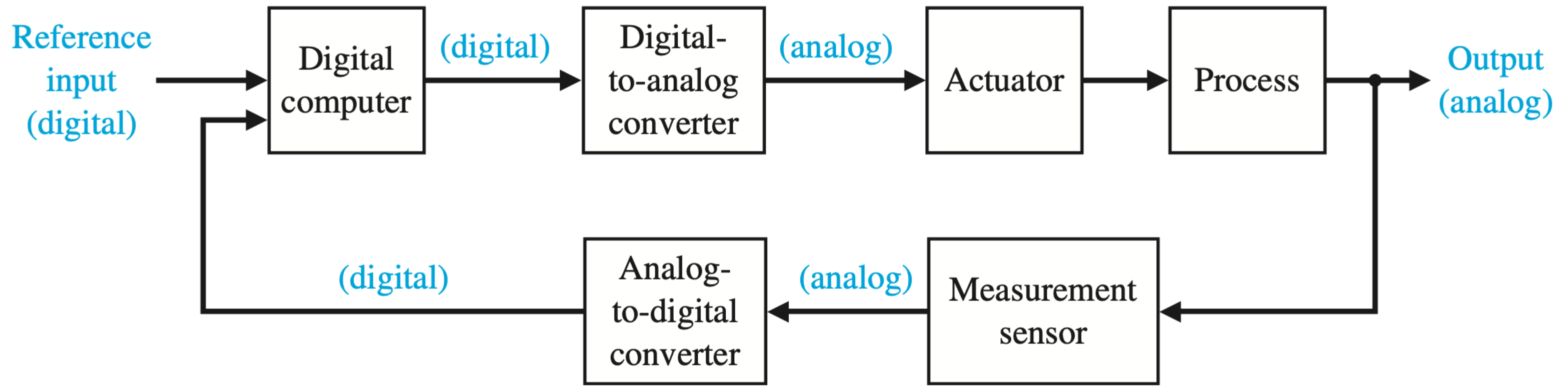
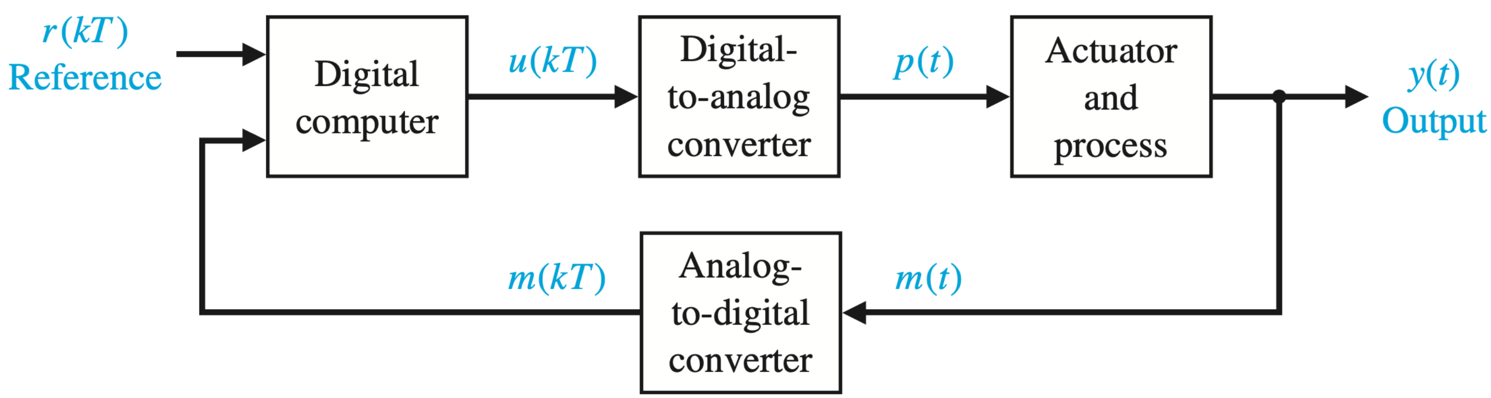
Sistemas a Tempo Discreto

1. Caracterização de sistemas dinâmicos a tempo discreto
2. Transformada-$\mathcal{Z}$
3. Função de Transferência discreta, estabilidade e analogia com domínio-s
4. Sistemas amostrados
   - 4.1 Amostragem e retenção
   - 4.2 Controle PID
   - 4.3 Extrapolação de dados

Controle por Computador





- A sequência de entrada u e a sequência de saída y do sistema discreto no tempo são considerados como tendo o **mesmo período de amostragem T** (em outras palavras, o período de amostragem é fixo)

Caracterização de Sistemas Dinâmicos a Tempo Discreto

Propriedades do sistema a tempo discreto? As mesmas do analógico

- Causalidade $\rightsquigarrow$ a saída corrente depende das entradas corrente e passadas

