

Projeto de Sistemas de Controle no Domínio da Frequência

1. Redes de compensação em cascata
2. Compensação de Avanço em Fase
3. Compensação de Atraso em Fase

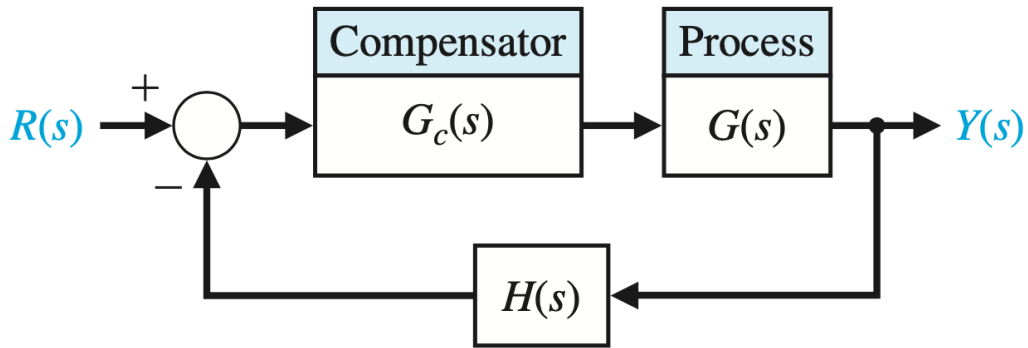
Metodologias de Projeto

Lugar das Raízes – Adição ao sistema original de um compensador que possibilite alterar o lugar das raízes (em função da variação de um ou mais parâmetros) até a obtenção da configuração da malha fechada desejada

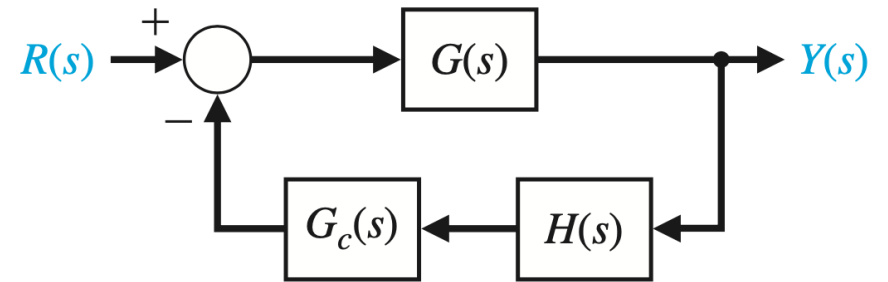
Diagrama de Bode – Alteração da resposta em frequência pela adição de uma rede de compensadores até que as especificações no domínio da frequência sejam alcançadas

Tipos de compensação? Veja a seguir

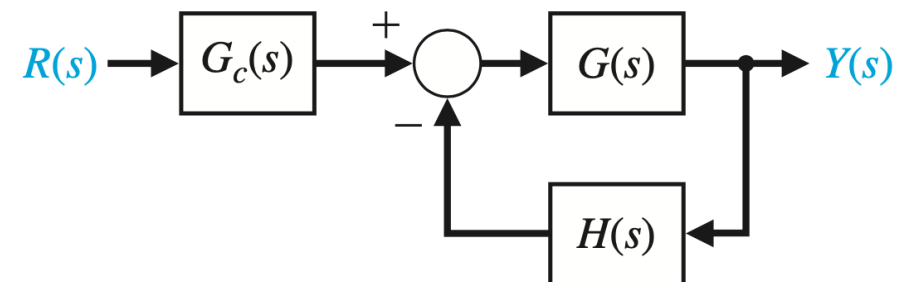
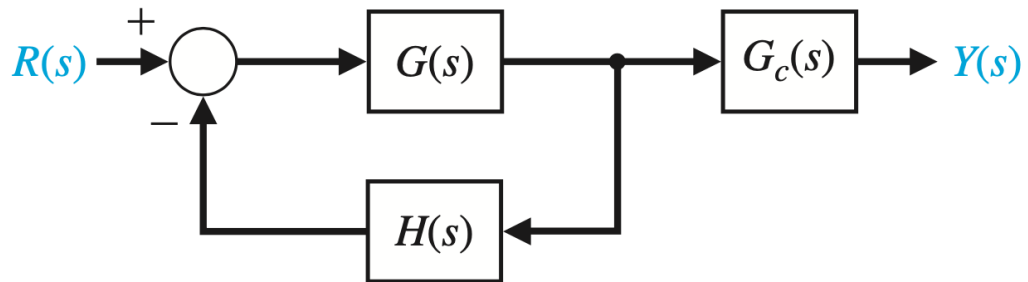
Tipos de Compensação



(a)



(b)



Redes de Compensação em Cascata

▷ Considere um compensador genérico que pode ser usado para modificar tanto o traçado do Lugar das Raízes quanto as características da Resposta em Frequência e é descrito na forma de Ganho, zero e polo:

$$G_c(s) = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{j=1}^N (s + p_j)}$$

▷ A ideia é que a técnica de compensação desenvolvida para compensadores de primeira ordem poderia ser estendida a compensadores de ordem mais alta simplesmente colocando em cascata vários compensadores de primeira ordem

Redes de Compensação em Cascata

- ▷ O compensador é projetado de forma que o ganho DC do sistema compensado satisfaça aos requisitos de erro em estado estacionário e ajuste favoravelmente sua dinâmica
- ▷ Consideremos inicialmente um compensador de primeira ordem do tipo

$$G_c(s) = \frac{K(s + z)}{(s + p)}$$

- ▷ O projeto se reduz à escolha cuidadosa do ganho, polo e zero para garantir um desempenho adequado

Compensação de Avanço em Fase

Compensação de Avanço em Fase – Tem-se $|z| < |p|$, tal que:

$$\begin{aligned} G_c(j\omega) &= \frac{K(j\omega + z)}{(j\omega + p)} \\ &= \frac{\frac{Kz}{p} \left(\frac{j\omega}{z} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{p} + 1 \right)} \\ &= \frac{K(1 + j\omega\alpha\tau)}{\alpha(1 + j\omega\tau)} \end{aligned}$$

sendo $\tau = \frac{1}{p}$, $\alpha = \frac{p}{z}$ (ou $p = \alpha z$)

Compensação de Avanço em Fase

▷ Neste caso a fase é dada por

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \alpha\omega\tau - \tan^{-1} \omega\tau$$

como $\alpha > 1$ (lembre-se: $|z| < |p|$ e $\alpha = \frac{p}{z}$), logo $\phi(\omega) > 0$

▷ Suponha que $K = 1$ então:

$$G_c(s) = \frac{(1 + \alpha\tau s)}{\alpha(1 + \tau s)}$$

Pergunta-se: em qual frequência ocorre o máximo avanço em fase e qual é o valor de ângulo máximo de avanço em fase?

