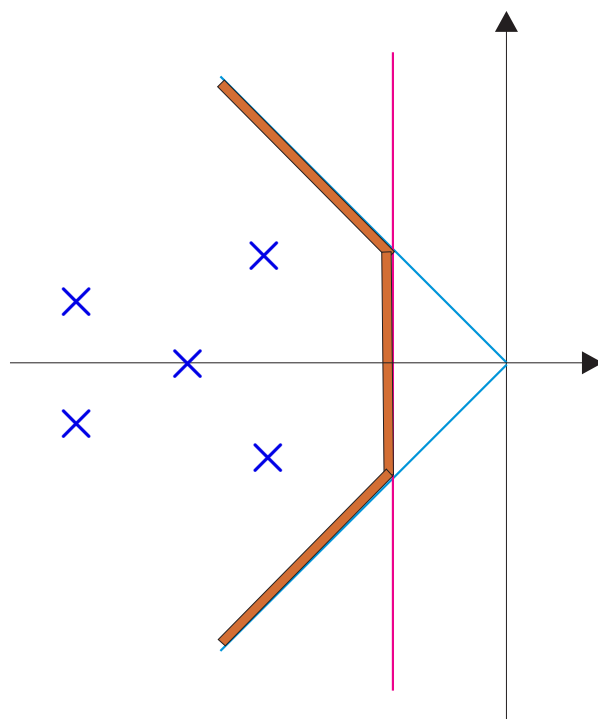
▷ De fato, no cômputo de funções de transferência, as condições iniciais são assumidas nulas: $x(0) = \hat{x}(0) = 0$, então

$$\implies x(t) = \hat{x}(t) \quad \forall t$$

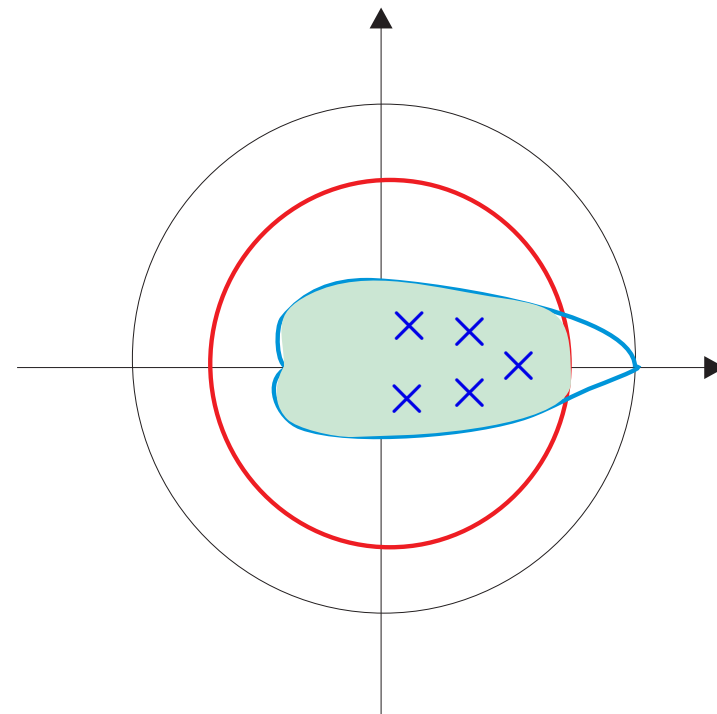
\implies FT de r para y não é afetada pela presença ou não do estimador!

Sistemas a Tempo Discreto?

▷ Os procedimentos de alocação de autovalores são os mesmos tanto para realimentação quanto para o observador, lembrando apenas que o contexto da estabilidade é o ponto que os difere



Plano-s



Plano-z

Controle Baseado no Observador

- ▷ Faça o operador $\delta[x(t)]$ representar $\dot{x}(t)$ ou $x(k+1)$
- ▷ Regulador: Lei de Controle + Observador

