Estabilidade no Domínio da Frequência

1. Estabilidade relativa e o critério de Nyquist
2. Margens de estabilidade: Margens de Ganho e Fase
3. Carta de Nichols

Estabilidade Relativa e o Critério de Nyquist

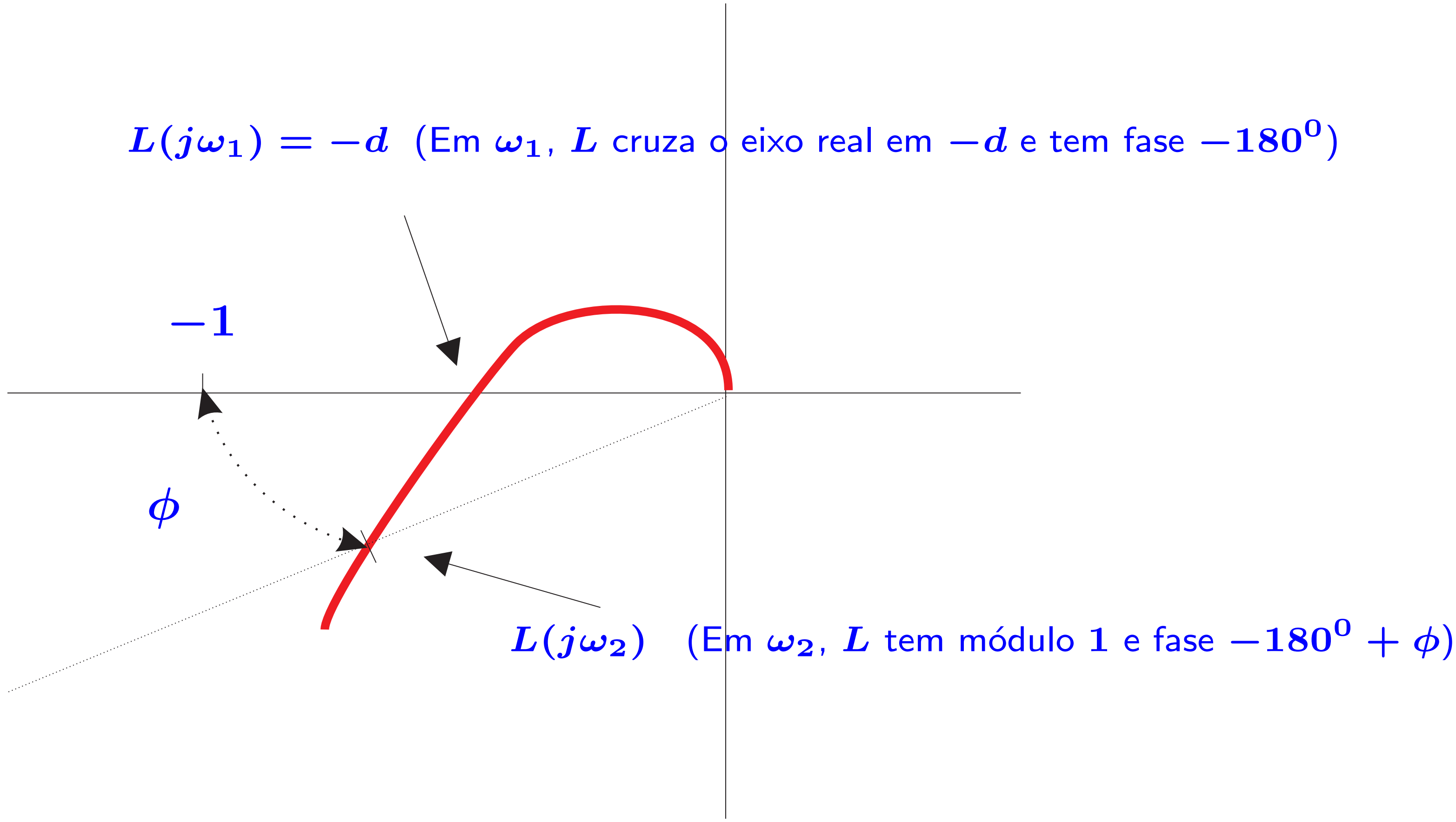
Por que considerar estabilidade relativa? Um modelo pode indicar que um sistema é estável enquanto, de fato, o sistema físico está próximo a instabilidade. Motivo? Imprecisões no modelo devido a, por exemplo, variação de parâmetros, erros de modelagem, envelhecimento, etc. Como se prevenir?

Análise de estabilidade de Nyquist pode ajudar? O que fazer? No projeto de controle pode-se impor que o sistema seja estável com alguma margem de segurança assegurada (Em outras palavras: aumentar robustez?)

Outro ponto – Note que no contexto do plano-s usou-se a noção de estabilidade relativa de um sistema em termos da medida relativa do tempo de acomodação de cada raiz (ou par de raízes). Isto é, quanto menor o tempo de acomodação, possivelmente o sistema é relativamente mais estável (o que de fato sinaliza que as raízes dominantes estão mais afastadas do eixo imaginário). Esta noção também pode ser emprestada ao contexto de Nyquist

Estabilidade Relativa e o Critério de Nyquist

Margens de estabilidade? Considere um **sistema estável e de fase mínima** (i.e., sem polos ou zeros no semi-plano direito no plano-s). O diagrama de Nyquist para o ganho em malha aberta $L(s)$ é da forma abaixo (Ponto crítico: $(-1,0)$, com módulo 1 e fase de -180^0)



Estabilidade Relativa e o Critério de Nyquist

Margem de Ganho – MG – é o fator pelo qual o ganho em malha aberta $L(s)$ de um sistema estável deve ser alterado tal que torne o sistema em malha fechada marginalmente estável

- Do diagrama de Nyquist (anterior), veja que em -180^0 tem-se $-d$. Cabe a pergunta: de quanto pode-se multiplicar $-d$ tal que o contorno passe a cruzar (interceptar) o ponto -1, e então o sistema em malha fechada se tornará marginalmente estável?