Compensação de Avanço em Fase

- ▷ O valor máximo da fase (avanço máximo) ocorre na frequência ω_m que corresponde à média geométrica entre $p = 1/\tau$ e $z = 1/\alpha\tau$, i.e.:

$$\omega_m = \sqrt{zp} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

- ▷ Por quê? Note que: $\tan \phi(\omega) = \frac{\frac{\omega}{z} - \frac{\omega}{p}}{1 + \frac{\omega^2}{zp}}$, portanto derivando tem-se:

$$\frac{d \tan \phi(\omega)}{d\omega} = 0 = \frac{\left(1 + \frac{\omega^2}{zp}\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{p}\right) - \omega \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{p}\right) \frac{2\omega}{zp}}{\left(1 + \frac{\omega^2}{zp}\right)^2}$$

$$\therefore 1 + \frac{\omega^2}{zp} - \frac{2\omega^2}{zp} = 1 - \frac{\omega^2}{zp} = 0$$

$$\therefore \omega^2 = zp \Rightarrow \omega_m = \sqrt{zp}$$

Compensação de Avanço em Fase

- ▷ Para se determinar o ângulo máximo de avanço em fase, escreve-se

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= \tan^{-1} \alpha\omega\tau - \tan^{-1} \omega\tau \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{\alpha\omega\tau - \omega\tau}{1 + \alpha\omega\tau\omega\tau} \right) \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{\alpha\omega\tau - \omega\tau}{1 + \alpha(\omega\tau)^2} \right)\end{aligned}$$

- ▷ Substituindo-se ω por $\omega_m = 1/\tau\sqrt{\alpha}$, determina-se o ângulo máximo

$$\tan \phi_m = \frac{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1 + 1} = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

Compensação de Avanço em Fase

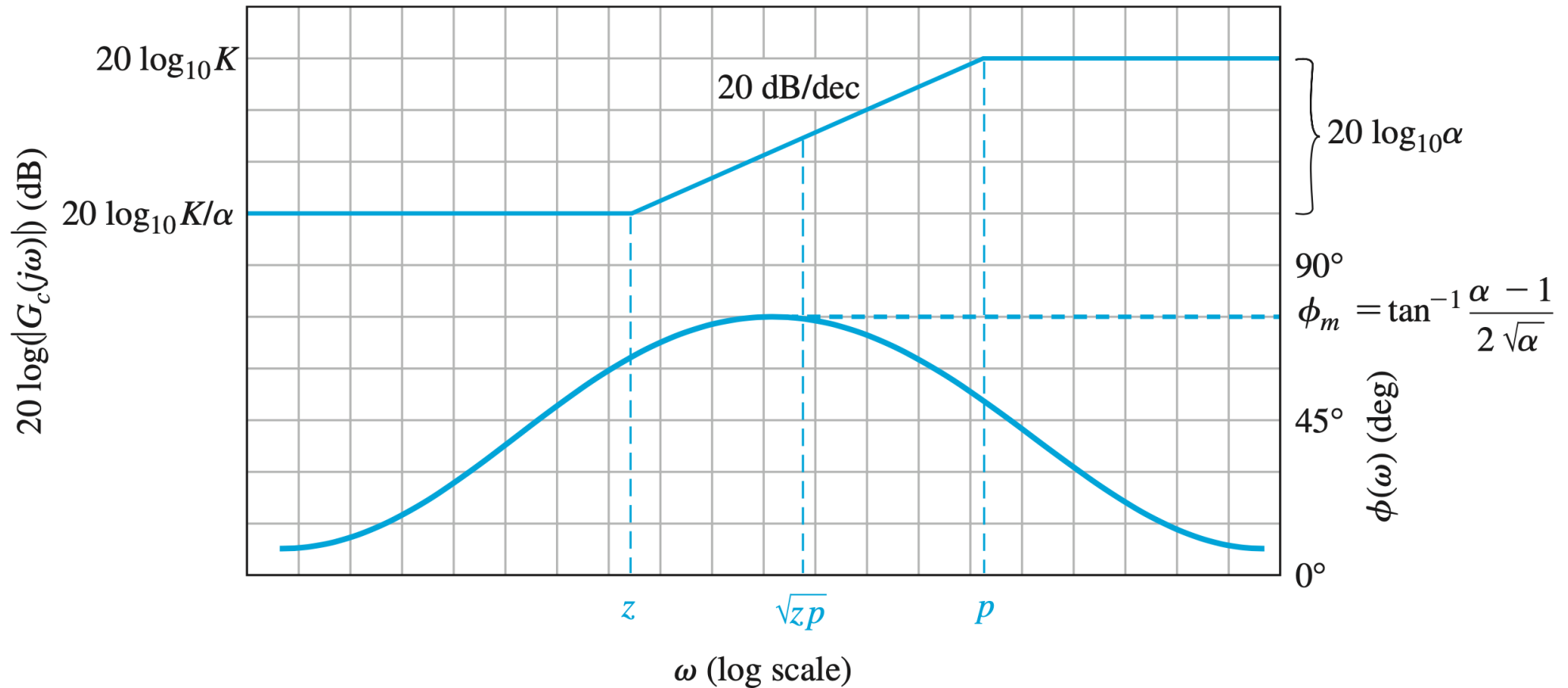
- ▷ Então o avanço em fase que se deseja pode ser calculado pela razão entre o polo e o zero (dado por $\alpha = \frac{p}{z}$)
- ▷ Usando a relação $\sin \phi_m = \tan \phi_m / \sqrt{1 + \tan^2 \phi_m}$, pode-se obter uma forma mais fácil de expressar o ângulo máximo em relação ao posicionamento no plano-s do polo e do zero (dado por α), i.e.:

$$\sin \phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

ou inversamente

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$$

Compensação de Avanço em Fase



Projeto de Avanço em Fase via Bode

- O projeto do compensador de avanço em fase consiste em se encontrar valores para p e z tais que a resposta do sistema compensado seja **moldada** de forma satisfatória. Em particular, se a Margem de Fase (**MF**) da malha aberta não for suficiente (após ajustar o ganho do sistema para atender especificação de erro em estado estacionário), o avanço em fase pode ser introduzido adicionando-se o compensador na faixa de frequência adequada (tal que em $\omega = \omega_m$, frequência de maior avanço em fase, o ganho do sistema compensado seja **0dB**)

Projeto de Avanço em Fase via Bode

- Inicialmente, o valor de α é determinado em função do aumento na Margem de Fase (**MF**) desejado a partir da expressão

$$\alpha = \frac{1 + \text{sen}\phi_m}{1 - \text{sen}\phi_m}$$

- Note que o acréscimo no ganho total que é fruto da introdução do compensador é igual a **$20 \log \alpha$** . Além disso, note que o máximo avanço em fase ocorre a meio caminho (entre o zero e o polo na escala logarítmica de frequência), i.e., em $\omega_m = \sqrt{z p}$, onde espera-se que o ganho **em $\omega = \omega_m$ seja $10 \log \alpha$**

Passos para Síntese – Avanço em Fase

1. Determina-se primeiramente K para o qual o ganho em malha aberta atenda à especificação de erro em estado estacionário
2. Usando o ganho K determinado no passo 1, obtenha o diagrama de Bode de $KG(s)$ para determinar a **MF** do sistema
3. Deixando uma pequena margem de segurança, escolhe-se o ângulo de avanço em fase adicional ϕ_m , tal que o sistema atinja a **MF** especificada
4. Escolhido ϕ_m , calcule $\alpha = \frac{1+\text{sen}\phi_m}{1-\text{sen}\phi_m}$ (lembrando que $\alpha = p/z$)
5. Determina-se a frequência para a qual o ganho do sistema não compensado corresponda a $-10 \log \alpha$ dB (nessa frequência o ganho do sistema compensado deverá ser aproximadamente **0dB e $\omega = \omega_m$**)

