Realimentação de Estado — Sistemas SISO

1. Realimentação de Estado para Sistemas SISO

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

Considere o sistema n dimensional, LIT, SISO:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{cases}$$

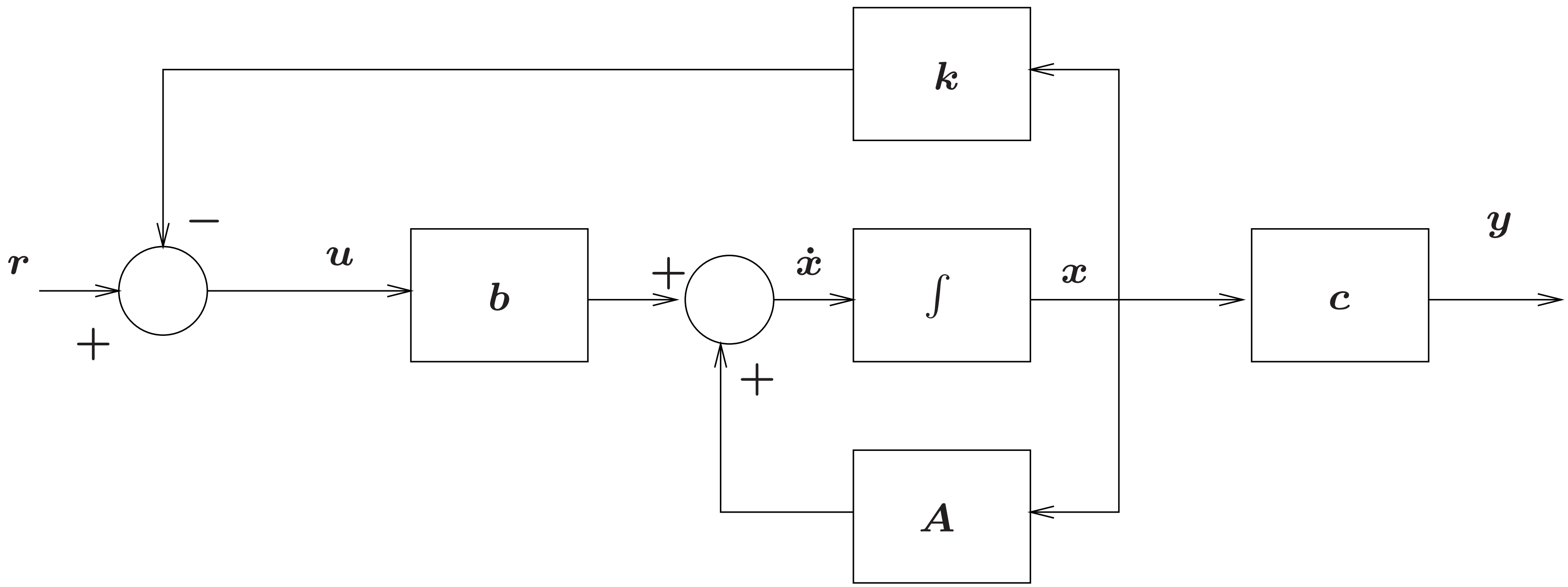
Na realimentação de estados, a entrada u é dada por

$$u = r - kx = r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} x$$

sendo r um sinal de referência. Substituindo u, tem-se

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A - bk)x + br \\ y &= cx \end{cases}$$

Esquemático



Realimentação de Estado — Preliminares

Teorema O par $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b})$ é controlável para qualquer vetor $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ se, e somente se, o par $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ também o for

Demonstração Considere, e.g., $n = 4$ e as matrizes de controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_f = \begin{bmatrix} b & (A-bk)b & (A-bk)^2b & (A-bk)^3b \end{bmatrix}$$

Note que: $$\mathcal{C}_f = \mathcal{C} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -kb & -k(A-bk)b & -k(A-bk)^2b \\ 0 & 1 & -kb & -k(A-bk)b \\ 0 & 0 & 1 & -kb \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Psi}$$

