Controlabilidade e Observabilidade

1. Formas de Jordan
2. Sistemas a Tempo Discreto
3. Sistemas LVT

Controlabilidade e Observabilidade: Formas de Jordan

Considere o sistema LIT

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Jx(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{cases}$$

sendo J uma matriz na forma de Jordan

- ▷ Suponha que J tem os autovalores distintos λ_1 e λ_2 $\;J = \text{diag}\;(J_1, J_2)$
- ▶ J_1 : todos os blocos de Jordan associados com λ_1
- ▶ J_2 : todos os blocos de Jordan associados com λ_2

Por exemplo, $J_1 = \text{diag}\;(J_{11}, J_{12}, J_{13}) \quad ; \quad J_2 = \text{diag}\;(J_{21}, J_{22})$

b_{lij} : linha de B correspondendo à última linha de J_{ij}

c_{fij} : coluna de C correspondendo à primeira coluna de J_{ij}

Para a estrutura anterior de linhas $\boldsymbol{b_{lij}}$ e colunas $\boldsymbol{c_{fij}}$ para, respectivamente, $\boldsymbol{J_1}$ e $\boldsymbol{J_2}$ tem-se o resultado a seguir

Teorema

- O sistema é controlável se, e somente, se os três vetores linha $\{\boldsymbol{b_{l11}}, \boldsymbol{b_{l12}}, \boldsymbol{b_{l13}}\}$ são LI e os dois vetores linha $\{\boldsymbol{b_{l21}}, \boldsymbol{b_{l22}}\}$ são LI

- O sistema é observável se, e somente, se os três vetores coluna $\{\boldsymbol{c_{f11}}, \boldsymbol{c_{f12}}, \boldsymbol{c_{f13}}\}$ são LI e os dois vetores coluna $\{\boldsymbol{c_{f21}}, \boldsymbol{c_{f22}}\}$ são LI

Controlabilidade e Observabilidade: Formas de Jordan

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x$$

$\mathbf{3}$ blocos de Jordan associados ao autovalor λ_1 com ordens: $\mathbf{2}$, $\mathbf{1}$ e $\mathbf{1}$

Controlabilidade e Observabilidade: Formas de Jordan

▷ Linhas de B correspondentes às últimas linhas de cada um dos três blocos de Jordan associados a λ_1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{são LI}$$

Além disso, há um único bloco de Jordan de ordem 3 associado a λ_2 e cuja última linha associada a B é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{LI (não nula)} \quad \Longrightarrow \quad \text{Sistema controlável!}$$

▷ Observabilidade: colunas associadas à primeira coluna de cada bloco

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \; \text{são LI} \, ; \; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; \text{não é LI} \Longrightarrow \text{Sistema não observável!}$$

Controlabilidade e Observabilidade: Formas de Jordan

Sistemas SISO

Corolário Uma equação de estado mono-entrada na forma de Jordan é controlável se, e somente se, existir apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor distinto e todo elemento de B correspondente à última linha de cada bloco de Jordan for não nulo

Corolário Uma equação de estado mono-saída na forma de Jordan é observável se, e somente se, existir apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor distinto e todo elemento de C correspondente à primeira coluna de cada bloco de Jordan for não nulo

Controlabilidade e Observabilidade: Formas de Jordan

Exemplo Sistema na forma de Jordan:

$$\begin{cases} \dot{x} & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

▷ Há dois blocos de Jordan, um de ordem $\mathbf{3}$ associado ao autovalor $\mathbf{0}$ e outro de ordem $\mathbf{1}$ associado ao autovalor $\mathbf{-2}$. O elemento da matriz B correspondente à última linha do primeiro bloco é zero $\Longrightarrow$ não controlável

▷ Os dois elementos da matriz C correspondentes à primeira coluna de cada um dos blocos são não nulos $\Longrightarrow$ observável

Sistemas a Tempo Discreto

$$\begin{cases} x(t+1) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{cases}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$