Projeto de Avanço em Fase via Bode

6. Calcula-se o polo e o zero do compensador usando as relações:

$$p = \omega_m \sqrt{\alpha} \quad \text{e} \quad z = p/\alpha$$

7. Traça-se a resposta em frequência do sistema compensado e checka-se se a **MF** resultante é satisfatória (não sendo, repetem-se os passos anteriores aumentando ϕ_m)

8. Por fim, ajusta-se o ganho K do sistema de forma a contrabalançar a atenuação do compensador ($1/\alpha$), o que normalmente não reduz significativamente a **MF** pré-especificada. Caso a **MF** do sistema com o ganho re-ajustado não seja aceitável, repete-se o procedimento

Projeto de Avanço em Fase via Bode

Exemplo Considere o ganho em malha:

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 2)} = \frac{K/2}{j\omega(0.5j\omega + 1)}$$

Objetivos $e_{ss} \leq 5\%$ para entrada rampa e $\mathbf{MF} \geq 45^\circ$

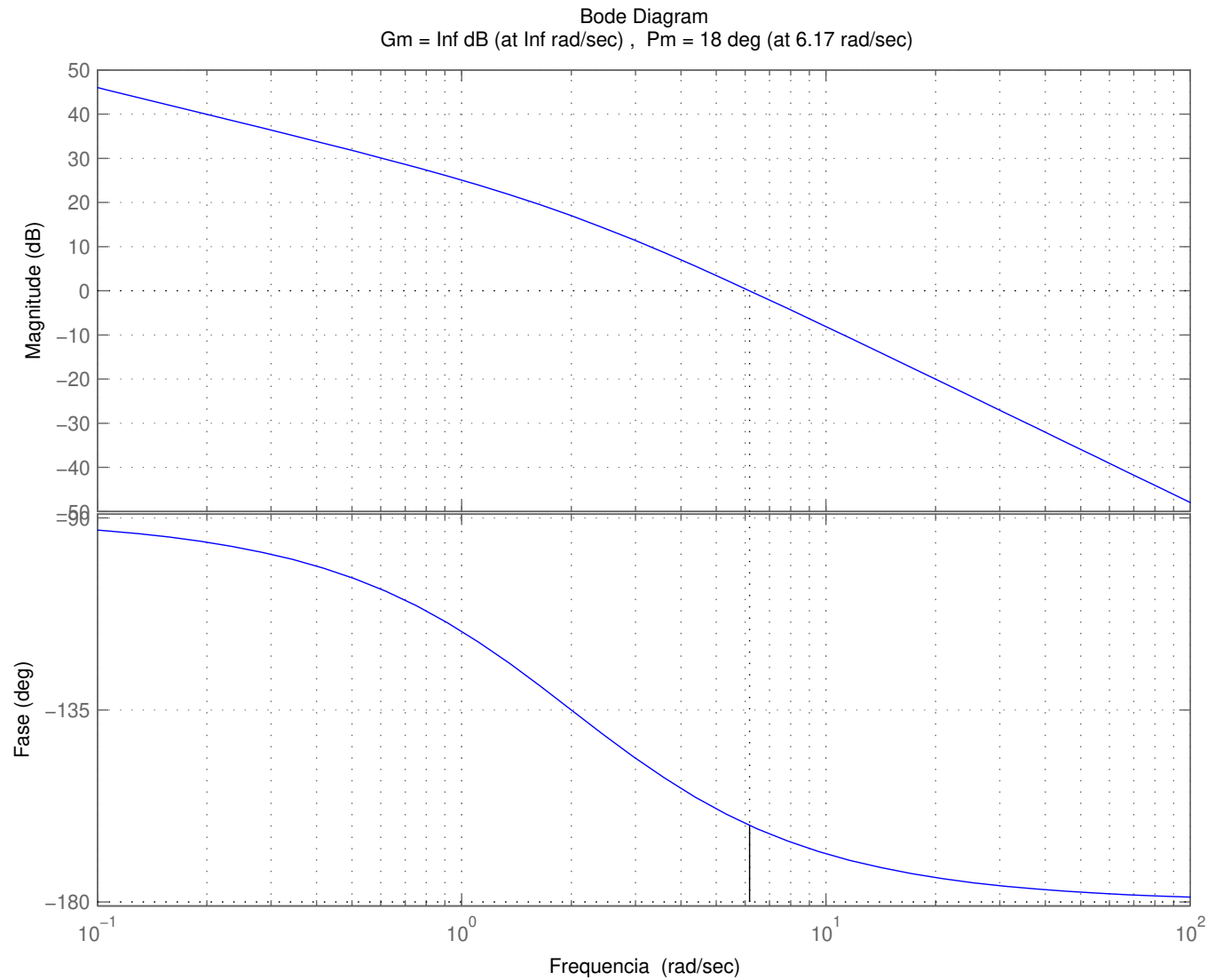
▷ De e_{ss} tem-se: $K_v = \frac{A}{e_{ss}} = \frac{A}{0.05A} = 20$. Imponha $K_v = K/2$

▷ Logo a FT sem compensação (só garantindo e_{ss} desejado) é:

$$L(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega(0.5j\omega + 1)} = \frac{20}{j\omega(0.5j\omega + 1)}$$

Portanto, dos passos 1 e 2 traça-se o diagrama de Bode da FT sem compensação (apenas corrigindo o erro em estado estacionário) para calcular **MF**. Veja a seguir

Sem compensação mas com K_v : MF = 18°



Projeto de Avanço em Fase via Bode

▷ **MF** = 18° do sistema sem compensação

O que fazer? Adicionar um controlador de avanço em fase para aumentar a **MF** para 45° na nova frequência de cruzamento (em 0dB)

Passo 3. Veja que $\phi_m = 45^\circ - 18^\circ = 27^\circ$, mais um incremento de 10%, tem-se $\phi_m = 27^\circ + 3^\circ = 30^\circ$

Passo 4. Calcula-se α , $\alpha = \frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ} = 3$

Passo 5. Veja que o máximo avanço em fase ocorre em ω_m . Portando $10 \log \alpha = 10 \log 3 = 4.8$ dB

▷ Avalia-se na magnitude de -4.8 dB (no diagrama de Bode sem compensação) qual é a frequência de cruzamento compensada, i.e., $\omega_m = \omega_c \approx 8.4$ rad/s

Projeto de Avanço em Fase via Bode

Passo 6. Logo $p = \omega_m \sqrt{\alpha} = 8.4\sqrt{3} = 14.55$ rad/s e $z = \frac{p}{\alpha} = 4.85$ rad/s