- Basta multiplicar o ganho em malha aberta $L(s)$ por:

$$K = \frac{1}{d} \ (= \text{MG})$$

Margem de Ganho – MG

$\Updownarrow$

é o incremento recíproco, i.e.: $1/d$,

no ganho do sistema quando a fase é -180^0,

que resultará em um sistema marginalmente estável

com a intersecção do ponto $(-1{,}0)$ no diagram de Nyquist

Estabilidade Relativa e o Critério de Nyquist

Margem de Fase – MF

$\Updownarrow$

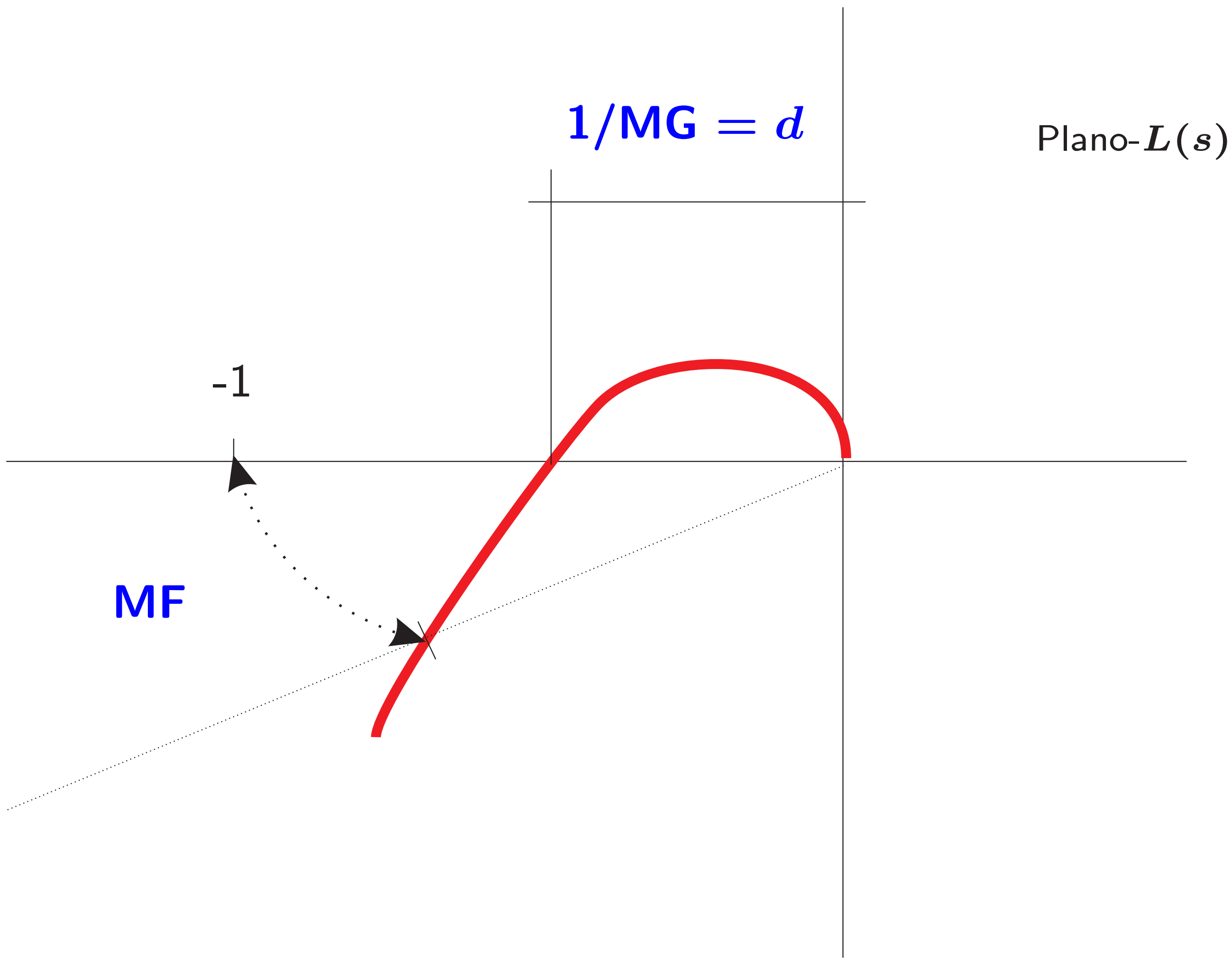
é a variação em fase tal que ao girar o contorno no diagrama de Nyquist, intercepta o ponto -1 (que tem magnitude 1) e resulte em um sistema marginalmente estável

▷ Note que na frequência ω_2, onde mede-se a margem de fase, a magnitude do diagrama de Nyquist é 1. Logo onde $|L(j\omega_2)| = 1$ tem-se

$$\textbf{MF} = \phi = 180^0 - \underline{/L(j\omega_2)}$$

(Do diagrama da pag. 3, em ω_2 tem-se: $-\underline{/L(j\omega_2)} = -180^0 + \phi$)

Margens de Ganho e Fase



Margens de Ganho (MG) e Fase (MF) - via Bode

Relação com diagrama de Bode? As margens de estabilidade podem ser obtidas também pelo diagrama de Bode, porém em coordenadas diferentes. Note que o ponto $(-1{,}0)$ no diagrama de Nyquist corresponde no diagrama de Bode à 0 dB (no diagrama de magnitude) e -180^0 (no diagrama de fase)

Como lê-las no diagrama de Bode? A **MG** ocorre na frequência ω_1 onde tem-se $\angle L(j\omega_1) = -180^0$ (pag. 3). Portanto, pode-se ler no diagrama de fase (Bode) o valor ω_1 onde a fase é -180^0. No diagrama de magnitude (Bode), em ω_1 mede-se o módulo $|L(j\omega_1)|$ dado em dB. Como a **MG** $= 1/d$ (i.e., é a recíproca da magnitude de $L(j\omega_1)$), então em escala logarítmica tem-se:

$$20 \log \frac{1}{d} = -20 \log d \text{ dB}$$

Margens de Estabilidade: Ganho (MG) e Fase (MF)