- Linearidade, i.e., somar entradas $\longrightarrow$ somam-se saídas. Multiplicar a entrada por um escalar $\longrightarrow$ multiplica-se a saída por um escalar (Princípio da superposição)

- Invariância no tempo $\rightsquigarrow$ deslocamento de tempo na sequência de entrada $\boldsymbol{u}$ resulta apenas no deslocamento de tempo na sequência de saída $\boldsymbol{y}$

Descrição Entrada-Saída

Considere uma sequência de pulsos $\delta(k)$ definida da forma:

$$\delta(k-m) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{se } \; k = m \\ 0, & \text{se } \; k \neq m \end{cases}$$

onde k e m são inteiros denotando instantes de amostragem

- Correspondência discreta ao impulso $\delta(t-\tilde{t}\,)$ no caso contínuo
- $\delta(t-\tilde{t}\,) \rightsquigarrow$ largura zero e amplitude infinita $\rightsquigarrow$ na prática não pode ser gerado. Por outro lado, a sequência pulso pode ser facilmente gerada

• Para facilitar a notação, denota-se uma sequência qualquer $u(kT) \triangleq u(k)$, sendo k um inteiro variando de $-\infty$ a $+\infty$ (de fato, o período T é fixo)

Descrição Entrada-Saída

Seja $u(k)$ uma sequência de entrada dada por: $u(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)\delta(k-m)$

Seja $g(k,m)$ a saída no instante de tempo k excitada pela sequência pulso aplicada no instante de tempo m. Então pela hipótese de **linearidade**

$$\delta(k-m) \xrightarrow{gera} g(k,m)$$

$$u(m)\delta(k-m) \xrightarrow{gera} g(k,m)u(m)$$

$$\sum_m u(m)\delta(k-m) \xrightarrow{gera} \sum_m g(k,m)u(m)$$

E a saída $y(k)$ excitada pela entrada $u(k)$ torna-se

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(k,m)u(m)$$

sendo $g(k,m) \rightsquigarrow$ **sequência de resposta ao pulso**

Descrição Entrada-Saída

▷ Se o sistema é causal, então não haverá saída se não for aplicado uma entrada:

$$\text{Causalidade} \iff g(k,m) = 0, \quad \forall\, k \leq m$$

▷ Se o sistema é **relaxado** em k_0 (i.e., a condição inicial é nula) e causal, então a sequência de resposta ao impulso é reduzida a:

$$y(k) = \sum_{m=k_0}^{k} g(k,m)u(m)$$

Descrição Entrada-Saída

▷ Se o sistema discreto linear é **invariante no tempo**, então o instante inicial de tempo pode ser escolhido como sendo $k_0 = 0$

Portanto, no caso invariante no tempo tem-se:

$$g(k,m) = \underbrace{g(k+T, m+T)}_{\text{deslocado...}} = \underbrace{g(k-m, 0)}_{\text{instante inicial nulo}} = g(k-m)$$

E a sequência de resposta ao pulso é reescrita de uma forma mais fácil:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{k} g(k-m)u(m) = \sum_{m=0}^{k} g(m)u(k-m)$$

que é a **convolução discreta**

Transformada-$\mathcal{Z}$

Definição – Transformada-$\mathcal{Z}$ $\quad Y(z) \triangleq \mathcal{Z}\{y(k)\} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$

Por definição, aplicar a Transformada-$\mathcal{Z}$ na sequência de resposta ao pulso gera a função de transferência

▷ Portanto, substituindo a resposta ao pulso em $y(k)$ obtém-se

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\widetilde{k}} g(k-m)u(m) \right) z^{-(k-m+m)}$$

(Como, por hipótese, o sistema é causal, então pode-se considerar $\widetilde{k} = \infty$)

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} g(k-m)z^{-(k-m)} \right) u(m)z^{-m}$$

Função de Transferência discreta

fazendo $p \triangleq k - m$ e $g(p) = 0$ para $p < 0$ (i.e., $k - m < 0$, $k < m$) tem-se

$$Y(z) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} g(p) z^{-p}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} u(m) z^{-m}\right) \;=\; G(z)U(z)$$

sendo que $G(z)$ é a **Função de Transferência**, i.e., é **a Trasformada-$\mathcal{Z}$ da sequência de resposta ao pulso**

Função de Transferência discreta

Exemplo Considere o sistema com atraso no tempo unitário amostrado e definido por:

$$y(k) = u(k-1)$$

isto é, a saída é exatamente a entrada atrasada. A sua sequência de resposta ao pulso é descrita por:

$$g(k) = \delta(k-1)$$

Portanto a FT discreta é dada por:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g(k)\} = \mathcal{Z}\{\delta(k-1)\} = z^{-1} = \frac{1}{z}$$