Ψ é não singular para qualquer k. Portanto o posto de $\mathcal{C}_f$ é igual ao de $\mathcal{C}$ ■

Realimentação de Estado — Preliminares

$\triangleright$ Consequência do Teorema anterior é que Controlabilidade é invariante sob qualquer realimentação de estados

$\triangleright$ No entanto, a propriedade de Observabilidade não é invariante sob qualquer realimentação de estados

Realimentação de Estado — Preliminares

Exemplo

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Pode-se verficar que o par (A,B) é controlável e o par (A,C) é observável

Define-se $u = r - \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x$, então

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Realimentação de Estado — Preliminares

Note que as matrizes de Controlabilidade e Observabilidade do sistema realimentado são tais que:

$$\mathcal{C}_f = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{posto} = 2$$

$$\mathcal{O}_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{posto} = 1$$

▷ O sistema realimentado é controlável, no entanto, é não observável

Uma Primeira Receita de Bolo para Projeto...

Exemplo Para: $\dot{x} = Ax + bu = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

O polinômio característico é: $\Delta(s) = (s-4)(s+2)$ (O sistema é instável)

▶ Com realimentação de estados: $u = r - kx = r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} x$, tem-se:

$$\dot{x} = (A - bk)x + br = \begin{bmatrix} 1-k_1 & 3-k_2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Cujo polinômio característico é: $\Delta_f(s) = s^2 + (k_1 - 2)s + (3k_2 - k_1 - 8)$

▷ A escolha de k_1 e k_2 pode alocar os autovalores do sistema em malha fechada em qualquer posição arbitrária! Como escolher? Garantir estabilidade?

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

Teorema Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{cases}$$

com $n = 4$ e o polinômio característico

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - A) = s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4$$

Se o sistema é controlável, então existe uma transformação $\bar{x} = Px$ com

$$Q = P^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que leva o sistema à forma canônica controlável a seguir

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

forma canônica controlável:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \bar{c}\bar{x} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} \bar{x}
\end{aligned}$$

Além disso, a função de transferência do sistema é dada por

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2^2 + \alpha_3 s + \alpha_4}$$

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

Demonstração: Sejam $\mathcal{C}$ e $\bar{\mathcal{C}}$ as matrizes de controlabilidade do sistema original e forma canônica, respectivamente. No caso SISO, ambas são quadradas. Se o sistema original é controlável então $\mathcal{C}$ é não singular. Então $\bar{\mathcal{C}}$ também será não singular, e as duas matrizes se relacionam na forma $\bar{\mathcal{C}} = P\mathcal{C}$. Assim,

$$P = \bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}^{-1} \quad \text{ou} \quad Q = P^{-1} = \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}^{-1}$$

A matriz de controlabilidade do sistema transformado é dada por (Chen, (7.10))

$$\bar{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 - \alpha_2 & -\alpha_1^3 + 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 - \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é dada por...

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

$$\bar{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e substituindo-se em $Q = \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}^{-1}$ obtém-se o resultado do teorema

Ainda verifica-se que a equação de estado transformada (que está na forma canônica controlável) é uma realização da função de transferência $G(s)$, que por sua vez é também a função de transferência do sistema original ■

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

Teorema Se o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} & = & Ax + bu \\ y & = & cx \end{cases}$$

é controlável, então com a realimentação de estados $u = r - kx$ pode-se alocar arbitrariamente os autovalores de $A - bk$ (desde que os autovalores complexos apareçam em pares complexo conjugados)

Demonstração Considerando $n = 4$, se o sistema é controlável, então pode ser escrito na forma canônica controlável (conforme o Teorema anterior), i.e.

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \bar{c}\bar{x} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} \bar{x}$$

com $\bar{A} = PAP^{-1}$ e $\bar{b} = Pb$. Substituindo $\bar{x} = Px$ na lei de controle, tem-se

$$u = r - kx = r - kP^{-1}\bar{x} \triangleq r - \bar{k}\bar{x}$$

com $\bar{k} \triangleq kP^{-1}$. Como $\bar{A} - \bar{b}\bar{k} = P(A - bk)P^{-1}$, as matrizes $(A - bk)$ e $(\bar{A} - \bar{b}\bar{k})$ têm os mesmos autovalores!