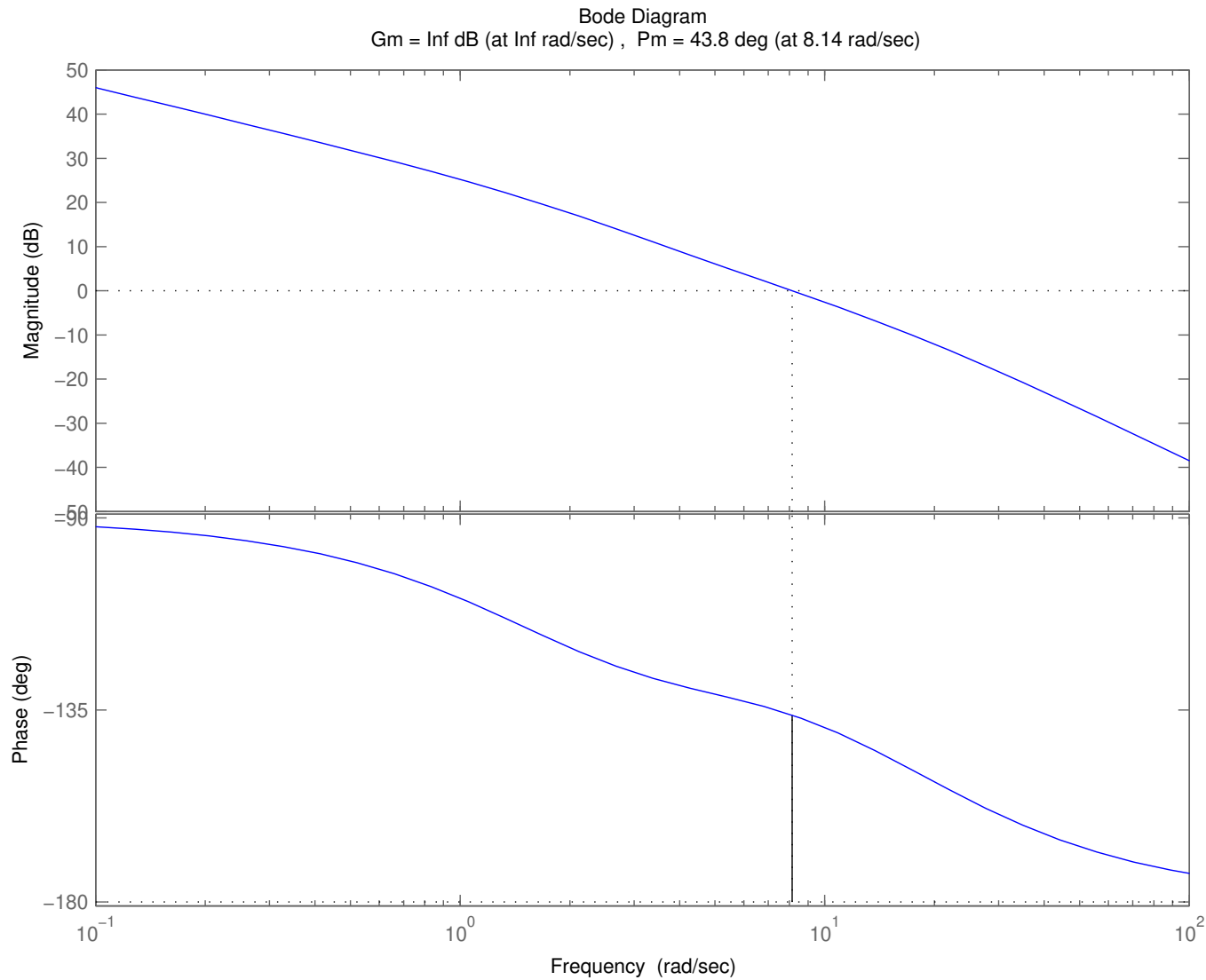
Passos 7 e 8. Compensador

$$G_c(s) = \frac{1}{3} \frac{(1 + s/4.85)}{(1 + s/14.55)}$$

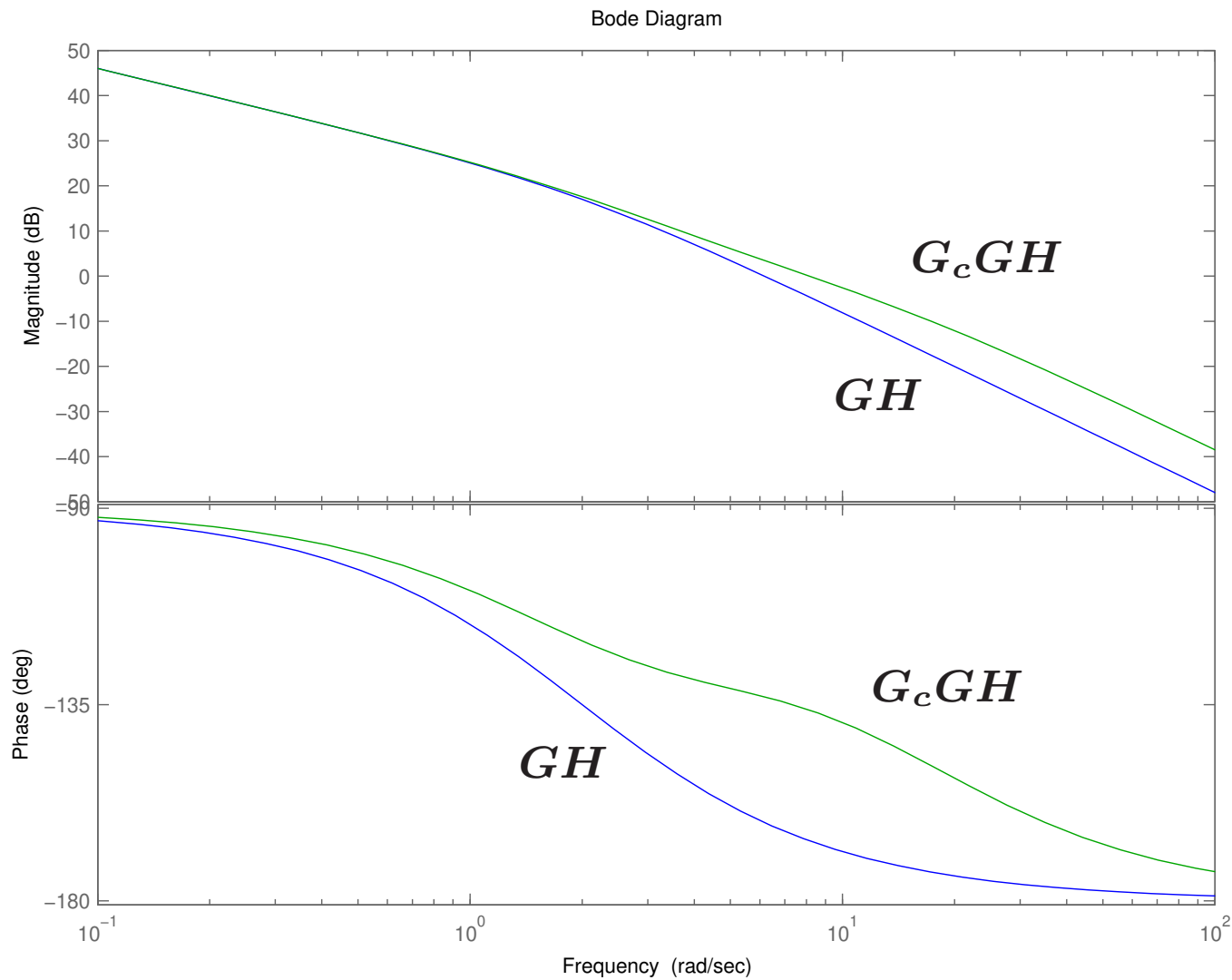
▷ O ganho DC total deve ser aumentado por um fator $K = 3$ (a fim de levar em conta o fator $1/3$), tal que a FT da malha compensada é