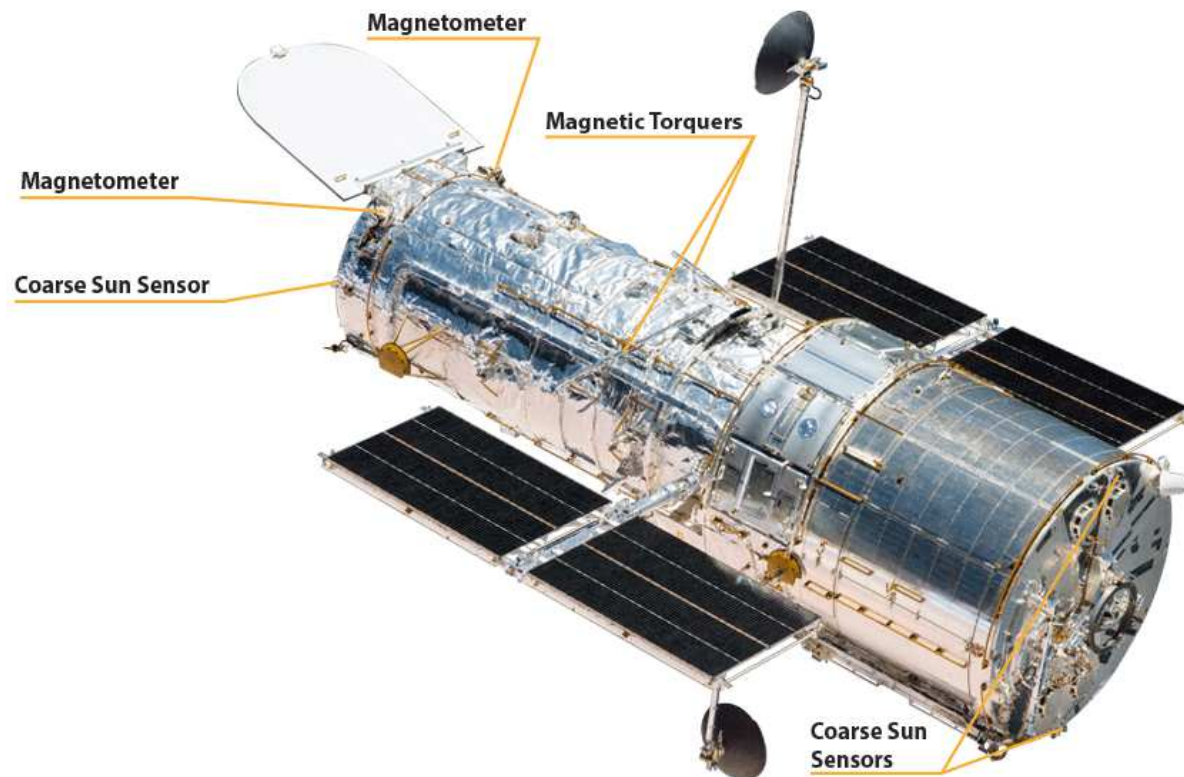
$$\begin{cases} \delta[\hat{x}(t)] = \underbrace{(A - Bk - lC)}_{A_C} \hat{x}(t) + \underbrace{l}_{B_C} y(t) \\ u(t) = - \underbrace{k}_{C_C} \hat{x}(t) \end{cases}$$

Função de Transferência: $\implies \frac{U(\zeta)}{Y(\zeta)} = C_C (\zeta I - A_C)^{-1} B_C$

sendo que ζ representa tanto "s" como "z"...

Controle baseado no Observador – Telescópio Hubble

Como exemplo de projeto de controle baseado no observador, retornemos ao modelo do telescópio Hubble apresentado na Aula 3 (lâminas 36 – 41)



Controle baseado no Observador – Telescópio Hubble

Exemplo O modelo do telescópio Hubble é da forma $G(s) = 1/s^2$, i.e., $\ddot{y}(t) = u(t)$. Definindo-se:

$$x_1 = y \quad (\text{posição angular}); \quad x_2 = \dot{y}$$

com

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{e} \quad \dot{x}_2 = \ddot{y} = u$$

então

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t) \end{array} \right.$$

e mede-se apenas a posição angular x_1

Controle baseado no Observador – Telescópio Hubble

- ▶ Pode-se fazer o projeto do Controlador baseado no Observador em duas etapas, já que o Princípio da Separação nos permite calcular o **ganho de realimentação de estados k** de forma independente do **ganho do observador/estimados dado por l**
- ▶ Para o cálculo do ganho de realimentação de estados, pode-se escolher os autovalores em malha fechada dados por:

$$s_{1,2} = -0.707 \pm j0.707$$

isto é, os autovalores são escolhidos com parte real negativa para que o sistema em malha fechada seja estável