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

Especificados os autovalores do sistema em malha fechada, pode-se escrever o polinômio característico do sistema em malha fechada da forma:

$$\Delta_f(s) = s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4$$

Suponha que $\bar{k}$ é escolhida da forma:

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 & \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 & \bar{\alpha}_3 - \alpha_3 & \bar{\alpha}_4 - \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Então a equação dinâmica em malha fechada é descrita por

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A} - \bar{b}\bar{k})\bar{x} + \bar{b}r = \begin{bmatrix} -\bar{\alpha}_1 & -\bar{\alpha}_2 & -\bar{\alpha}_3 & -\bar{\alpha}_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

e o polinômio característico de $(A - bk)$ e $(\bar{A} - \bar{b}\bar{k})$ é dado por $\Delta_f(s)$

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

O ganho de realimentação de estados $\boldsymbol{k}$ que faz a alocação desejada pode ser computado de:

$$\boldsymbol{k} = \bar{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P} = \bar{\boldsymbol{k}}\bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}^{-1}$$

sendo

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Outra forma de obter a estrutura para $\bar{k}$

▷ Note que o polinômio característico em malha fechada é:

$$\begin{aligned}
\Delta_f(s) &= \det(s\mathbf{I} - A + bk) \\
&= \det\left((s\mathbf{I} - A)\left[\mathbf{I} + (s\mathbf{I} - A)^{-1}bk\right]\right) \\
&= \det(s\mathbf{I} - A)\det\left[\mathbf{I} + (s\mathbf{I} - A)^{-1}bk\right] \\
&= \Delta(s)\left[1 + k(s\mathbf{I} - A)^{-1}b\right]
\end{aligned}$$

Utilizou-se acima a propriedade que $\det(\mathbf{I}_m + AB) = \det(\mathbf{I}_n + BA)$, para A $m \times n$, e B $n \times m$, sendo que no caso específico tem-se $k \in \mathbb{R}^{1\times n}$