O sistema discreto (ou o par (A,B)) é controlável se para qualquer condição inicial $x(0) = x_0$ e qualquer estado final x_1 existir uma sequência de entrada de tamanho finito que transfere o sistema de x_0 para x_1

Teorema (Controlabilidade) São equivalentes:

1. (A,B) é controlável

2. A matriz $n \times n$: $W_{dc}(n-1) = \sum_{m=0}^{n-1} (A)^m BB'(A')^m$ é não-singular

Sistemas a Tempo Discreto

3. A matriz de controlabilidade $\mathcal{C}_d = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ $(n \times np)$ tem posto completo de linhas n

4. A matriz $n \times (n+p)$ $\begin{bmatrix} A - \lambda \mathbf{I} & B \end{bmatrix}$ tem posto de linhas n em todo λ

5. Se todos os autovalores de A têm módulo menor que 1, então a solução única de

$$W_{dc} - AW_{dc}A' = BB'$$

é definida positiva (`dgram`: Gramiano discreto), ie:

$$W_{dc} = \sum_{m=0}^{\infty} A^m BB'(A')^m$$

Sistemas a Tempo Discreto

Solução do sistema em $t = n$ é dada por

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{t-1-m} B u(m)$$

e pode ser escrita da forma

$$x(n) - A^n x(0) = \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}_d} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Portanto, para quaisquer $x(0)$ e $x(n)$, existe uma sequência de entrada se, e somente se, a matriz de controlabilidade $\mathcal{C}_d$ tiver posto completo de linhas

A matriz $\boldsymbol{W_{dc}(n-1)}$ pode ser escrita da forma:

$$\boldsymbol{W_{dc}(n-1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \cdots & \boldsymbol{A^{n-1}B} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\mathcal{C}_d}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{B'} \\ \boldsymbol{B'A'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{B'(A')^{n-1}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\mathcal{C}'_d}}$$

Note que $\boldsymbol{W_{dc}(m)}$ é sempre semidefinida positiva. Se for não singular (ou, equivalentemente, definida positiva), o sistema é controlável (em outras palavras, basta que a matriz de controlabilidade $\boldsymbol{\mathcal{C}_d}$ tenha posto completo de linhas)

Sistemas a Tempo Discreto

O sistema discreto (ou o par (A,C)) é observável se para qualquer condição inicial desconhecida $x(0)$ existir um inteiro finito $t_1 > 0$ tal que o conhecimento da sequência de entrada $u(t)$ e da sequência de saída de $t = 0$ até t_1 seja suficiente para determinar de maneira única o estado inicial $x(0)$

Teorema (Observabilidade) São equivalentes:

1. (A,C) é observável
2. A matriz $n \times n$: $W_{do}(n-1) = \sum_{m=0}^{n-1} (A')^m C' C A^m$ é não-singular
3. A matriz de observabilidade $nq \times n$

$$\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$ tem posto completo de colunas n

4. A matriz $(n+q)\times n$

$$\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

tem posto completo de colunas n em todo λ

5. Se todos os autovalores de A têm módulo menor que 1, então a solução única de

$$W_{do} - A'W_{do}A = C'C$$

é definida positiva

$$W_{do} = \sum_{m=0}^{\infty} (A')^m C'CA^m$$

Sistemas LVT

Considere o sistema dinâmico linear n-dimensional

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) & = & C(t)x(t) \end{cases}$$

A equação de estado é controlável em t_0 se existir $t_1 > t_0$ tal que para qualquer condição inicial $x(t_0) = x_0$ e qualquer x_1, existir uma entrada que transfere x_0 para x_1 no instante t_1

▷ Note que no caso invariante no tempo, um sistema é controlável independentemente do t_0 escolhido. O que não é o caso para sistemas LVT