Relações entre Domínio-s e Domínio-$\mathcal{Z}$ & Estabilidade

A transformação bilinear: $$z = \frac{1+s}{1-s} \;\; ; \;\; s = \frac{z-1}{z+1}$$

define um **mapeamento do plano-s para o plano-z e vice-versa**. Note que, particularmente, **mapeia o semi-plano esquerdo aberto para o interior do círculo unitário e vice-versa**

▷ Lembre-se que a condição de estabilidade do caso contínuo requer que todos os polos estejam no semi-plano esquerdo aberto do plano complexo s. Então pela transformação bilinear, isto que dizer que **a condição de estabilidade correspondente no caso discreto é que todos os polos estejam contidos no interior do círculo unitário do plano complexo z**

Estabilidade no Domínio-$\mathcal{Z}$

Equação Característica (EC) – Assim como no caso a tempo contínuo, a EC resulta do denominador da Função de Transferência discreta, i.e., para $G(z) = N(z)/D(z)$ a EC é dada por:

$$\Delta(z) = D(z) = z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, z + a_n = 0$$

Estabilidade Geral

- Se **todas** as raízes da EC estiverem **dentro** do **círculo unitário** $(|z| < 1)$, então a equação a diferenças é **estável**

Exemplo A EC de $y(k) = 0.9y(k-1) - 0.2y(k-2)$ é, via transformada-$\mathcal{Z}$:

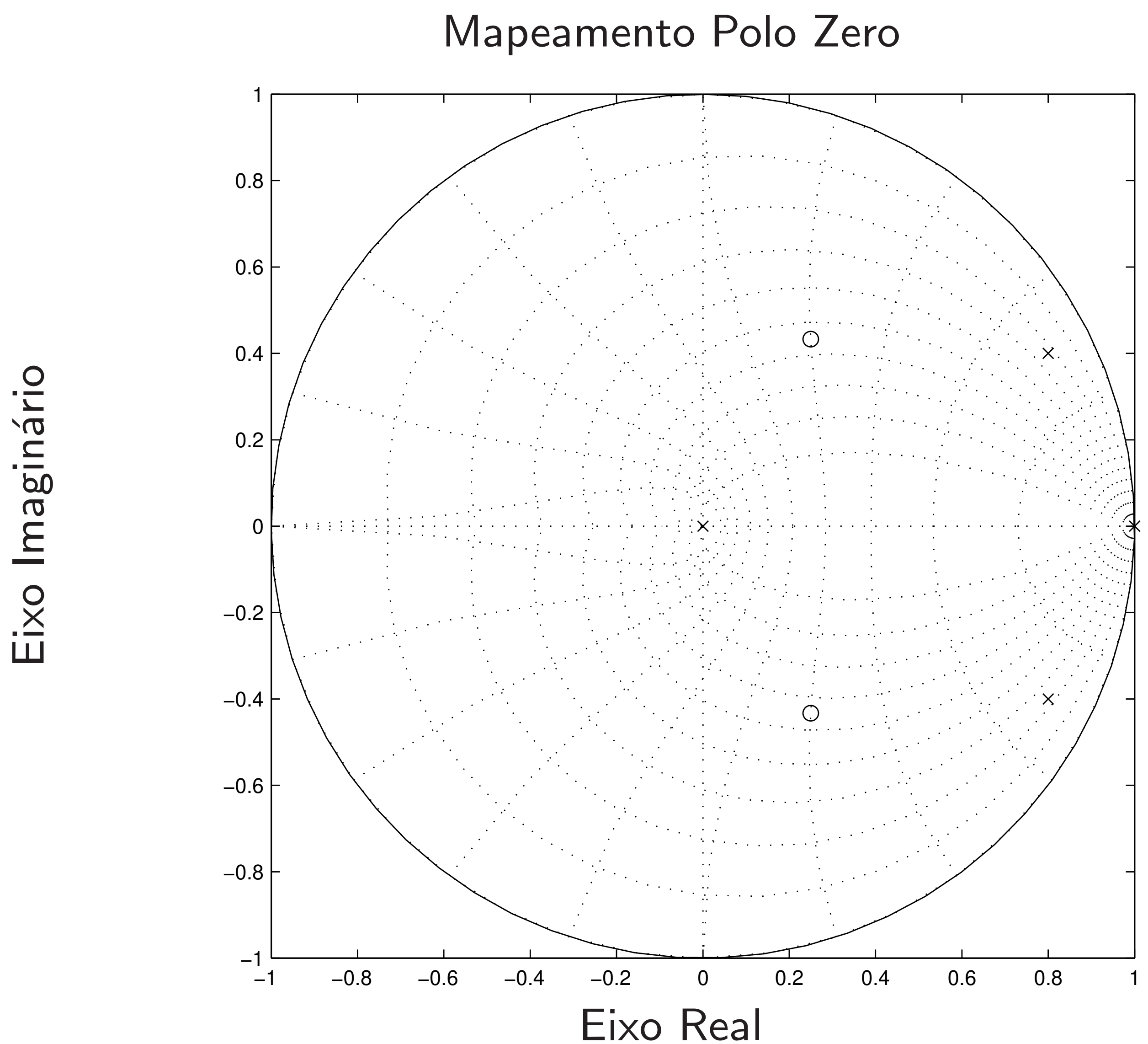
$$z^2 - 0.9z + 0.2 = 0$$

Raízes em $z_1 = 0.5$ e $z_2 = 0.4$ e tem-se estabilidade

MATLAB – Exemplo

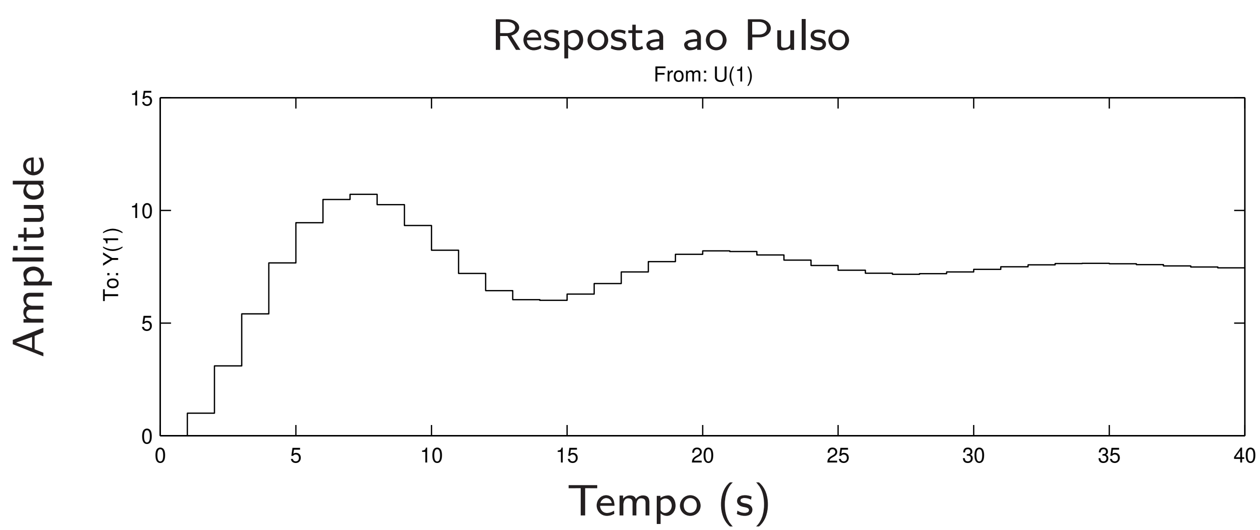
```
num=[1 0.5 -0.25 0.25];      % Numerador
den=[1 -2.6 2.4 -0.8 0];     % Denominador
T=1;                         % Período de amostragem
Gz = tf(num,den,T)           % Função de transferência discreta
Transfer function:
 z^3 + 0.5 z^2 - 0.25 z + 0.25
-------------------------------
z^4 - 2.6 z^3 + 2.4 z^2 - 0.8 z

Sampling time: 1

pzmap(Gz)                    % Polos e zeros
zgrid                        % 'Grid' no plano-z
```

MATLAB


Mapeamento Polo Zero
Eixo Imaginário
Eixo Real
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