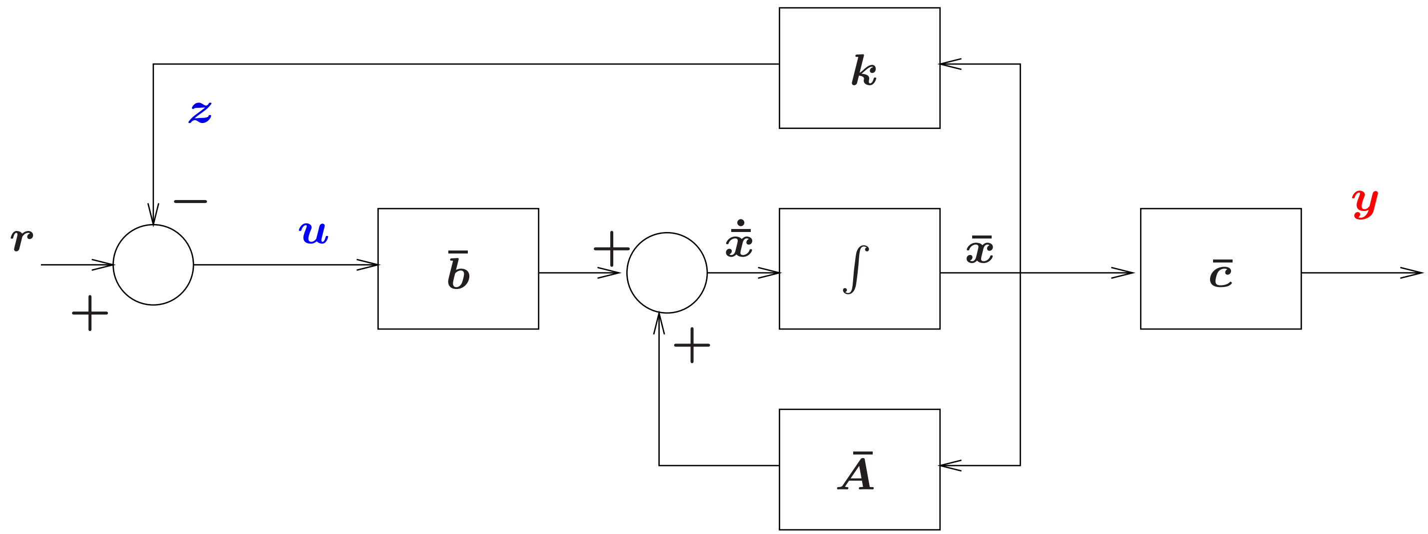
Portanto

$$\Delta_f(s) - \Delta(s) = \Delta(s)k(s\mathbf{I} - A)^{-1}b = \Delta(s)\bar{k}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{b}$$

Seja $\bar{k} = \left[\begin{array}{cccc} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 & \bar{k}_4 \end{array}\right]$

Outra forma de obter a estrutura para $\bar{k}$

Observando a configuração de realimentação:



FT de u para y: $\quad \bar{c}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{b} = \dfrac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{\Delta(s)}$

FT de u para z: $\quad \bar{k}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{b} = \dfrac{\bar{k}_1 s^3 + \bar{k}_2 s^2 + \bar{k}_3 s + \bar{k}_4}{\Delta(s)}$

Outra forma de obter a estrutura para $\bar{k}$

Portanto, substituindo $\bar{k}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{b} = \dfrac{\bar{k}_1 s^3 + \bar{k}_2 s^2 + \bar{k}_3 s + \bar{k}_4}{\Delta(s)}$

na expressão $\Delta_f(s) - \Delta(s) = \Delta(s)\bar{k}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{b}$

Sendo que:

$$\Delta_f(s) = s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4$$

e

$$\Delta(s) = s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4$$

obtém-se:

$$(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)s^3 + (\bar{\alpha}_2 - \alpha_2)s^2 + (\bar{\alpha}_3 - \alpha_3)s + (\bar{\alpha}_4 - \alpha_4)$$

$$= \bar{k}_1 s^3 + \bar{k}_2 s^2 + \bar{k}_3 s + \bar{k}_4$$

que recupera o ganho $\bar{k}$ proposto quando se igualam as potências

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

Curiosidades Considere a FT com $n = 4$:

$$G(s) = c(s\mathbf{I} - A)^{-1}b = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4}$$

A função de transferência em malha fechada (com $u = r - kx$) é dada por:

$$G_f(s) = c(s\mathbf{I} - A + bk)^{-1}b = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4}$$

▷ **A realimentação de estados pode alterar a localização dos polos, mas não afeta os zeros da função de transferência**

▷ Implicação: pode afetar a observabilidade já que se um ou mais polos são deslocados de maneira a coincidir com zeros, pode haver cancelamento

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

Exemplo Considere o pêndulo invertido linearizado:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x
\end{aligned}$$

O sistema é controlável e o polinômio característico em malha aberta é:

$$\begin{aligned}
\Delta(s) &= s^2(s^2 - 5) \\
&= s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4 \\
&= s^4 + 0s^3 - 5s^2 + 0s + 0
\end{aligned}$$

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

Escrevendo o sistema na forma canônica controlável ($P^{-1} = \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}^{-1}$) tem-se

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & -1/6 \\ -1/3 & 0 & -1/6 & 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores em malha fechada desejados: $-1.5 \pm 0.5j$ e $-1 \pm j$

Realimentação de Estado — Sistemas SISO

Então o polinômio característico em malha fechada é dado por:

$$\begin{aligned}\Delta_f(s) &= (s+1.5-0.5j)(s+1.5+0.5j)(s+1-j)(s+1+j)\\ &= s^4+5s^3+10.5s^2+11s+5\end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1-\alpha_1 & \bar{\alpha}_2-\alpha_2 & \bar{\alpha}_3-\alpha_3 & \bar{\alpha}_4-\alpha_4 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} (5-0) & (10.5+5) & (11-0) & (5-0) \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 5 & 15.5 & 11 & 5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Portanto: $k = \bar{k}P = \begin{bmatrix} -5/3 & -11/3 & -103/12 & -13/3 \end{bmatrix}$