$$L(s) = \frac{20 (s/4.85 + 1)}{s(0.5s + 1)(s/14.55 + 1)}$$

Oops... MF $\approx 43.8^0$ em 8.14 rad/s



Projeto de Avanço em Fase via Bode



Projeto de Avanço em Fase via Bode

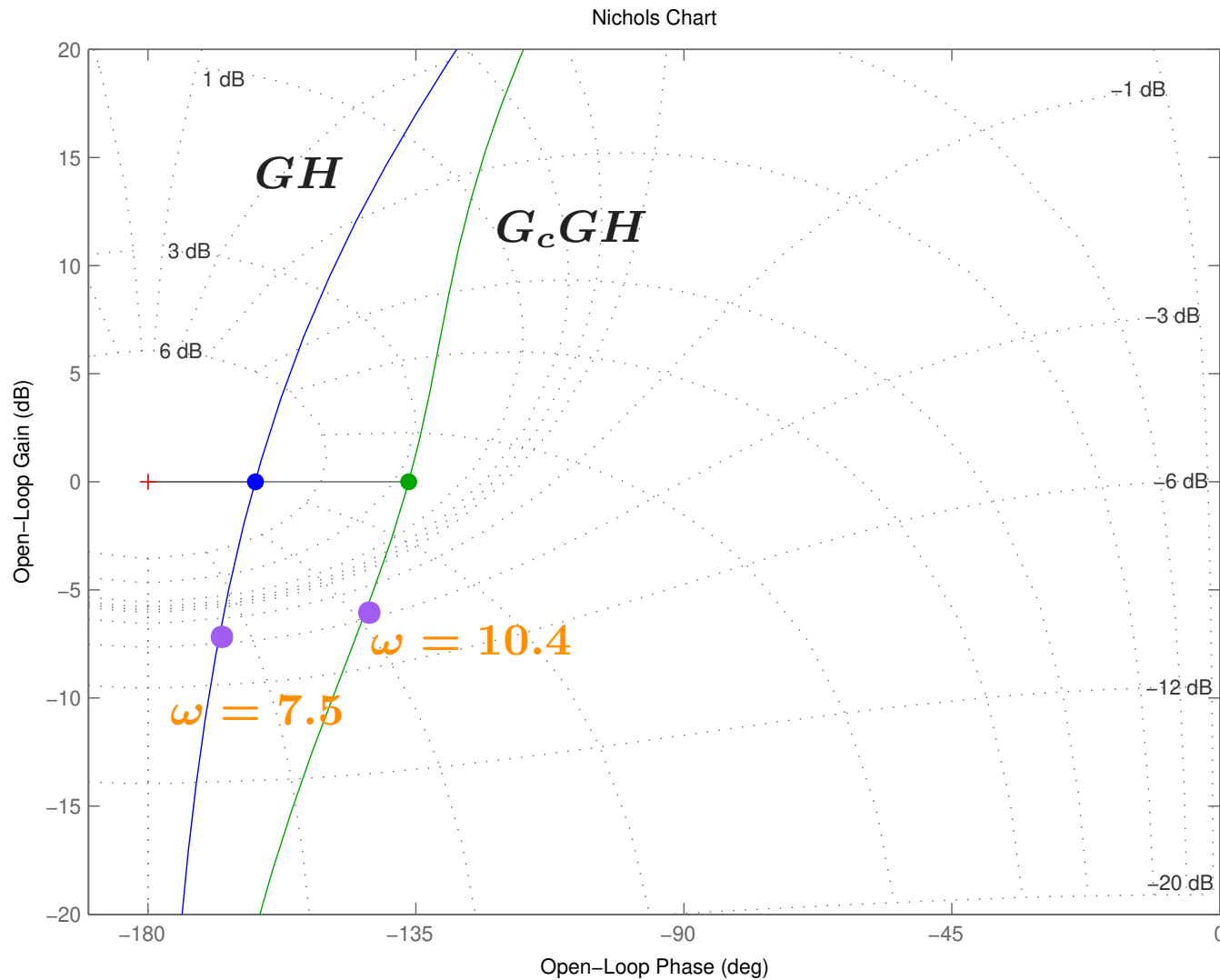
MF final? 43.8° . Exigência de **MF** $\geq 45^{\circ}$

O que fazer? Repetir os passos aumentando α , e.g. $\alpha = 3.5...$

▷ Pode-se analisar o resultado usando a carta de Nichols, no qual pode-se ler:

1. Sem compensação, $M_{\omega} > 6\text{dB}$, de fato $\approx 12\text{dB}$
2. Com compensação, $M_{\omega} \approx 3\text{dB}$
3. Largura de Banda em -3dB , sem compensação: 7.5rad/s
4. Largura de Banda em -3dB , com compensação: 10.4rad/s