Sistemas LVT

Teorema O sistema (ou o par $(A(t),B(t))$) é controlável em t_0 se, e somente se, existir $t_1 > t_0$ tal que a matriz $n \times n$

$$W_c(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_1,\tau)d\tau$$

é não-singular

▷ $\Phi(t,\tau)$ é a matriz de transição de estados de $\dot{x} = A(t)x$

Demonstração Primeiramente, mostra-se que se $W_c(t_0,t_1)$ é não singular, então o sistema é controlável. A solução em t_1 é dada por

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

A entrada $u(t) = -B'(t)\Phi'(t_1,t)W_c^{-1}(t_0,t_1)\Big[\Phi(t_1,t_0)x_0 - x_1\Big]$, transfere o estado x_0 para x_1 no instante t_1? Substituindo em $x(t_1)$ tem-se:

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_1,\tau)d\tau \times$$

$$W_c^{-1}(t_0,t_1)\Big[\Phi(t_1,t_0)x_0 - x_1\Big]$$

$$= \Phi(t_1, t_0)x_0 - W_c(t_0,t_1)W_c^{-1}(t_0,t_1)\Big[\Phi(t_1,t_0)x_0 - x_1\Big] = x_1$$

e portanto a equação é controlável em t_0

O inverso é mostrado por contradição. Suponha que o sistema é controlável mas $W_c(t_0,t_1)$ é singular (ou semidefinida positiva) para todo $t_1 > t_0$. Neste caso, existe um vetor $n \times 1$ v não nulo tal que

$$\begin{aligned} v'W_c(t_0,t_1)v &= \int_{t_0}^{t_1} v'\Phi(t_1,\tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_1,\tau)v d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \|B'(\tau)\Phi'(t_1,\tau)v\|^2 d\tau = 0 \end{aligned}$$

implicando $B'(\tau)\Phi'(t_1,\tau)v \equiv 0$ ou $v'\Phi(t_1,\tau)B(\tau) \equiv 0$, $\forall\ \tau \in [t_0, t_1]$

Mas se o sistema é controlável, então...

Sistemas LVT

Mas se o sistema é controlável, então existe uma entrada que transfere o estado inicial $x_0 = \Phi(t_0, t_1)v$ para $x(t_1) = 0$. Assim,

$$x(t_1) = 0 = \underbrace{\Phi(t_1, t_0)\underbrace{x_0}_{=\,\Phi(t_0,t_1)v}}_{=\,\mathbf{I}v} + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Pré-multiplicando por v' tem-se

$$0 = v'v + \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{v'\Phi(t_1, \tau)B(\tau)}_{=\,0}u(\tau)d\tau = \|v\|^2 + 0$$

o que contradiz a hipótese de que $v \neq 0$. Portanto, se $(A(t),B(t))$ é controlável em t_0, então $W_c(t_0,t_1)$ é não singular para algum t_1 finito ∎

Sistemas LVT

▷ As condições anteriores envolvem a matriz de transição de estados $\Phi(t,\tau)$

▷ Seria desejável se obtivéssemos condições em termos de $A(t)$ e $B(t)$? Então para termos uma condição alternativa, suponha que $A(t)$ e $B(t)$ sejam $(n-1)$ vezes continuamente diferenciáveis e defina:

$$\begin{aligned} M_0(t) &= B(t) \\ M_{m+1}(t) &= -A(t)M_m(t) + \tfrac{d}{dt}M_m(t) \;\; ; \quad m = 0,1,\ldots,n-1 \end{aligned}$$

Denote $\Phi(t_2,t)B(t) = \Phi(t_2,t)M_0(t)$ para qualquer t_2. Usando o fato que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_2,t) = -\,\Phi(t_2,t)A(t)$$

obtém-se o resultado a seguir

Sistemas LVT

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Big[\Phi(t_2,t)B(t)\Big] &= \frac{\partial}{\partial t}\Big[\Phi(t_2,t)\Big]B(t) + \Phi(t_2,t)\frac{d}{dt}B(t) \\
&= \Phi(t_2,t)\Big[-A(t)M_0(t) + \frac{d}{dt}M_0(t)\Big] \\
&= \Phi(t_2,t)M_1(t)
\end{aligned}
$$