MATLAB `k=place(A,b,p)`

Fórmula de Ackermann — Alocação de Polos

Fórmula de Ackermann: $\boldsymbol{k = e_n' \mathcal{C}^{-1} \Delta_f(A)}$

- $\mathcal{C}$ é a matriz de Controlabilidade: $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$

- e_n é o vetor unitário: $e_n' \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

- $\Delta_f(A)$ é o polinômio característico de malha fechada, com os seus respectivos coeficientes (denotados por $\bar{\alpha}$'s) e avaliado na matriz A em malha aberta (note então que pelo Teorema de Cayley-Hamilton $\Delta_f(A) \neq 0$. Em outras palavras: $\Delta_f(\cdot)$ só se anula para $\bar{A}$, matriz em malha fechada):

$$\Delta_f(A) \triangleq A^n + \bar{\alpha}_1 A^{n-1} + \bar{\alpha}_2 A^{n-2} + \cdots + \bar{\alpha}_n \mathrm{I} \neq 0$$

MATLAB `k=acker(A,b,p)`

Equação de Lyapunov – Alocação de Autovalores

Considere o par $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ controlável, com $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Encontre $\boldsymbol{k}$ tal que $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{k})$ tenha os autovalores desejados (desde que não coincidam com nenhum dos autovalores de $\boldsymbol{A}$)

Procedimento

1. Escolha uma matriz $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com os autovalores desejados
2. Escolha $\bar{\boldsymbol{k}}$ arbitrário tal que $(\boldsymbol{F}, \bar{\boldsymbol{k}})$ seja observável
3. Obtenha a única solução $\boldsymbol{T}$ da equação de Lyapunov

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{b}\bar{\boldsymbol{k}}$$

4. Compute o ganho de realimentação $\boldsymbol{k} = \bar{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{T}^{-1}$

Equação de Lyapunov – Alocação de Autovalores

Note que se T é não singular, então $\bar{k} = kT$ e $AT - TF = b\bar{k}$ implicam que $AT - TF = bkT$ ou $AT - bkT = TF$. Desta forma é fácil concluir que:

$$(A - bk)T = TF \quad \Longleftrightarrow \quad A - bk = TFT^{-1}$$

▷ $(A - bk)$ e F são matrizes similares (têm os mesmos autovalores). Se A e F não têm autovalores comuns, existe uma única solução T para qualquer $\bar{k}$. Caso A e F tenham algum autovalor em comum, a solução T pode existir ou não (depende se $b\bar{k}$ está no espaço range)

▷ O resultado a seguir garante quando T é não singular (e existe o ganho k)

Teorema Se A e F não têm autovalores em comum, então a única solução de $AT - TF = b\bar{k}$ é não-singular se, e somente se, $(A{,}b)$ é controlável e $(F, \bar{k})$ é observável

Equação de Lyapunov – Alocação de Autovalores

Demonstração Considere $n = 4$ e o polinômio característico de A dado por

$$\Delta(s) = s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4$$

De Cayley-Hamilton: $\Delta(A) = A^4 + \alpha_1 A^3 + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A + \alpha_4 \mathbf{I} = \mathbf{0}$

Para F, considere $\Delta(F) = F^4 + \alpha_1 F^3 + \alpha_2 F^2 + \alpha_3 F + \alpha_4 \mathbf{I}$

Como A e F não têm autovalores em comum, pode-se concluir que F não satisfaz a equação característica de A e, portanto,

$$\Delta(F) \neq \mathbf{0}$$

Equação de Lyapunov – Alocação de Autovalores

Substituindo $AT = TF + b\bar{k}$ em $A^2T - TF^2$, tem-se

$$\begin{aligned} A^2T - TF^2 &= A(TF + b\bar{k}) - TF^2 \\ &= Ab\bar{k} + (AT - TF)F \\ &= Ab\bar{k} + b\bar{k}F \end{aligned}$$