Projeto de Avanço em Fase via Bode



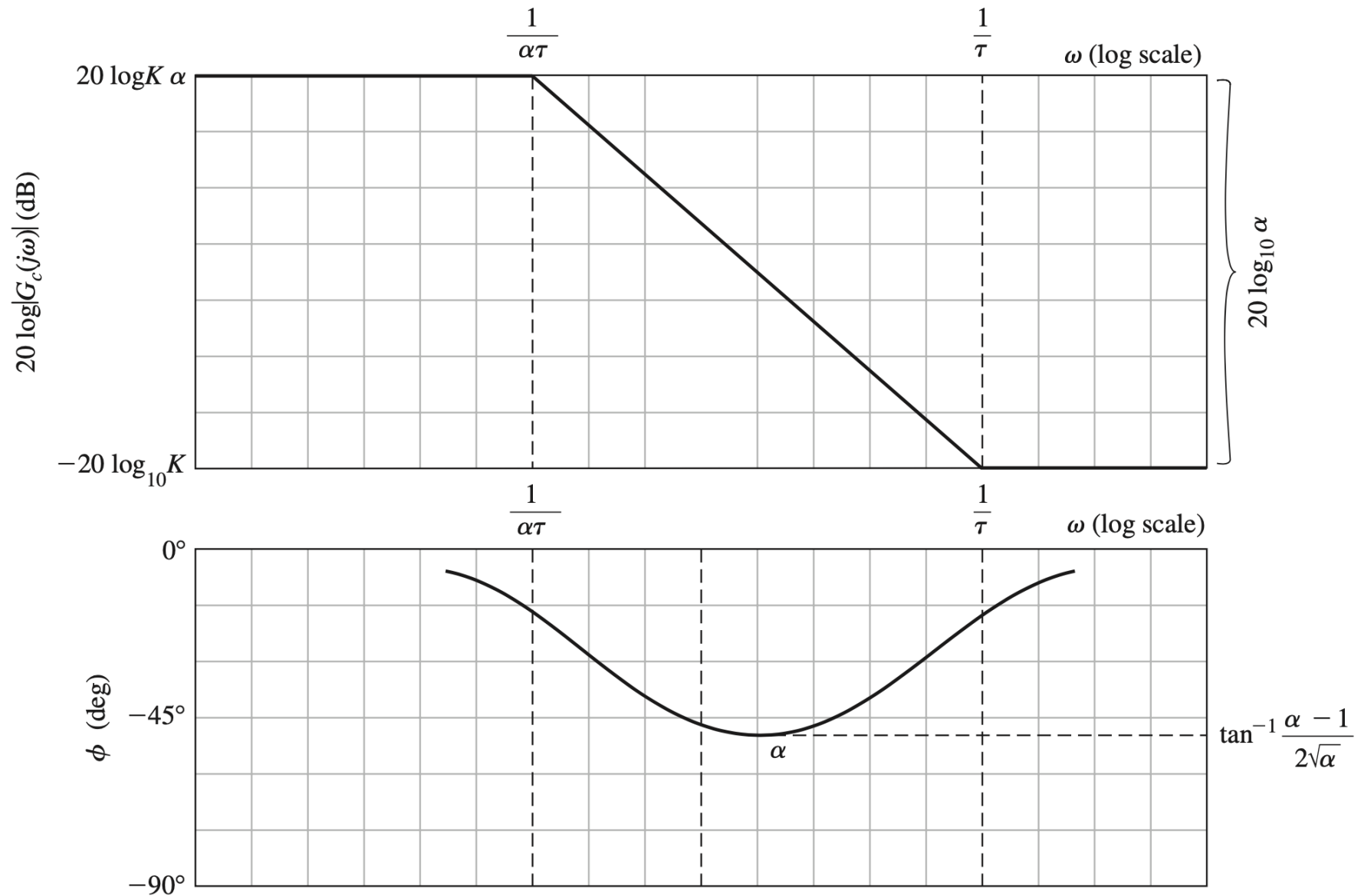
Compensação de Atraso em Fase

Atraso em fase? É obtido escolhendo $|p| < |z|$. Definem-se $\tau = 1/z$ e $\alpha = z/p > 1$ (que implica $p = 1/\alpha\tau$). Portanto:

$$G_c(j\omega) = \frac{K(j\omega + z)}{(j\omega + p)} = \frac{\frac{Kz}{p} \left(\frac{j\omega}{z} + 1 \right)}{\left(\frac{j\omega}{p} + 1 \right)} = \frac{K\alpha(1 + j\omega\tau)}{(1 + j\omega\alpha\tau)}$$

- ▶ A resposta em frequência do compensador de atraso em fase irá introduzir atenuação no ganho de $-20 \log \alpha$ e atraso na fase
- ▶ O máximo atraso em fase ocorre na média geométrica $\omega_m = \sqrt{z\bar{p}}$

Compensação de Atraso em Fase



Passos de Projeto – Atraso em Fase

- Note que o efeito útil do compensador de atraso em fase é sua atenuação (de $-20 \log \alpha$). Então usa-se esta atenuação para reduzir a frequência de cruzamento na linha de 0dB, o que implica em aumentar a **MF** do sistema
 - Os passos a seguir sintetizam o projeto do compensador em atraso (os dois primeiros passos são iguais ao projeto de compensação de avanço em fase)
1. Determina-se K tal que o ganho em malha aberta atenda à especificação de erro de estado estacionário
 2. Usando o ganho K determinado no passo 1, obtenha o diagrama de Bode para $KG(s)$ sem compensação e determine a **MF**. Se for insuficiente, prossiga

Passos de Projeto – Atraso em Fase

3. Determina-se a frequência em que a **MF** especificada seja satisfeita assumindo que o ganho do sistema compensado venha a cruzar a linha de 0dB nessa frequência ω'_c (deixe uma folga de cerca de 5^0 para contabilizar a pequena defasagem restante do compensador)
4. **Aloca-se o zero do compensador uma década abaixo da nova frequência de cruzamento ω'_c** , garantindo assim que apenas 5^0 de atraso em fase restará na frequência ω'_c devido ao compensador
5. Mede-se a atenuação necessária em ω'_c tal que a curva de ganho cruze a linha de 0dB nessa frequência
6. Calcula-se α usando a relação $-20 \log \alpha$ em ω'_c
7. O valor do polo é determinado fazendo $p = 1/\alpha\tau = z/\alpha$

Projeto de Atraso em Fase via Bode

Exemplo Considerando o mesmo exemplo anterior com ganho em malha

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 2)} = \frac{K_v}{j\omega(0.5j\omega + 1)}$$

com $K_v = K/2$ e $K_v = 20$

Objetivos $e_{ss} \leq 5\%$ para entrada rampa (já garantida por K_v) e **MF** $\geq 45^\circ$

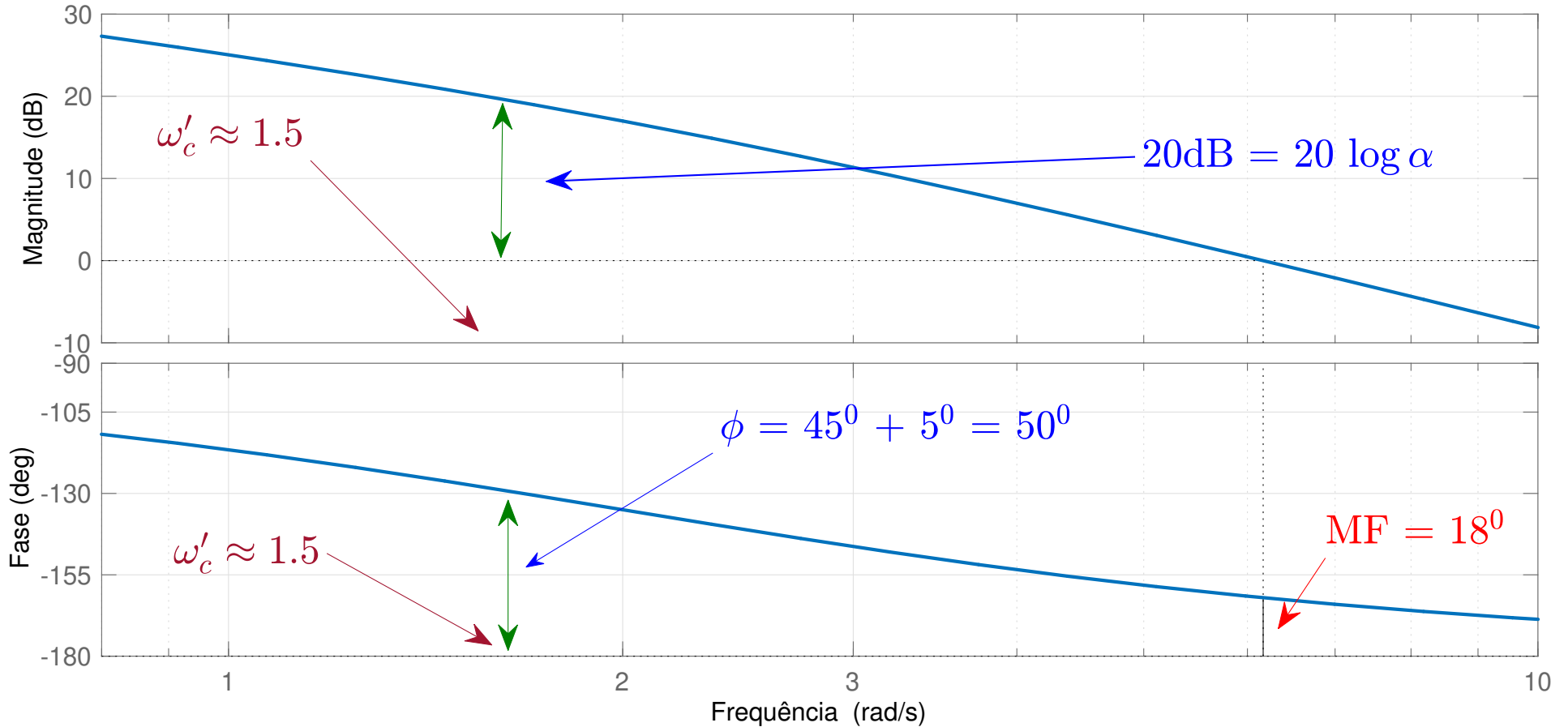
▷ Para os passos 1 e 2 já se sabe do exemplo anterior que sem compensação tem-se **MF** $= 18^\circ$ (e conforme diagrama de Bode a seguir)