De maneira geral:

$$
\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Phi(t_2,t)B(t) = \Phi(t_2,t)M_m(t) \quad ; \quad m = 0,1,\ldots,n-1
$$

Teorema Sejam $A(t)$ e $B(t)$ $n-1$ vezes continuamente diferenciáveis. O par $(A(t),B(t))$ é controlável em t_0 se existir $t_1 > t_0$ tal que

$$
\text{posto}\begin{bmatrix} M_0(t_1) & M_1(t_1) & \cdots & M_{(n-1)}(t_1) \end{bmatrix} = n
$$

Demonstração Mostra-se que se o posto é n, então $W_c(t_0,t)$ é não singular para todo $t \geq t_1$. Suponha que $W_c(t_0,t)$ é singular para algum $t_2 \geq t_1$. Neste caso, existe um vetor $n \times 1$ não nulo v tal que

$$\begin{aligned} v'W_c(t_0,t_2)v &= \int_{t_0}^{t_2} v'\Phi(t_2,\tau)B(\tau)B(\tau)'\Phi'(t_2,\tau)v d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_2} \|B(\tau)'\Phi'(t_2,\tau)v\|^2 d\tau = 0 \end{aligned}$$

implicando $B(\tau)'\Phi'(t_2,\tau)v \equiv \mathbf{0}$ ou $v'\Phi(t_2,\tau)B(\tau) = \mathbf{0}$ para todo $\tau \in [t_0,t_2]$. Diferenciando em relação a τ tem-se

$$v'\Phi(t_2,\tau)M_m(\tau) \equiv \mathbf{0}$$

para $m = 0,1,2,\ldots,n-1$ e todo $\tau \in [t_0,t_2]$ (em particular, em t_1)

Sistemas LVT

Rearranjando, a equação anterior pode ser escrita da forma

$$v'\Phi(t_2,\tau)\begin{bmatrix} M_0(t_1) & M_1(t_1) & \cdots & M_{(n-1)}(t_1) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Como $\Phi(t_2,\tau)$ é não singular, $v'\Phi(t_2,\tau)$ é diferente de zero e isso contradiz a condição do teorema. Assim, a condição do teorema garante que $W_c(t_0,t_2)$ é não singular para todo $t_2 \geq t_1$ e portanto $(A(t),B(t))$ é controlável em t_0 ■

▷ Note que o teorema expressa uma condição suficiente para o sistema ser controlável

Exemplo $\dot{x} = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$$M_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; M_1(t) = -A(t)M_0(t) + \frac{d}{dt}M_0(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ -t \\ -t^2 \end{bmatrix}$$

$$M_2(t) = -A(t)M_1(t) + \frac{d}{dt}M_1(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t^2 - 1 \\ t^4 - 2t \end{bmatrix}$$

$$\rho\left(\left[\begin{array}{c|c|c} M_0(t) & M_1(t) & M_2(t) \end{array}\right]\right) = \rho\left(\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 2t \\ 1 & -t & t^2 - 1 \\ 1 & -t^2 & t^4 - 2t \end{array}\right]\right) = 3 \; , \; \forall \, t$$

Teorema (Observabilidade) O sistema (ou o par $(A(t),C(t))$) é observável em t_0 se, e somente se, existir $t_1 > t_0$ tal que a matriz $n \times n$

$$W_o(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\tau,t_0)'C'(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)d\tau \quad \text{é não-singular}$$

Teorema (Observabilidade) Sejam $A(t)$ e $C(t)$ $n-1$ vezes continuamente diferenciáveis. O par $(A(t),C(t))$ é observável em t_0 se existir $t_1 > t_0$ tal que

$$\text{posto} \begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ \vdots \\ N_{(n-1)}(t_1) \end{bmatrix} = n$$

sendo $N_0 = C(t)$ e

$$N_{m+1}(t) = N_m(t)A(t) + \frac{d}{dt}N_m(t) \quad ; \quad m = 0,1,\ldots,n-1$$