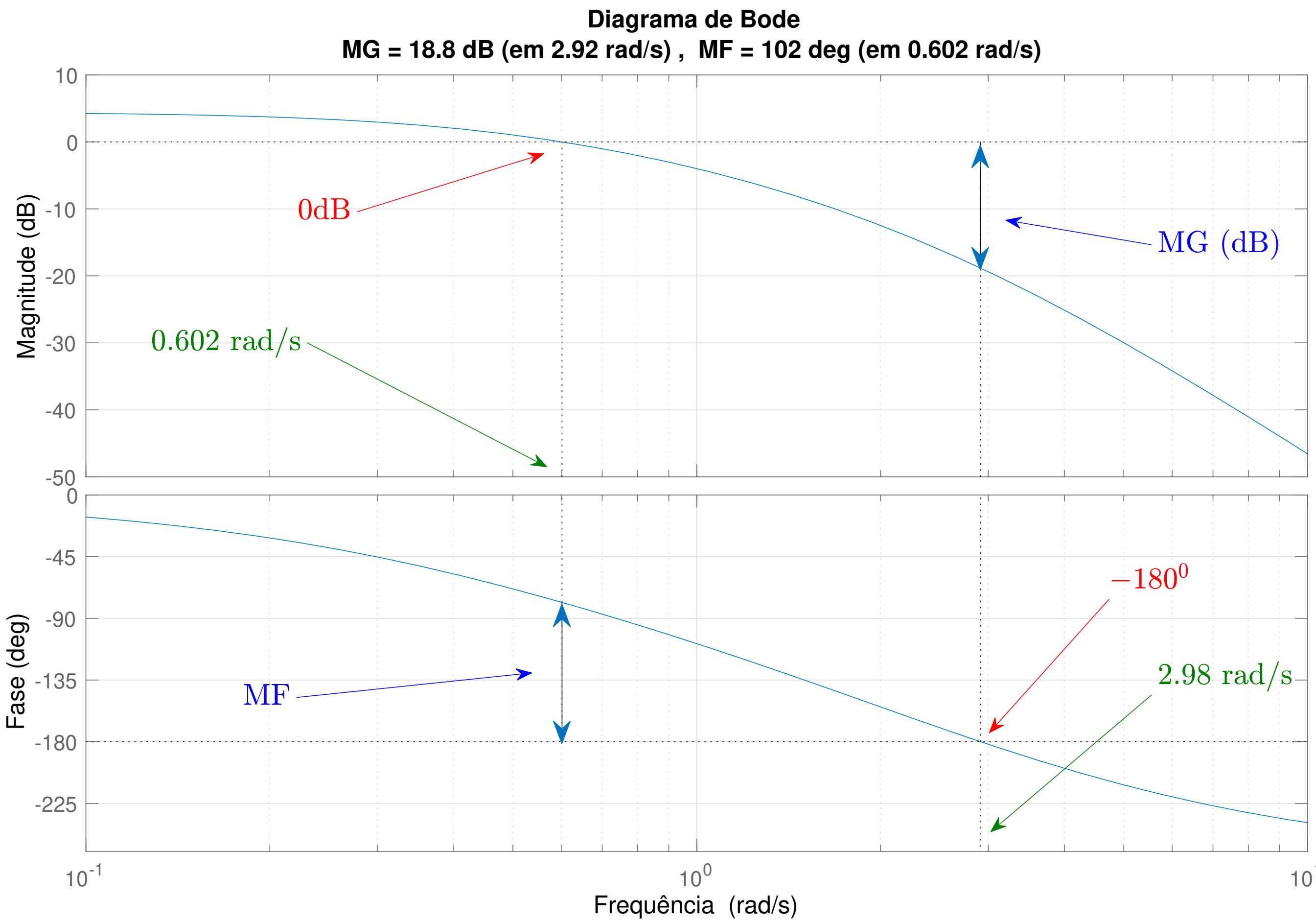
▷ A margem de fase (**MF**) ocorre na frequência ω_2 (chamada de frequência de cruzamento), onde a magnitude do ganho de malha é unitário ou 0dB.

▷ Portanto, a **MF** pode ser lida do diagrama de Bode como sendo a diferença entre a fase de $L(\omega_2)$ e o ângulo -180^0 na frequência de cruzamento (onde o ganho é unitário ou 0db)

▷ Ao longo dos projetos de controle, no contexto de resposta em frequência, utiliza-se mais o diagrama de Bode para se ler as margens de estabilidade

▷ Margens de estabilidade via MATLAB©: `margim`

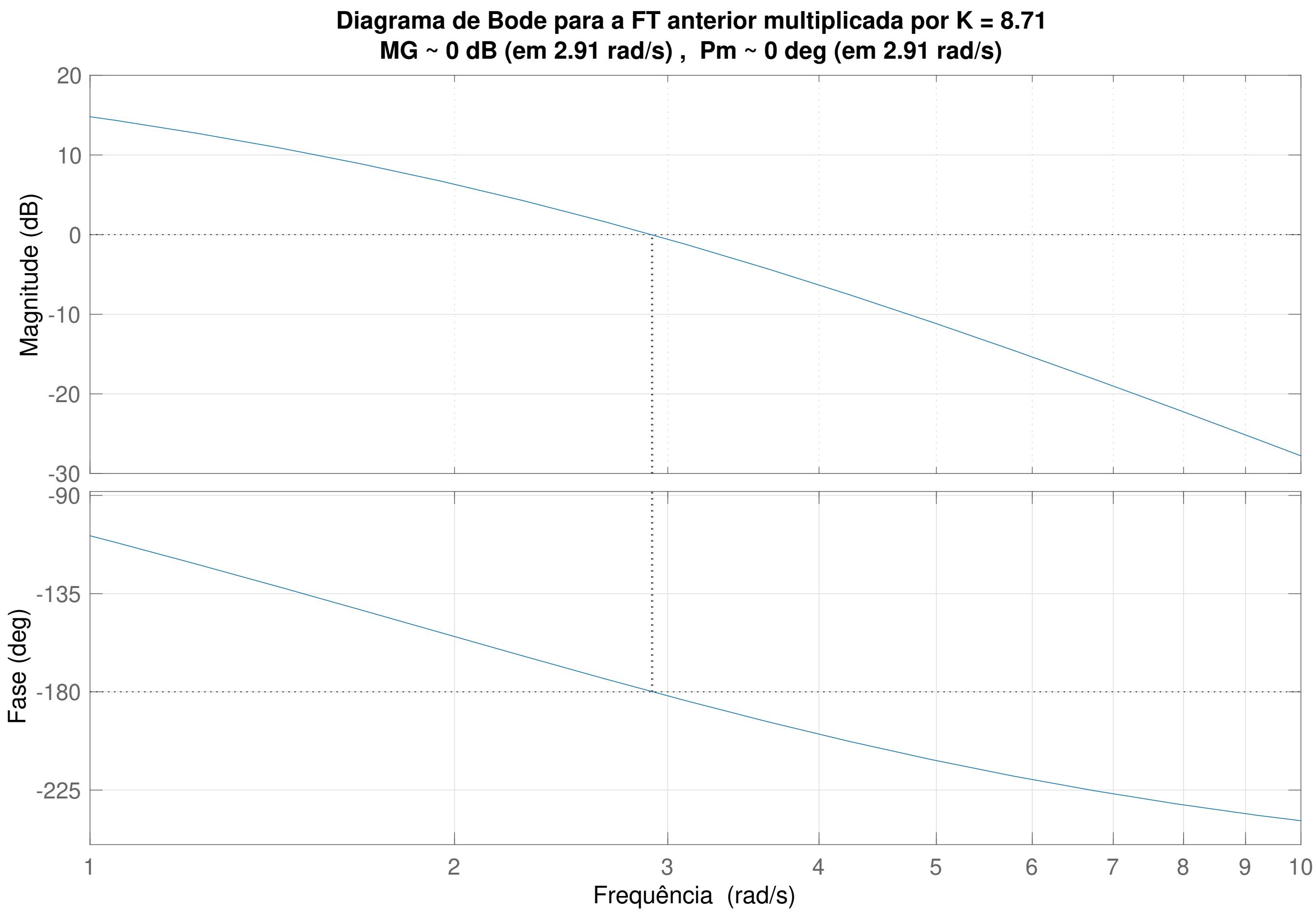
Margens de Ganho e Fase



$$d = \frac{1}{\textbf{MG}} = 10^{\left(\frac{|L|}{20}\right)} = 10^{\frac{-18.8}{20}} = 0.1148, \quad \text{logo} \quad \textbf{MG} = 8.7096$$

Efeito da Margem de Ganho?