De maneira similar, obtém-se o conjunto de equações:

$$\begin{aligned} IT - TI &= 0 \\ AT - TF &= b\bar{k} \\ A^2T - TF^2 &= Ab\bar{k} + b\bar{k}F \\ A^3T - TF^3 &= A^2b\bar{k} + Ab\bar{k}F + b\bar{k}F^2 \\ A^4T - TF^4 &= A^3b\bar{k} + A^2b\bar{k}F + Ab\bar{k}F^2 + b\bar{k}F^3 \end{aligned}$$

Equação de Lyapunov – Alocação de Autovalores

Multiplicando a primeira equação por α_4, a segunda por α_3, a terceira por α_2, a quarta por α_1, a última por 1, e somando todas, tem-se

$$\underbrace{\Delta(A)}_{=0} T - T \underbrace{\Delta(F)}_{\neq 0} = -T\Delta(F)$$

$$= \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k} \\ \bar{k}F \\ \bar{k}F^2 \\ \bar{k}F^3 \end{bmatrix}$$

▷ Se (A,b) é controlável e $(F,\bar{k})$ é observável, as matrizes acima são não singulares. Como $\Delta(F) \neq 0$, então necessariamente T é não singular ■

Equação de Lyapunov – Alocação de Autovalores

▷ Escolha de $\boldsymbol{F}$ e $\bar{\boldsymbol{k}}$: $\boldsymbol{F}$ companheira e $\bar{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ou, se autovalores complexos, $\boldsymbol{F}$ modal e $\bar{\boldsymbol{k}}$ com ao menos um elemento diferente de zero associado a cada bloco diagonal

Exemplo Pêndulo invertido e alocação em: $-\mathbf{1.5} \pm \mathbf{0.5}\boldsymbol{j}$ e $-\mathbf{1} \pm \boldsymbol{j}$. Então

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1.5} & \mathbf{0.5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{0.5} & -\mathbf{1.5} \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

MATLAB $\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1.6667} & -\mathbf{3.6667} & -\mathbf{8.5833} & -\mathbf{4.3333} \end{bmatrix}$

O ganho é único em sistemas SISO (usando `place` ou `lyap`)

Cálculo direto – Alocação de Autovalores

▷ Cálculo direto dos valores do ganho $\boldsymbol{k}$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x
\end{aligned}
$$

Alocação desejada: $-1.5 \pm 0.5j$ e $-1 \pm j$

$$
\begin{aligned}
\Delta_f(s) &= (s+1.5-0.5j)(s+1.5+0.5j)(s+1-j)(s+1+j) \\
&= s^4 + 5s^3 + 10.5s^2 + 11s + 5
\end{aligned}
$$

Cálculo direto – Alocação de Autovalores

$$A - bk = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 - 1 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2k_1 & 2k_2 & 5 + 2k_3 & 2k_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[s\mathbf{I} - (A - bk)\right] = s^4 + (k_2 - 2k_4)s^3 + (k_1 - 2k_3 - 5)s^2 - 3k_2 s - 3k_1$$

Igualando com: $\Delta_f(s) = s^4 + 5s^3 + 10.5s^2 + 11s + 5$ e resolvendo tem-se:

$$k_1 = \frac{-5}{3} \quad ; \quad k_2 = \frac{-11}{3} \quad ; \quad k_3 = \frac{-103}{12} \quad ; \quad k_4 = \frac{-13}{3}$$

que é o mesmo resultado obtido anteriormente pelos outros métodos

Estabilização

Considere um sistema não controlável, i.e., nem todos os autovalores podem ser arbitrariamente alocados via realimentação. A equação de estado pode ser transformada em

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_c \\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{A}}_c & \bar{\boldsymbol{A}}_{12} \\ \boldsymbol{0} & \bar{\boldsymbol{A}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_c \\ \bar{\boldsymbol{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{b}}_c \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

com $(\bar{\boldsymbol{A}}_c, \bar{\boldsymbol{b}}_c)$ controlável. Note que como a matriz $\bar{\boldsymbol{A}}$ é bloco diagonal, os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são os autovalores das matrizes $\bar{\boldsymbol{A}}_c$ e $\bar{\boldsymbol{A}}_{\bar{c}}$

▷ Como fica a configuração de realimentação de estado?