Passo 3. Determina-se em Bode a frequência (que deve ser a nova frequência de cruzamento ω'_c) onde a **MF** especificada seja satisfeita (leve em conta um atraso de 5°). Neste caso, para satisfazer a **MF** especificada, lê-se a frequência onde a fase é: $\phi_{\omega'_c} = -180^\circ + 45^\circ + 5^\circ = -130^\circ$

▷ Do diagrama de Bode para $\phi_{\omega'_c} = -130^\circ$ lê-se $\omega'_c \approx 1.5 \text{ rad/s}$

Projeto de Atraso em Fase via Bode

MG = ∞ dB (em ∞ rad/s) e MG = 18^0 (em 6.17 rad/s)



Projeto de Atraso em Fase via Bode

Passo 4. O zero do compensador é posicionado uma década abaixo da frequência de cruzamento desejada ω'_c , portanto $z = \omega'_c/10 = 0.15\text{rad/s}$

Passo 5. Note também que na frequência ω'_c pode-se ler **20dB**. Esta é **atenuação em magnitude** necessária para que ω'_c seja a nova frequência de cruzamento (i.e., a frequência em que a curva de magnitude passará a cruzar a linha de 0dB)

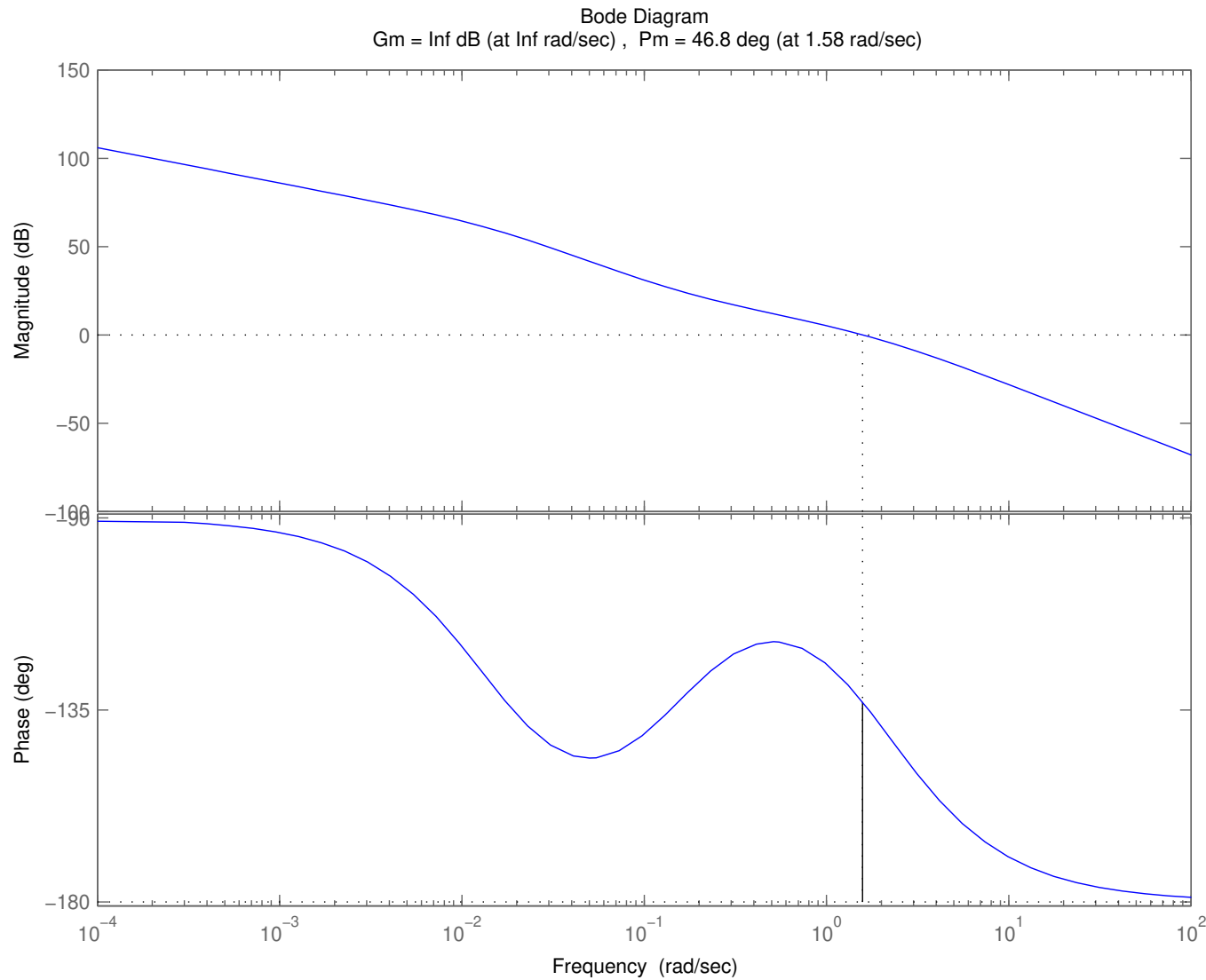
Passo 6. Calcula-se α fazendo $20 \log \alpha = 20\text{dB}$, i.e. $\alpha = 10$