Note que ao se multiplicar a FT anterior por $\boldsymbol{K \approx 8.71}$ (obtida da Margem de Ganho), tem-se um sistema marginalmente estável



Margem de Fase e Amortecimento

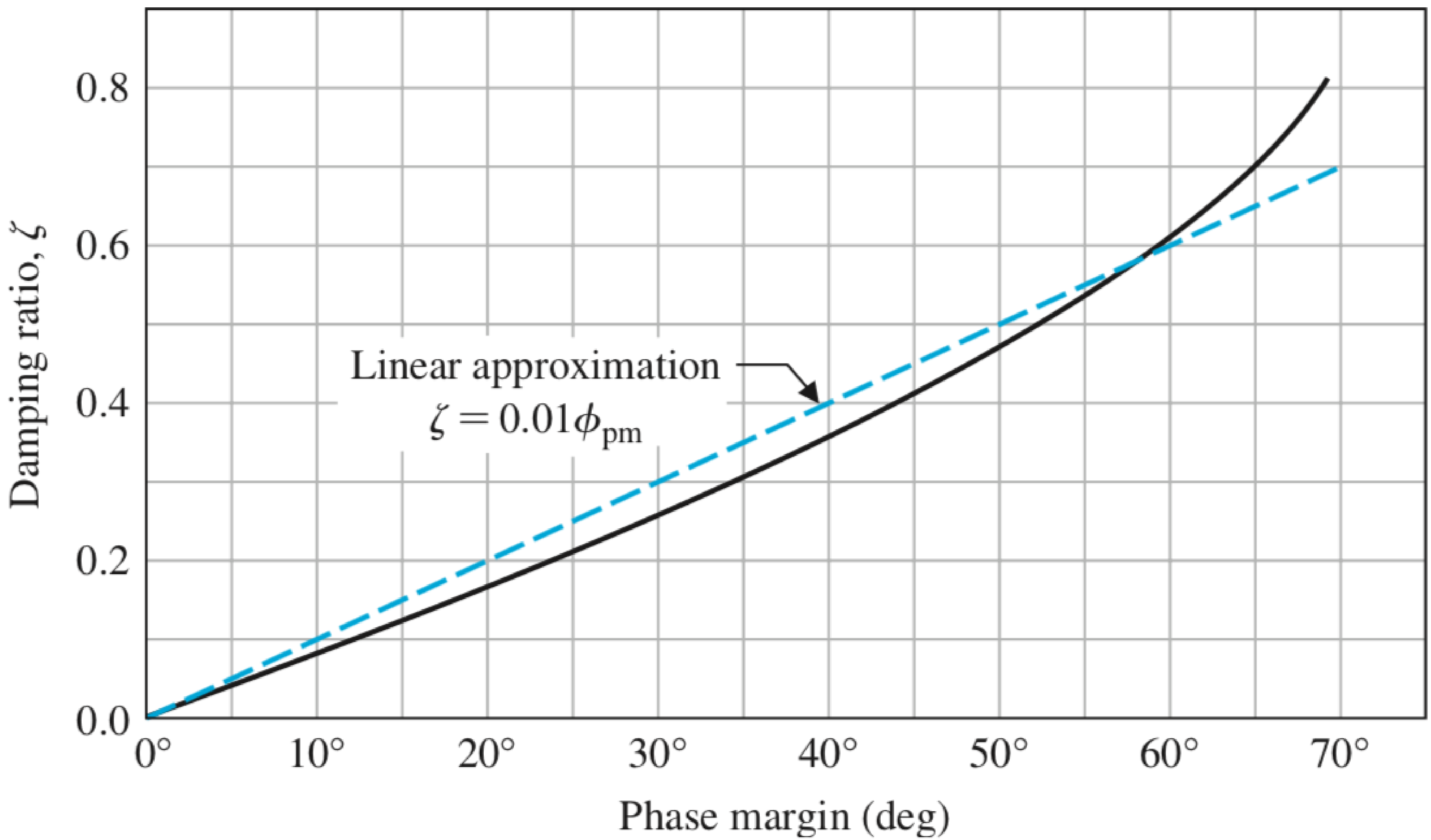
Sistemas de 2a. ordem – Para sistemas de 2a. ordem a margem de fase pode se relacionar com o amortecimento do sistema da forma:

$$\mathbf{MF} \approx 100\zeta$$

para $0 < \zeta < 0.7$

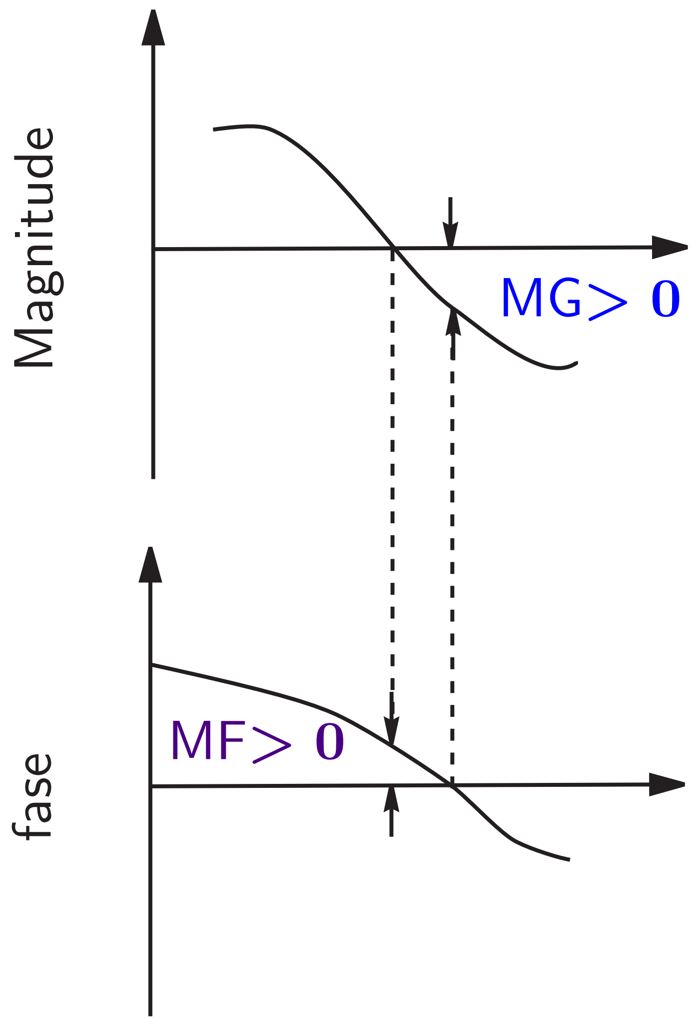
▷ Para projeto de controle é muito útil incluir especificações em termos de **MF**, na esperança de atender (mesmo que aproximadamente) especificações em relação ao sobre-sinal (overshoot) da resposta temporal em malha fechada