Estabilização

▷ A realimentação de estado: $u = r - \bar{k}\bar{x} = r - \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$

gera o sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{b}_c\bar{k}_1 & \bar{A}_{12} - \bar{b}_c\bar{k}_2 \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Os autovalores de $\bar{A}_{\bar{c}}$ não são afetados pela realimentação de estado (já que é a parcela não controlável). A controlabilidade do par (A, b) é não só suficiente mas também necessária para se alocar todos os autovalores de $(A - bk)$

▷ Se $\bar{A}_{\bar{c}}$ é estável, o sistema é dito ser estabilizável (i.e., pode-se estabilizar a parcela que é controlável)

Regulação e Rastreamento

▷ **Para $r = 0$**, o comportamento dinâmico do sistema é governado pelas condições iniciais. Na regulação, o problema é obter uma realimentação de estados que leve a resposta para zero com uma certa taxa de decaimento:

$$y(t) = ce^{(A-bk)t}x(0) \quad \Rightarrow \quad (A - bk) \text{ estável?}$$

▷ **Para $r = a$ (constante)**, o problema do rastreamento assintótico consiste na determinação de um ganho de realimentação de estados que leve $y(t) \rightarrow r(t)$ quando $t \rightarrow \infty$

A lei de controle para o rastreamento deve incluir um ganho p feedforward:

$$u(t) = pr(t) - kx$$

Regulação e Rastreamento

Por exemplo, para $n = 4$: $G_f(s) = p\,\dfrac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4}$

(A, b) controlável implica que os autovalores de $(A - bk)$ ou, equivalentemente, os polos de $G_f(s)$ podem ser arbitrariamente alocados. Para $r(t) = a$, alocando polos com parte real negativa (BIBO estabilidade), tem-se a saída:

$$y(t) \text{ que se aproxima de } G_f(0)a \text{ quando } t \to \infty$$

Para se ter rastreamento assintótico $(y(t) = r = a)$, basta impor $G_f(0) = 1$:

$$G_f(0) = 1 = p\,\frac{\beta_4}{\bar{\alpha}_4} \implies p = \frac{\bar{\alpha}_4}{\beta_4}$$

Note que $\beta_4 \neq 0$ se, e somente se, $G(s)$ não tiver nenhum zero em $s = 0$

Rejeição de Distúrbio

Considere o sistema com entrada de distúrbio constante, $\boldsymbol{w}$:

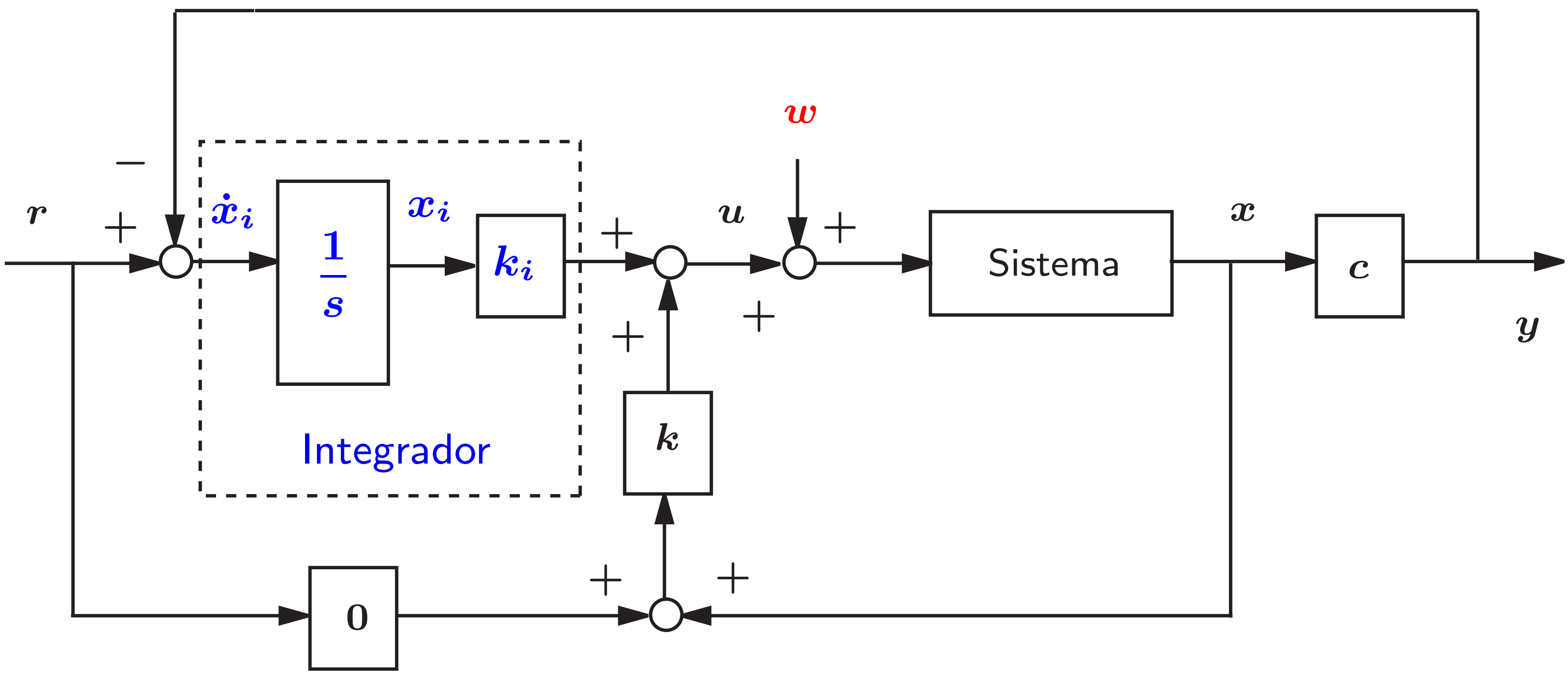
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} & = & \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{bu} + \boldsymbol{bw} \\ \boldsymbol{y} & = & \boldsymbol{cx} \end{cases}$$

▷ Como obter a realimentação de estado tal que $\boldsymbol{y(t)} \rightarrow \boldsymbol{r(t)}$ com $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$?

▷ O fundamento desta estratégia se baseia na introdução de uma ação integrativa compondo o controlador, tal que o sinal de controle "$\boldsymbol{u}$" garanta ao mesmo tempo: estabilidade, alocação dos autovalores em malha fechada na posição deseja e rastreamento da entrada de referência mesmo com a presença de distúrbio constante

Rejeição de Distúrbio

▷ A estrutura do controle integral é apresentada abaixo quando se tem todas as variáveis de estado disponíveis para realimentação



Note que $\dot{x}_i = r - cx$

Rejeição de Distúrbio

Define-se um vetor de estado aumentado incluindo a saída do integrador x_i, da forma: $\begin{bmatrix} x' & x_i \end{bmatrix}'$, então a realimentação de estado pode ser escrita como:

$$u = \begin{bmatrix} k & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

Substituindo no sistema original obtém-se (com $\dot{x}_i = r - cx$)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + bk & bk_i \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} w \\ y &= \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rejeição de Distúrbio

Teorema Se $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ é controlável e se $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{s}\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{b}$ não tem zero na origem $(\boldsymbol{s} = \mathbf{0})$ (tal que não haja cancelamento com o integrador), então todos os autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$ podem ser alocados arbitrariamente selecionando o ganho $\begin{bmatrix} \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k_i} \end{bmatrix}$

Como calcular o ganho de controle $\begin{bmatrix} \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k_i} \end{bmatrix}$? Utilize as mesmas técnicas obtidas anteriormente. Para isto, basta considerar as matrizes do sistema aumentado, sendo que este tem agora $\boldsymbol{n} + \mathbf{1}$ variáveis de estado. $\boldsymbol{k_i}$ é um valor escalar extraído de $\begin{bmatrix} \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k_i} \end{bmatrix}$, fruto do projeto