MATLAB – Exemplo

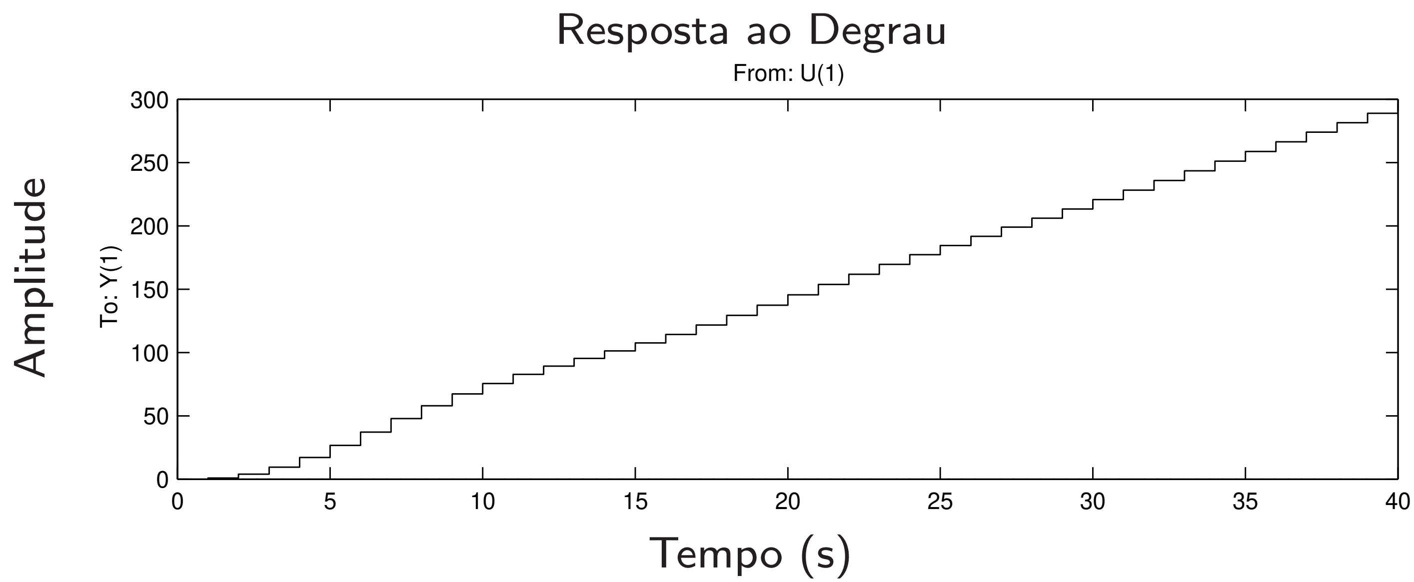
```
zpk(Gz)                      % Zeros, polos, ganho
Zero/pole/gain:
(z+1) (z^2 - 0.5z + 0.25)
--------------------------
z (z-1) (z^2 - 1.6z + 0.8)

impulse(Gz,40)               % Resposta ao pulso
```



É estável?

MATLAB – Exemplo

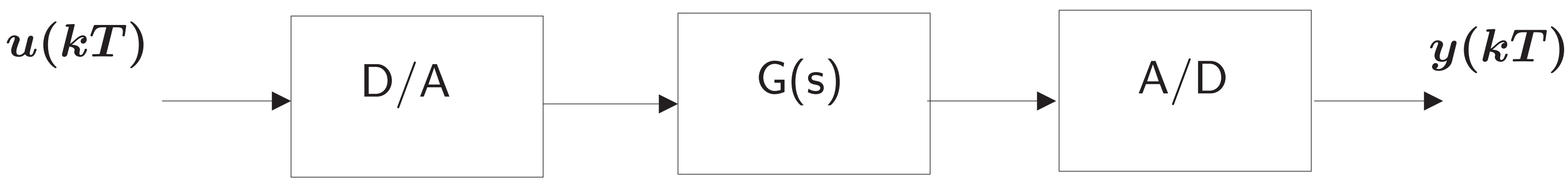
```
step(Gz,40)                    % Resposta ao degrau
```



É estável?

Sistemas Amostrados

Sistemas dinâmicos são usualmente contínuos no tempo. Para que possam ser controlados por um computador é necessário **amostrá-los**



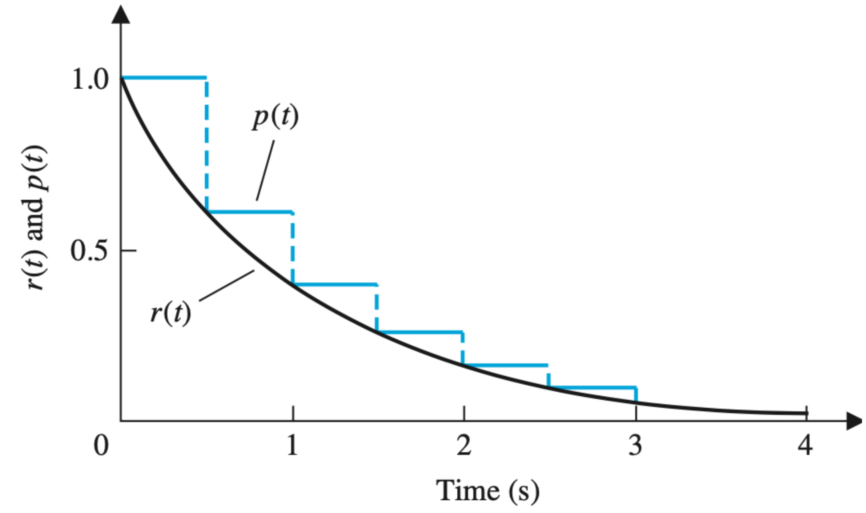
Deseja-se determinar a FT entre $u(kT)$ e $y(kT)$, i.e., $G(z)$