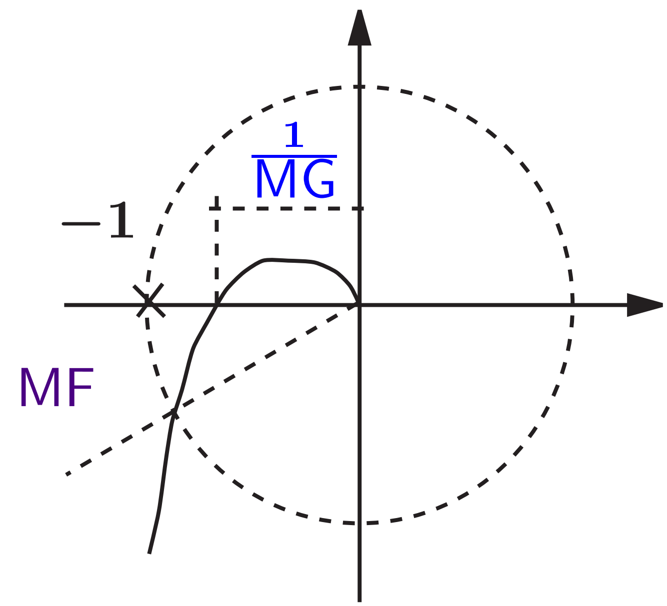
Margem de Fase e Amortecimento



Margens de Estabilidade Positivas - Estável

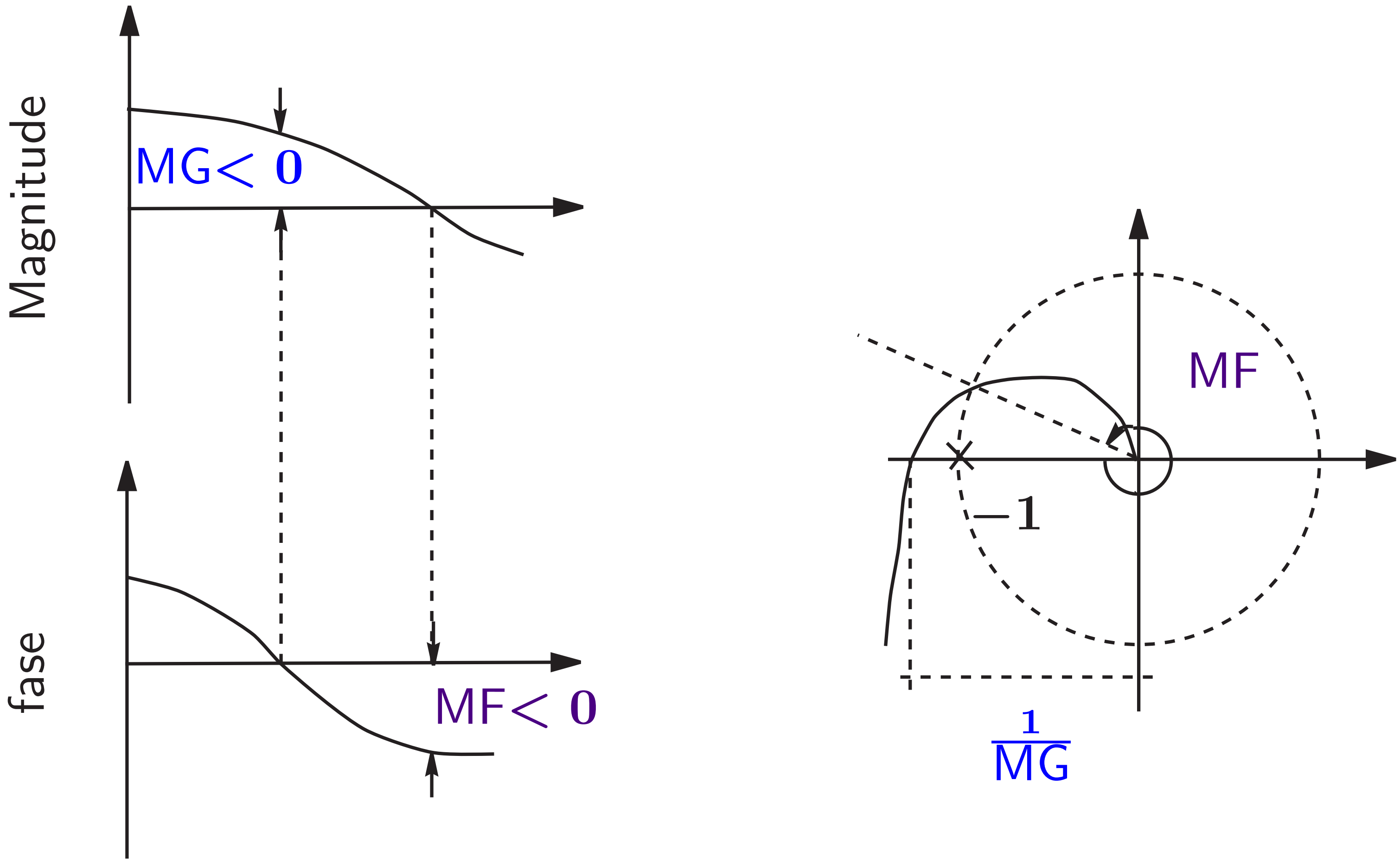
Para sistemas de fase mínima, margens positivas indicam estabilidade:



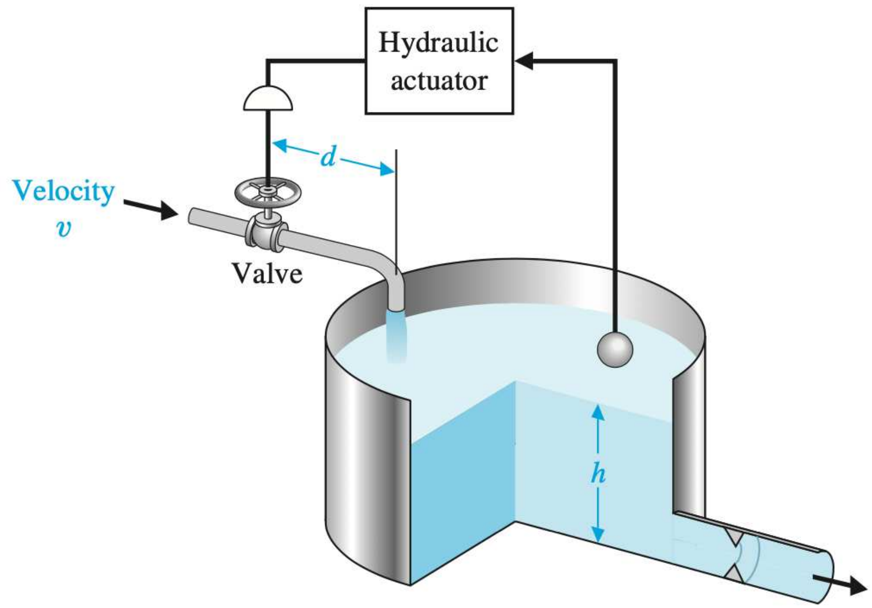


Margens de Estabilidade Negativas - Instável

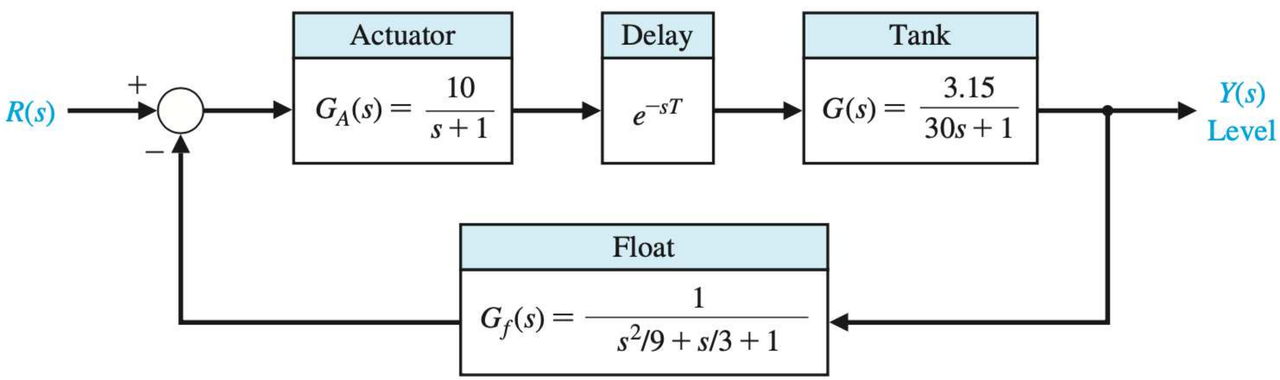
Para sistemas de fase mínima, margens negativas indicam instabilidade:



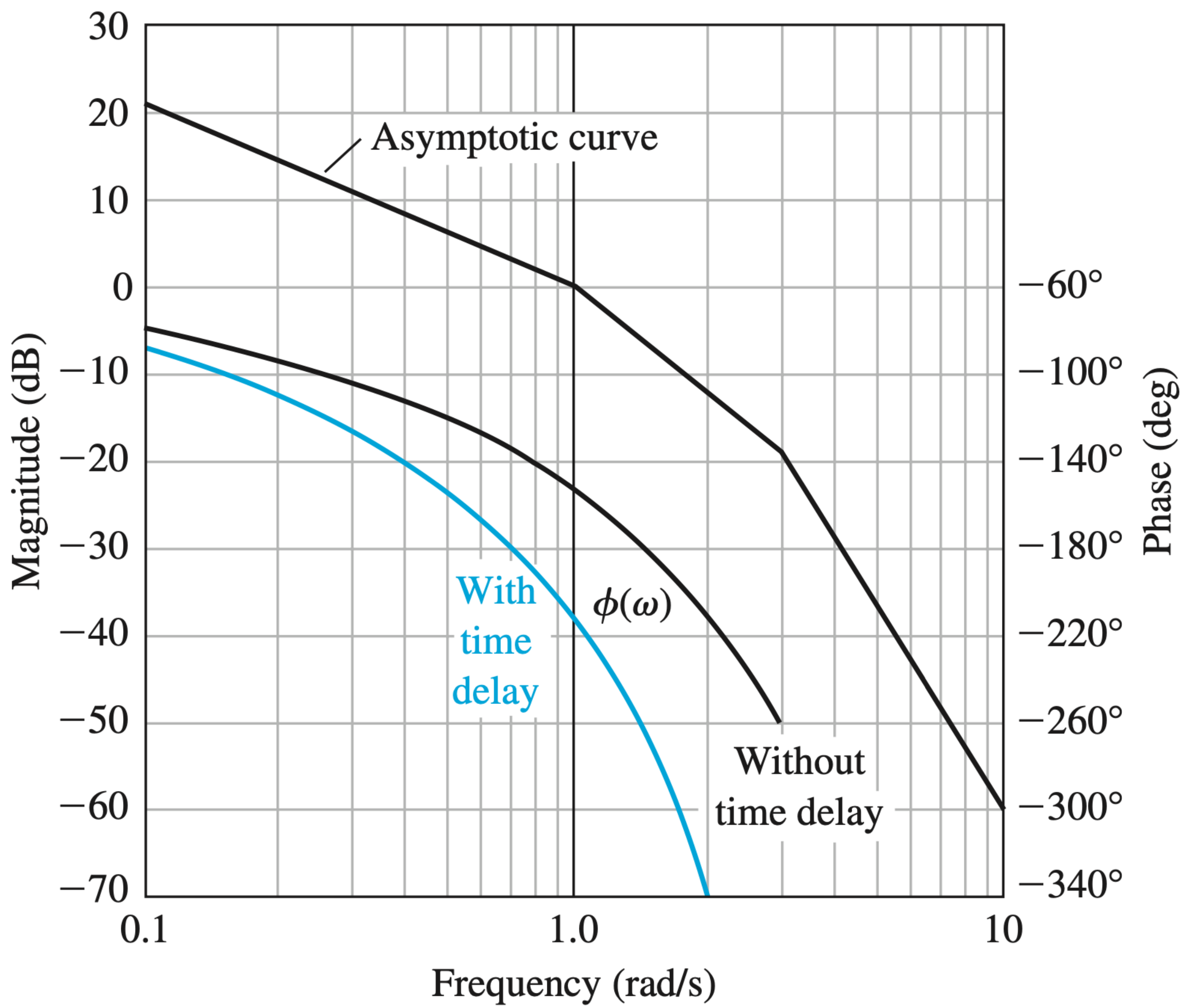
Time delay e Redução na Margem de Fase



(a)



Time delay e Redução na Margem de Fase - Instabilidade?