- ▶ Então o ganho de realimentação de estados é:

$$k = \begin{bmatrix} 0.9997 & 1.4140 \end{bmatrix}$$

Controle baseado no Observador – Telescópio Hubble

▷ Para o cálculo do ganho do observador de estados, pode-se escolher os autovalores para a dinâmica do erro de estimação em -3 e -5 . Então o ganho é:

$$l = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

▷ Note que a equação do Observador, para $u(t) = -k\hat{x}$, é dado por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - lC)\hat{x}(t) + Bu(t) + ly(t) = (A - Bk - lC)\hat{x}(t) + ly(t)$$

Controle baseado no Observador – Telescópio Hubble

▷ Então o Controle baseado no Observador: Lei de Controle + Observador, é:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{(A - Bk - lC)}_{A_C} \hat{x}(t) + \underbrace{l}_{B_C} y(t) \\ u(t) = -\underbrace{k}_{C_C} \hat{x}(t) \end{cases}$$

Substituindo os valores de A, B, C, l e k , obtém-se

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -15.9997 & -1.4140 \end{bmatrix}}_{A_C} \hat{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}}_{B_C = l} y(t) \\ u(t) = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0.9997 & 1.4140 \end{bmatrix}}_{C_C = k} \hat{x}(t) \end{cases}$$

Controle baseado no Observador – Telescópio Hubble

▷ Por curiosidade, pode-se obter a Função de Transferência do Controlador baseado no Observador descrito em espaço de estados ao se aplicar a Transformada de Laplace com condições iniciais nulas:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = G_c(s) = C_C (sI - A_C)^{-1} B_C$$

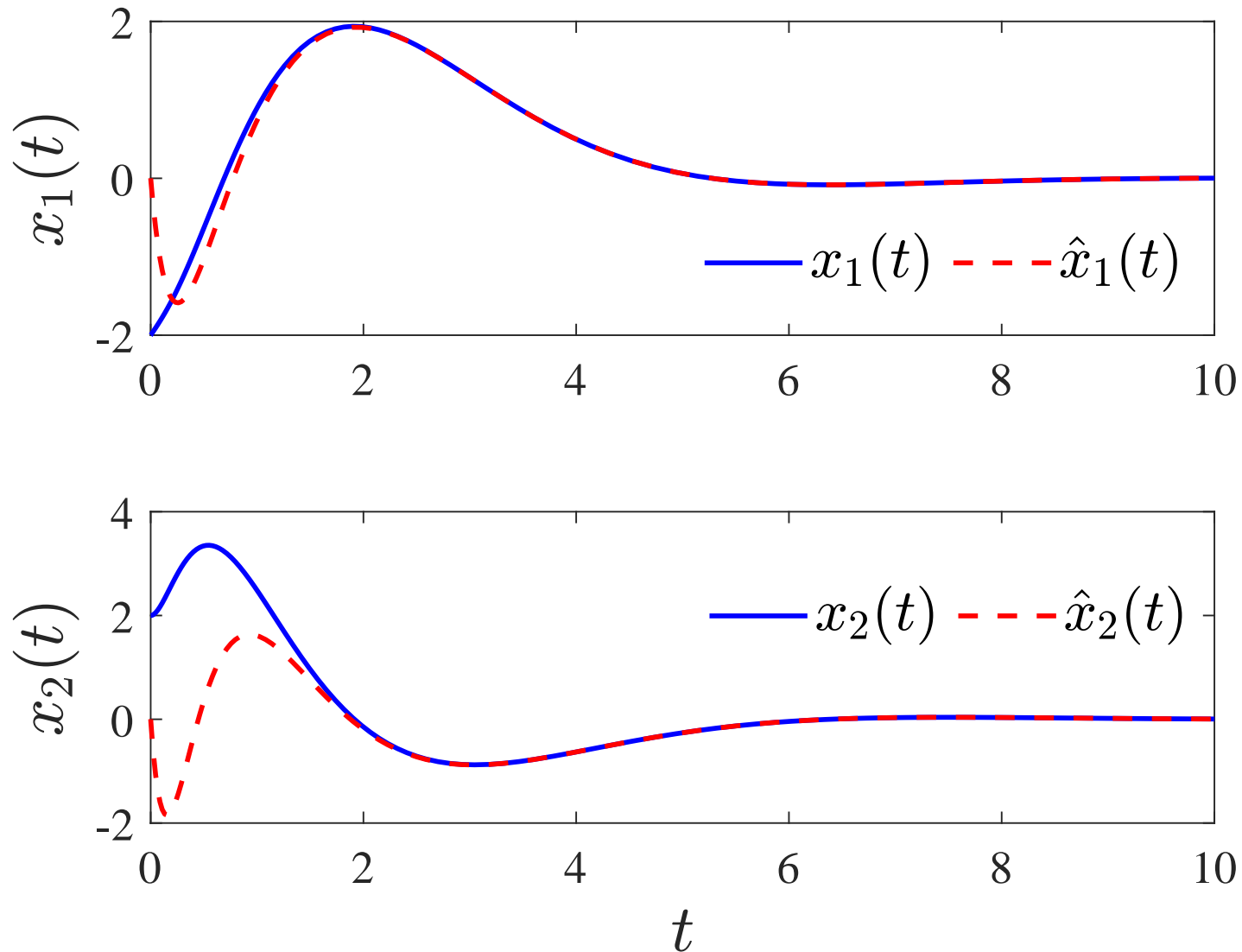
Em outras palavras, ao substituir as matrizes A_C , B_C , C_C do controlador em espaço de estados obtém-se um controlador de 2a. ordem:

$$G_c(s) = 29.208 \frac{s + 0.5134}{s^2 + 9.414s + 27.31}$$

com polos em $-4.7070 \pm j2.2706$

▷ Note que os autovalores da matriz A_C do Controlador baseado no Observador são dados também por $-4.7070 \pm j2.2706$, i.e., iguais aos polos de $G_c(s)$

Resposta temporal com o Controle baseado no Observador



Hubble – Rastreamento de Referência

- ▷ Vamos supor, para esta etapa, que todas as duas variáveis de estado são mensuráveis, isto é, mede-se a posição e a velocidade angular e $y(t) = \mathbf{l}x(t)$
- ▷ A ideia agora é que o telescópio gire para uma nova posição angular e se mantenha lá, isto é, deseja-se que x_1 siga/rastreie uma referência $r(t)$ que é uma entrada degrau tal que: $x_1(t) \rightarrow r(t)$
- ▷ Neste caso, defina um estado “adicional” $x_i(t) = \int [r(t) - x_1(t)] dt$ para o qual tem-se a equação diferencial:

$$\dot{x}_i(t) = r(t) - x_1(t)$$

- ▷ Define-se um vetor de estado aumentado incluindo o integrador x_i , da forma:

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$$

Hubble – Rastreamento de Referência

Então o sistema a ser considerado para o projeto de controle por realimentação é:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_i(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\tilde{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_a} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_R r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$$

E, neste caso, procuramos pela realimentação de estados (aumentada):

$$u(t) = - \underbrace{\begin{bmatrix} k & k_i \end{bmatrix}}_{= K_a} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$$

Hubble – Rastreamento de Referência

- ▷ O cálculo do ganho K_a é realizado da mesma forma que anteriormente
- ▷ Para o sistema em malha fechada do sistema aumentado descrito por :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A_a - B_a K_a) \tilde{x}(t) + R r(t)$$

escolhem-se autovalores para $(A_a - B_a K_a)$ com parte real negativa para se garantir estabilidade do sistema em malha fechada, etc.