Amostragem

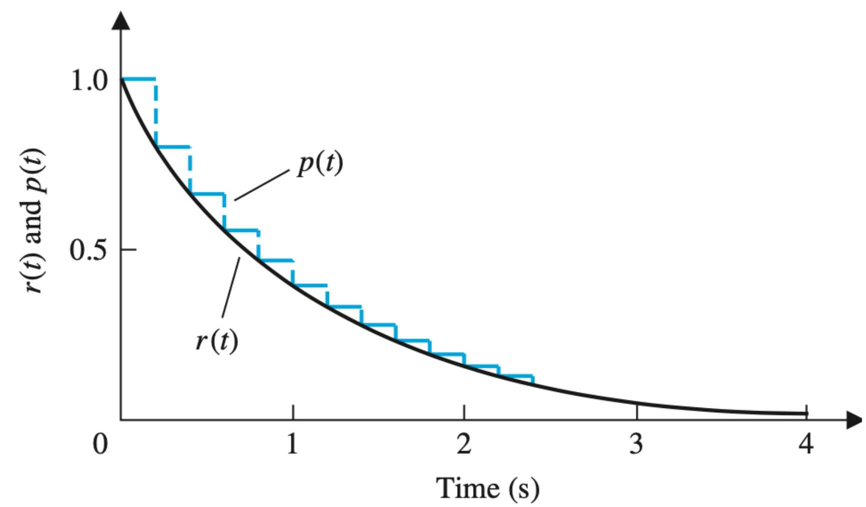
- Assume-se que o conversor D/A utiliza um **segurador de ordem zero** (SOZ): a amostra $u(kT)$ recebida em $t = kT$ é segurada até o instante $t = (k+1)T$
- Se $u(kT) = 1$ para $k = 0$ e $u(kT) = 0$ para $k \neq 0$, **a saída do conversor seria um pulso unitário** entre $k = 0$ e $k = 1$

Amostragem e SOZ

Resposta do amostrador e SOZ para entrada $r(t) = e^{-t}$, com valores de período de amostragem T diferentes



(a) $T = 0.5$ s



(b) $T = 0.2$ s

Sistemas Amostrados

▷ A resposta do conversor D/A ao pulso pode ser expressa como a diferença entre dois sinais do tipo degrau e descrito por: $\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T)$. Logo, a resposta da planta $G(s)$ para esta entrada particular é descrita por:

$$\widetilde{Y}(s) \;=\; G(s)\underbrace{\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}\right]}_{\text{SOZ}} \;=\; \left(1 - e^{-Ts}\right)\frac{G(s)}{s}$$

▷ Sabemos que a FT é a transformada-$\mathcal{Z}$ da resposta do sistema ao pulso:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left\{\widetilde{y}(kT)\right\} \\ &= \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\widetilde{Y}(s)\right\}\right\} \triangleq \mathcal{Z}\left\{\widetilde{Y}(s)\right\} \\ &= \mathcal{Z}\left\{\left(1 - e^{-Ts}\right)\frac{G(s)}{s}\right\} \end{aligned}$$

Então de:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\left(1 - e^{-Ts}\right)\frac{G(s)}{s}\right\}$$

note que e^{-Ts} é exatamente um atraso de um período, e, portanto:

$$G(z) = 1 - \mathcal{Z}\left\{e^{-Ts}\frac{G(s)}{s}\right\} = 1 - z^{-1}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Logo, obtém-se a **versão discretizada de $G(s)$ (que inclui o SOZ)** e que é descrita por:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Aproximação de Euler

Método de Euler – Aproximação de uma solução real no tempo para equações diferenciais

$$\dot{x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

sendo que Δx é a variação de x em um intervalo Δt. Mesmo se Δt não é exatamente nulo, esta relação pode ser aproximada por

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T} \quad \text{(Versão retangular de avanço)}$$

sendo $T = t_{k+1} - t_k$ (período de amostragem), ou ainda

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x(k) - x(k-1)}{T} \quad \text{(Versão retangular de atraso)}$$

▷ Uma possível seleção para T pode ser igual a $1/30$ vezes a largura de banda

▷ Equivalente discreto de um PID a tempo contínuo dado?

$$\text{Propocional:} \quad u(t) = K_P\, e(t)$$

$$\text{Integral:} \quad u(t) = K_I \int_0^t e(\eta)d\eta$$

$$\text{Derivativo:} \quad u(t) = K_D\, \dot{e}(t)$$

⇝ Aproximações por Euler (atraso):

$$\text{Proporcional:} \;\; u(k) = K_P e(k)$$

$$\text{Integral:} \;\; \frac{u(k) - u(k-1)}{T} = K_I e(k) \;\Rightarrow\; u(k) = u(k-1) + K_I T e(k)$$

$$\text{Derivativo:} \;\; u(k) = \frac{K_D}{T}\left(e(k) - e(k-1)\right)$$

Sistemas Amostrados – Controle PID

Considerando-se a transformada-$\mathcal{Z}$, obtém-se para o controle integral:

$$U(z) = z^{-1}U(z) + K_I T\, E(z), \text{ e } U(z) = \frac{z}{z-1} K_I T E(z)$$

para o controle derivativo:

$$U(z) = \frac{K_D}{T} \left(E(z) - z^{-1}E(z) \right) = \frac{K_D}{T} \frac{z-1}{z} E(z)$$

e para o proporcional: $U(z) = K_P E(z)$

Associando-se os três termos obtém-se a FT discreta do PID

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_P + K_I T \frac{z}{z-1} + \frac{K_D}{T} \frac{z-1}{z}$$