Sistema com múltiplas frequências de cruzamento

Retomando o Exemplo da Pag. 17 – Aula 15 – Considere o ganho em malha:

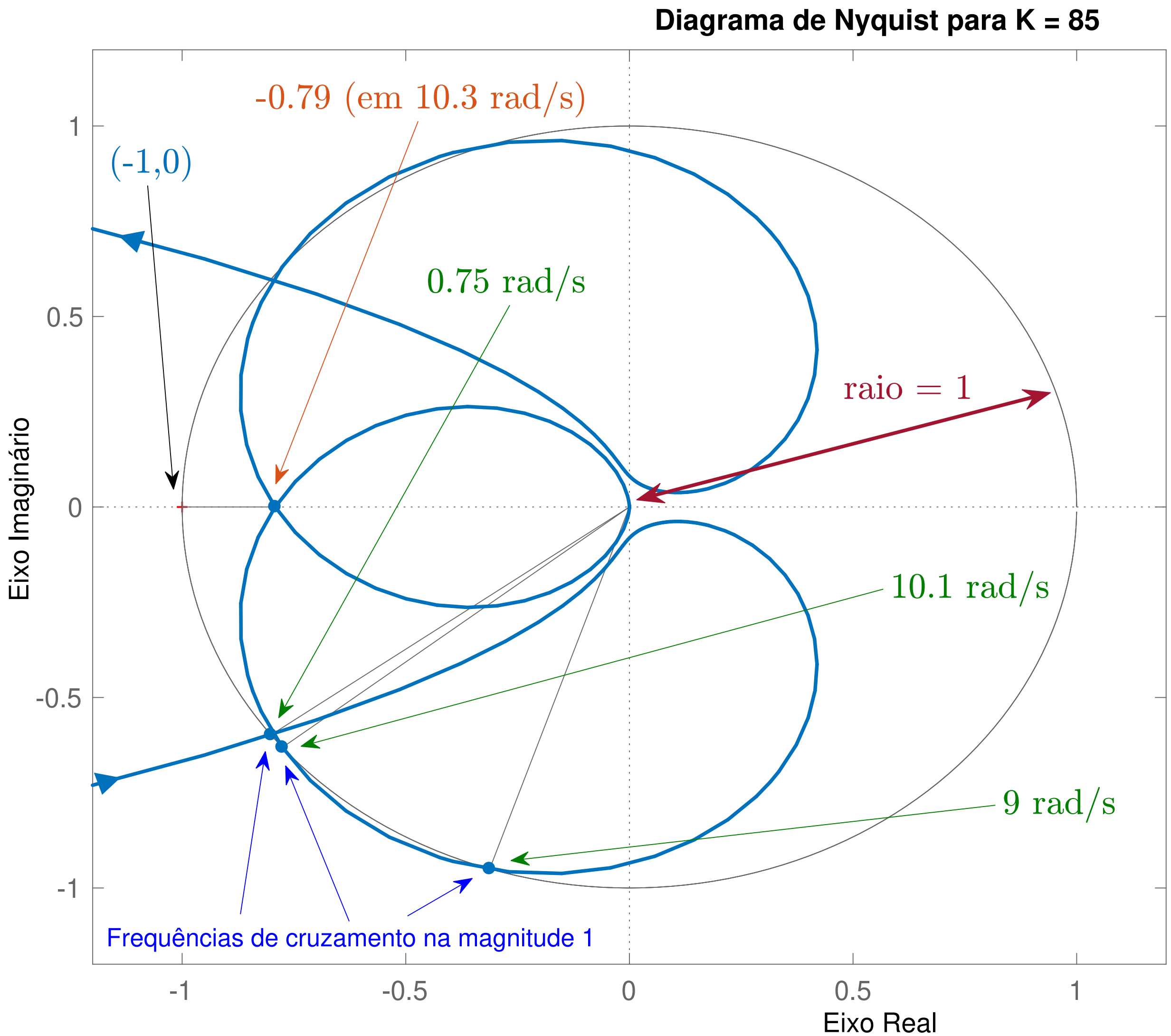
$$KG_c(s)G(s) = K \times \frac{(s+1)(s^2+2s+43.25)}{s^2(s^2+2s+82)(s^2+2s+101)}$$

▷ Considerando inicialmente, $K = 85$, obtenha as margens de estabilidade (**MG** e **MF**). Há 3 frequências de cruzamento em: $\widetilde{\omega} \approx 0.75,\ 9$ e 10.1 rad/s. (Lembre-se que na frequência de cruzamento o ganho é unitário ou 0dB)