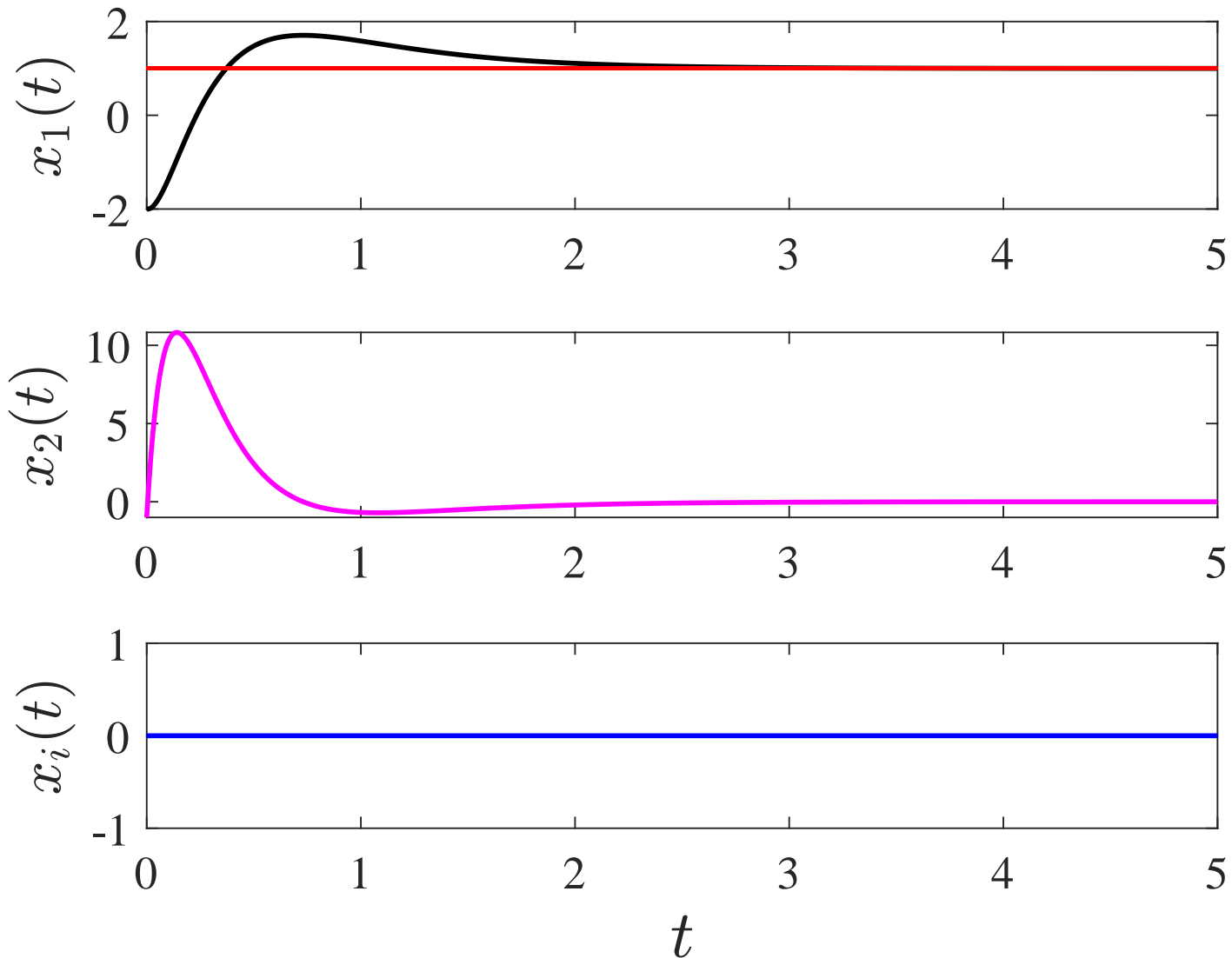
- ▷ Então, ao se ter estabilidade tem-se $x_i \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ e, para este exemplo, $r(t) - x_1(t) \rightarrow 0$, ou $x_1 \rightarrow r(t)$. Portanto na saída tem-se, por consequência:

$$y(t) \rightarrow x_1(t) \rightarrow r(t), \text{ já que por estabilidade: } x_2 \rightarrow 0, x_i \rightarrow 0$$

- ▷ Escolha, por exemplo, autovalores em -2 , -4 e -10 , e obtém-se

$$K_a = \begin{bmatrix} 68 & 16 & -80 \end{bmatrix}$$

Resposta Temporal com Rastreamento



Controle Integral – Sistemas Discretos

Modelo considerado:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Bw(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Resultado esperado?

1. $y(t) \rightarrow r(t) \equiv \mathbf{1}$, $\forall t > t_0$
2. Rejeitar distúrbio: w , constante, porém de magnitude desconhecida

O que fazer? Integrar o erro... De forma análoga ao caso contínuo (vide aula 18)
 $e(k) = y(k) - r(k)$ e, portanto,

$$e(k) = x_I(k+1) - x_I(k) = Cx(k) - r(k)$$

então: $x_I(k+1) = x_I(k) + Cx(k) - r(k)$

Controle Integral

Definindo-se:

$$\eta(k) = \begin{bmatrix} x_I(k) & x(k) \end{bmatrix}^T$$

Obtém-se o modelo aumentado:

$$\begin{cases} \eta(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & C \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix} \eta(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B \end{bmatrix} w(k) - \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \eta(k) \end{cases}$$

▷ Controle ou Observador?