- Pode-se também obter a equação à diferenças do PID. Faça:

$$(1-z^{-1})U(z) = K_P(1-z^{-1})E(z)+K_I T\,E(z)+\frac{K_D}{T}\left(1-2z^{-1}+z^{-2}\right)E(z)$$

Aplicando a transformada-$\mathcal{Z}$ inversa, obtém-se a lei de controle digital:

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k-1)+\left(K_P+K_I T+\frac{K_D}{T}\right)e(k) \\ &\quad -\left(1+\frac{2K_D}{T}\right)e(k-1)+\frac{K_D}{T}e(k-2) \end{aligned}$$

que pode ser implementada computacionalmente para o período de amostragem T dado

Sistemas Amostrados – Controle PID

Exemplo Considere um motor com função de transferência (da tensão aplicada na entrada para a velocidade na saída (rad/s)) dada por:

$$G(s) = \frac{360000}{(s+60)(s+600)}$$

Para este motor se projetou um controlador PID com ganhos $K_P = 5$, $K_D = 0.006$ e $K_I = 1.67 \times 10^3$, para os quais tem-se um desempenho satisfatório em malha fechada para o caso a tempo contínuo. Da resposta temporal em malha fechada no caso a tempo contínuo, pode se medir o tempo de subida: $t_s \approx 10^{-3}$s (note que $t_s \approx 1.8/\omega_n$)

Pergunta-se:

1. Selecione uma taxa de amostragem apropriada para se obter um PID equivalente a tempo discreto

2. Determine a lei de controle digital correspondente (equação à diferenças) para ser implementada computacionalmente

⇝ Como $\omega_n \approx 1.8/t_s \approx 1800$rad/s, logo a largura de banda deve ser da ordem de 1800rad/s (é uma estimativa), ou 286.48Hz (sendo $f(\text{Hz}) = \omega(\text{rad/s})/2\pi$)

Uma heurística para seleção do período de amostragem poderia ser:

$$T = \frac{1}{286.48 \times 30} = 0.1164 \times 10^{-3}\text{s}$$

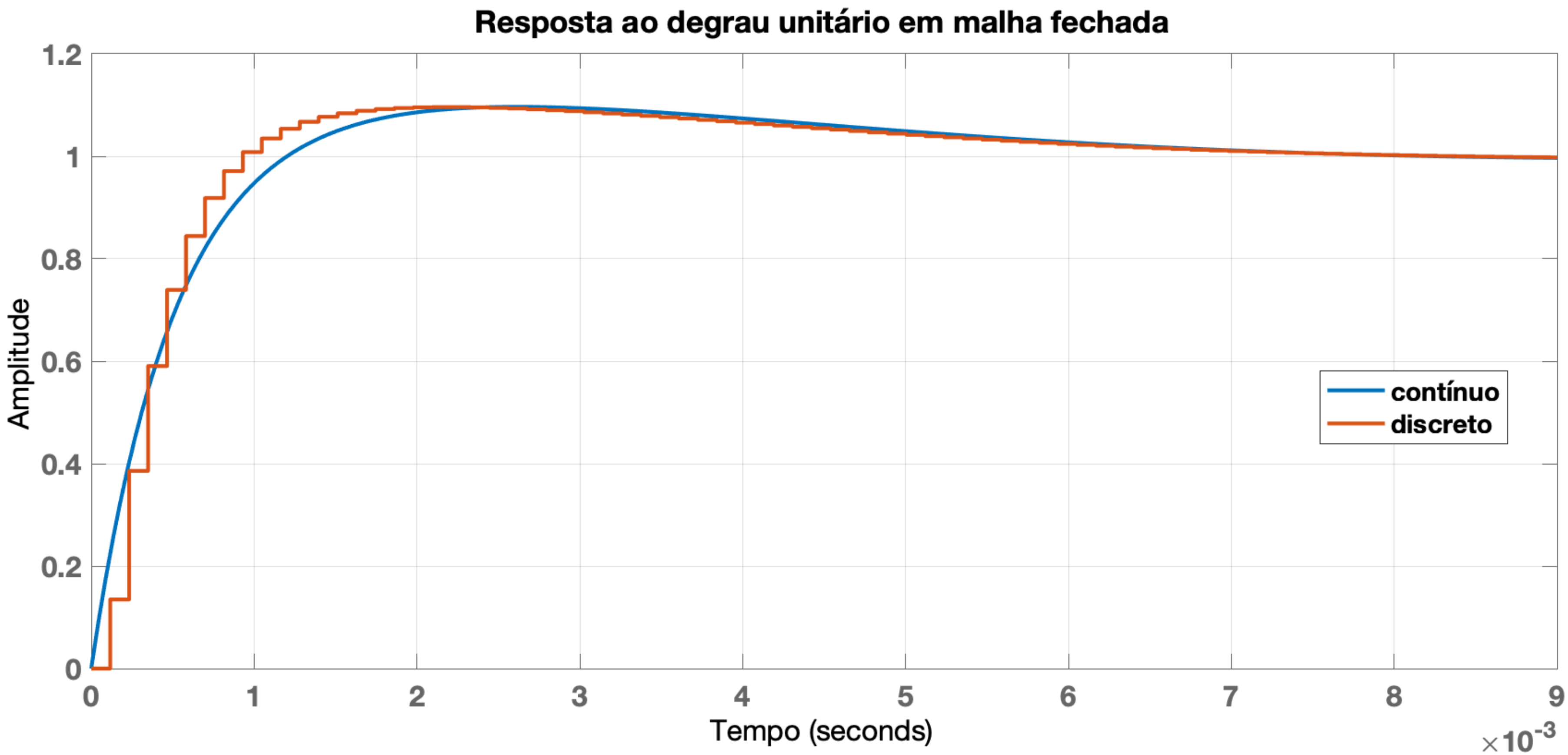
A equação à diferenças, neste caso, para o PID digital é descrita por:

$$u(k) = u(k-1) + 56.74e(k) - 104.92e(k-1) + 51.55e(k-2)$$

A figura a seguir ilustra as respostas em malha fechada, para entrada degrau, dos sistemas a tempo contínuo e discreto

Emulação – Controle PID

Este tipo de estratégia é chamada de Emulação (o Projeto é todo feito a tempo contínuo e depois o controlador é "reescrito" a tempo discreto)



MATLAB – Controle PID

Segue abaixo linhas de comando no MATLAB que reproduzem o resultado da simulação na figura anterior

```
g=tf([360000],conv([1 60],[1 600])); % Planta contínua

Kp=5;Kd=.006;Ki=1670;  % Ganhos do PID contínuo
pid=tf([Kd Kp Ki],[1 0]);  % PID a tempo contínuo

L=g*pid;  % Ganho em malha
mf=L/(1+L)   % FT em malha fechada contínua

step(mf)   % Resposta ao degrau unitário
hold on
```

MATLAB – Controle PID

```
T = 0.1164*10^(-3);    % Período de amostragem

Kid=tf([Ki*T 0],[1 -1],T);  % Ki (integrativo) discretizado
Kdd=tf([Kd/T -Kd/T],[1 0],T);  % Kd (derivativo) discretizado
pid_d=Kp+Kid+Kdd;    % PID discretizado (Kp se mantém igual)

gd=c2d(g,T);    % G(z) - Planta discretizada em T (com SOZ)

Ld=gd*pid_d;      % Ganho em malha discreto
mfd=Ld/(1+Ld);    % FT em malha fechada discreta

step(mfd)  % Resposta ao degrau unitário - Malha fechada discreto
```

Sistemas Amostrados – Atraso no tempo

▷ Para sistemas contínuos com atraso no tempo T_d, aproxima-se T_d no contexto discreto como sendo um atraso de r períodos de amostragem (isto é: z^{-r}), sendo que r é a parte inteira que resulta de T_d/T arredondado para baixo (T é o período de amostragem). Por exemplo, a função de transferência:

$$G(s) = e^{-T_d s}\frac{10}{s^2+6s+5} = e^{-0.25s}\frac{10}{s^2+6s+5}$$

pode ser discretizada usando c2d ("continuous to discrete"). Então:

```
>> T = 0.1                          % Período de amostragem dado: T=0.1s
>> G = tf(10,[1 6 5],'iodelay',0.25);     % Atraso no tempo Td=0.25s
>> Gz = c2d(G,T)
```

resultando em: $G(z) = z^{-2}\dfrac{0.01133z^2+0.05597z+0.007593}{z^3-1.511z^2+0.5488z}$ $(T_d/T \approx 2)$

Se puder selecionar T, uma sugestão é que garanta a relação $r \leq 3$

Exercício Obteve-se anteriormente a FT para aproximar o controle derivativo da forma:

$$\boldsymbol{D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = KT_D\,\frac{z-1}{Tz}}$$

sendo que o polo está em $\boldsymbol{z = 0}$ o que pode gerar um pouco de atraso em fase (no caso discreto). Por outro lado, poder-se-ia obter:

$$\boldsymbol{D(z) = K_pT_D\,\frac{z-1}{T}}$$

Isto pode ser feito? Qual a implicação para implementá-lo?