Passo 7. Então o polo do controlador é $p = z/\alpha = 0.015\text{rad/s}$

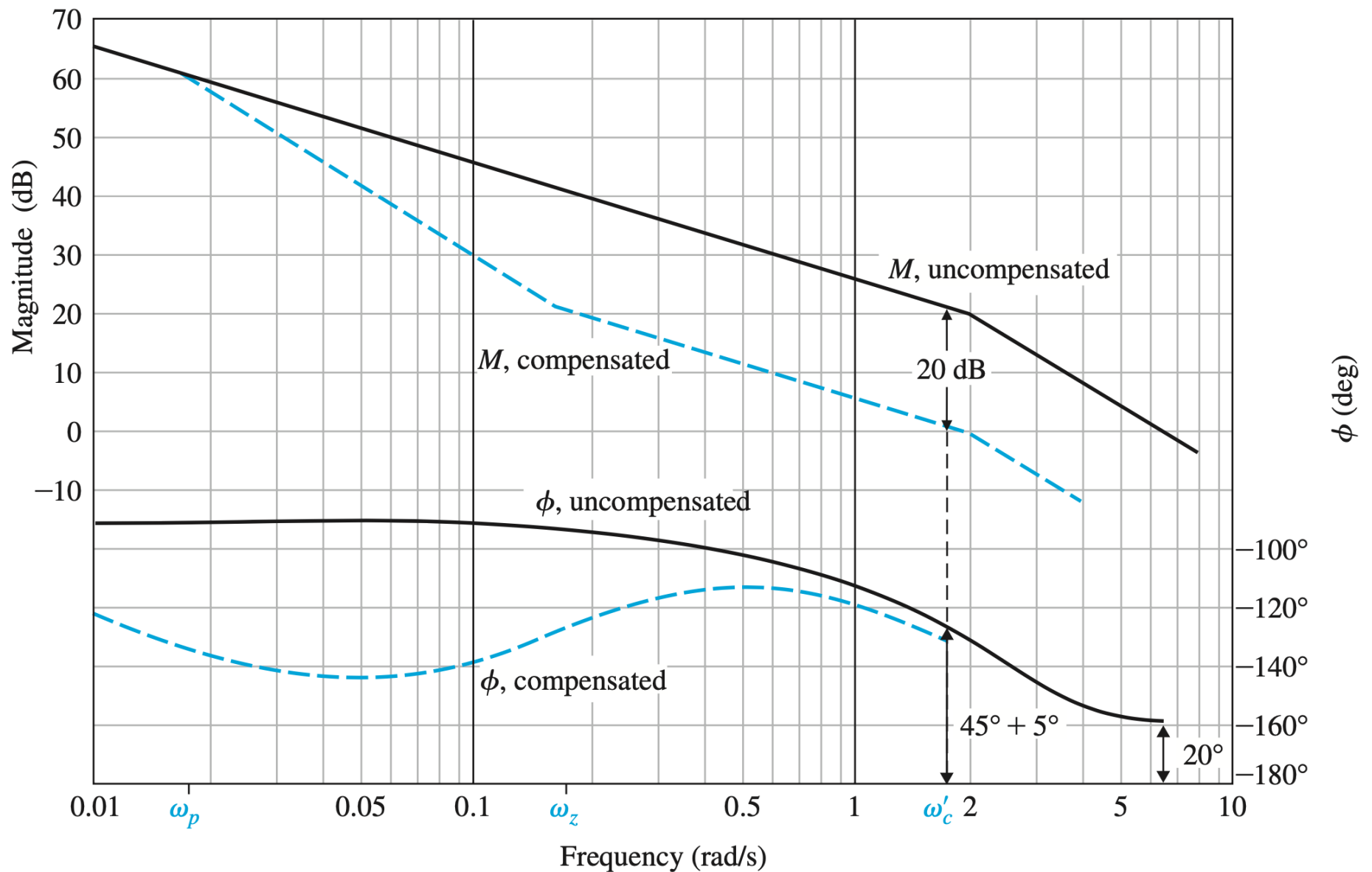
O ganho em malha do sistema compensado é dado por:

$$L(j\omega) = \frac{20(6.66j\omega + 1)}{j\omega(0.5j\omega + 1)(66.6j\omega + 1)}$$

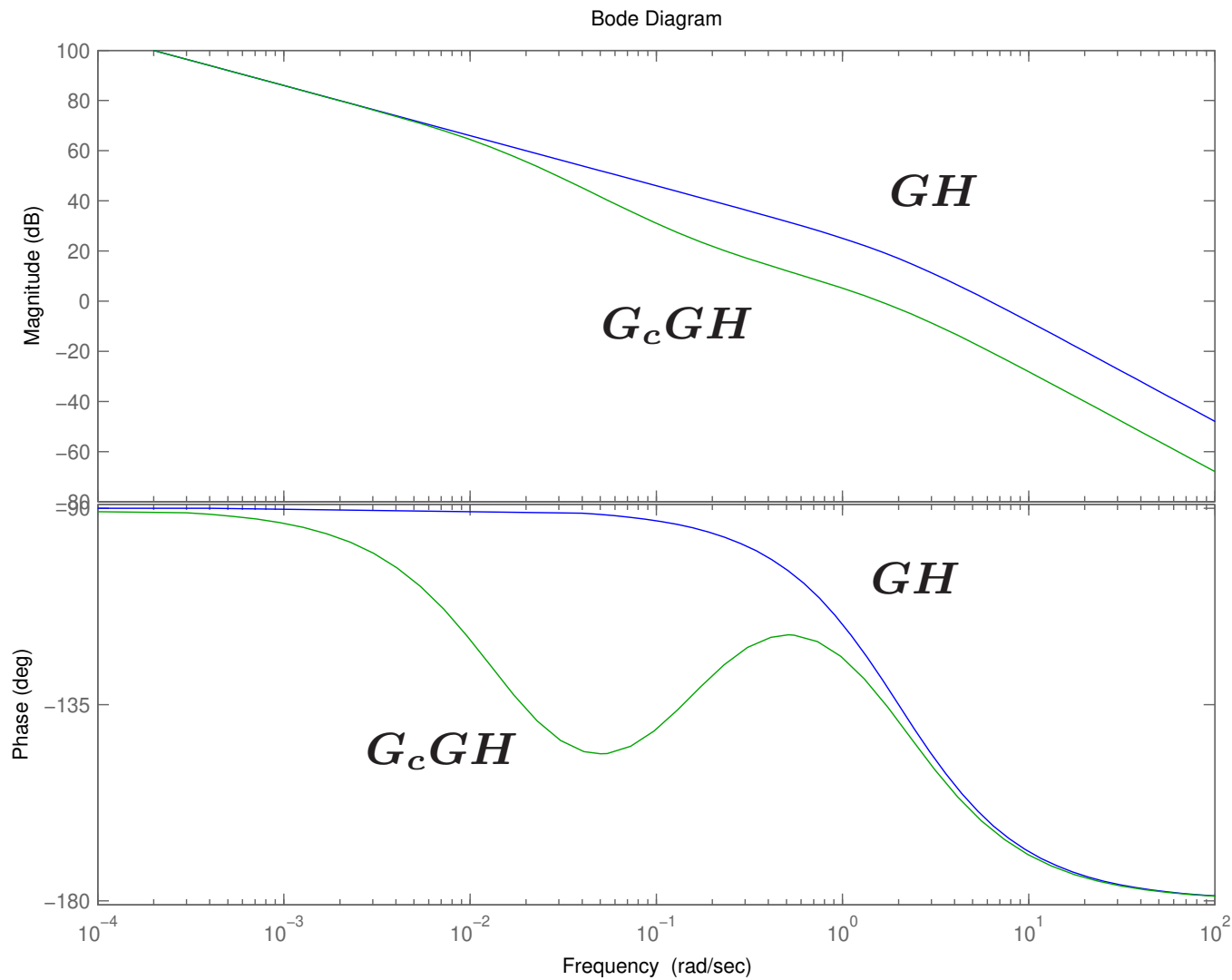
Verificação: $MF = 46.8^\circ > 45^\circ$ especificado



Projeto de Atraso em Fase via Bode



Projeto de Atraso em Fase via Bode



Carta de Nichols