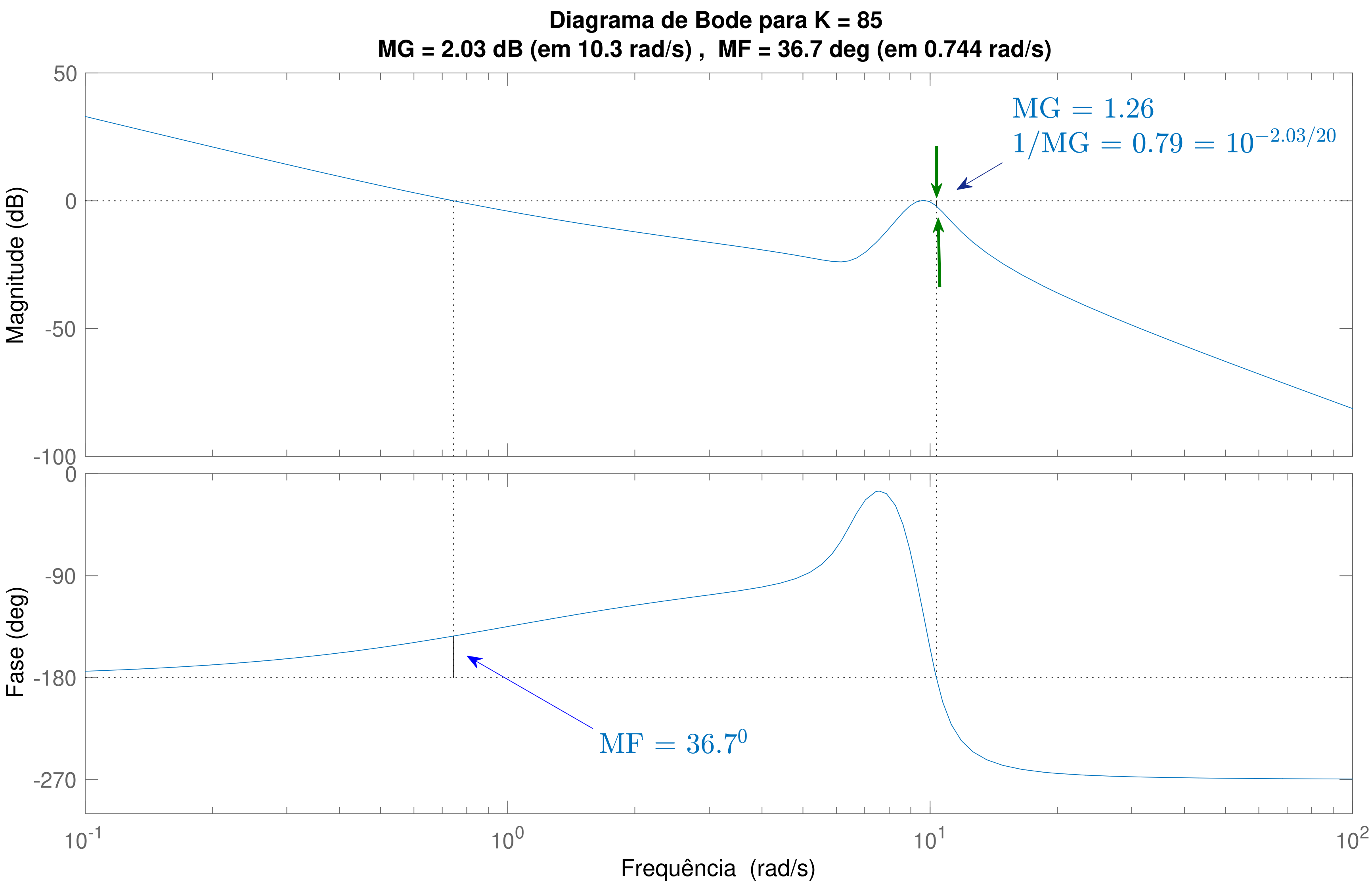
▷ Do diagrama de Nyquist a seguir, para cada $\widetilde{\omega}$ obtém-se a **MF** correspondente: 36.7^0 (em ≈ 0.75 rad/s), 80^0 (em 9 rad/s) e 40^0 (em 10.1 rad/s) (A maior proximidade, em ângulo, em relação ao ponto -1 de fato gera a **MF** desejada)

▷ No entanto, note também que a "maior proximidade" ao ponto -1 é em relação ao eixo real, ou em termos de **MG** (margem de estabilidade pobre?)

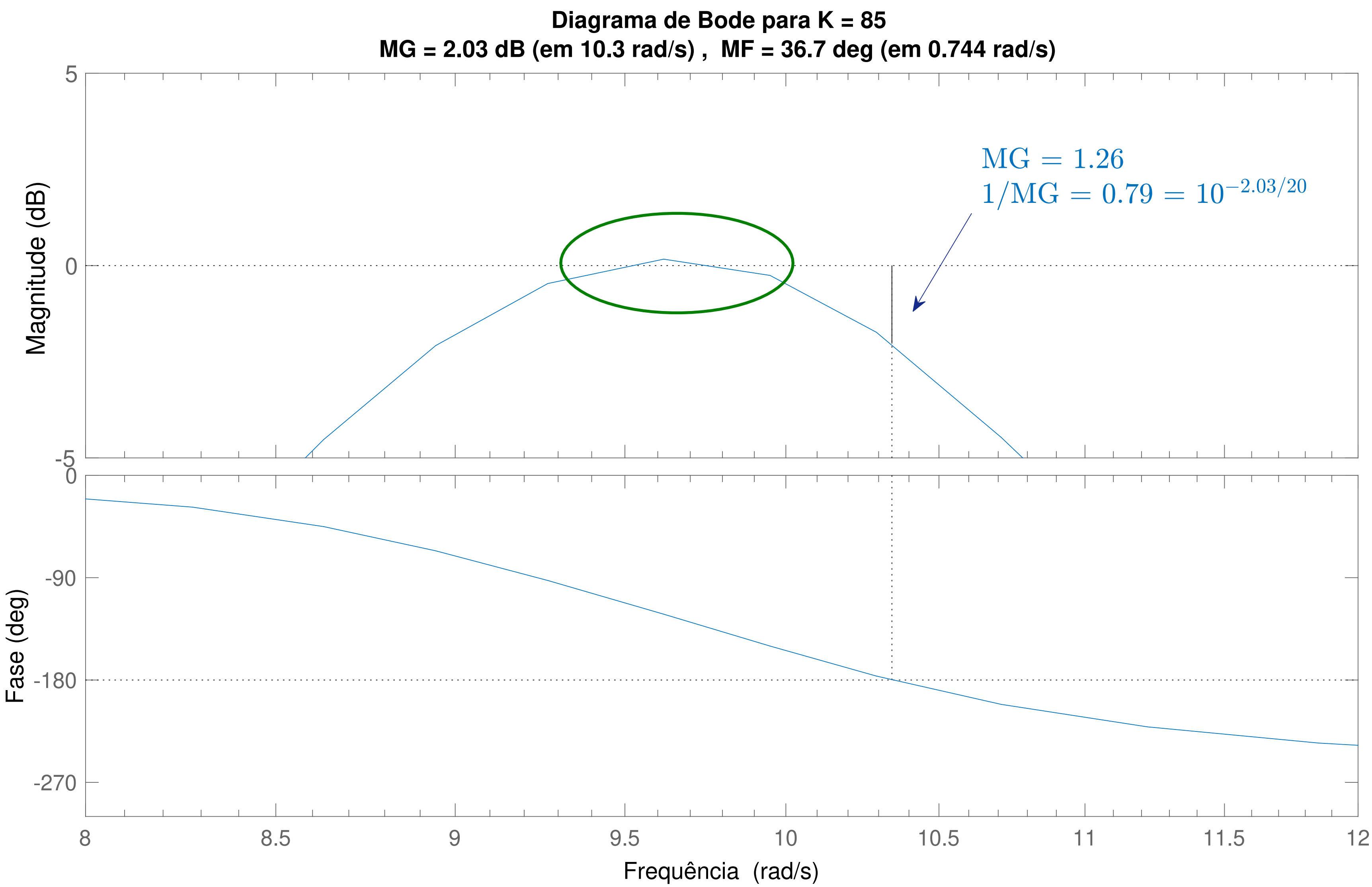
Múltiplas frequências de cruzamento – $K = 85$



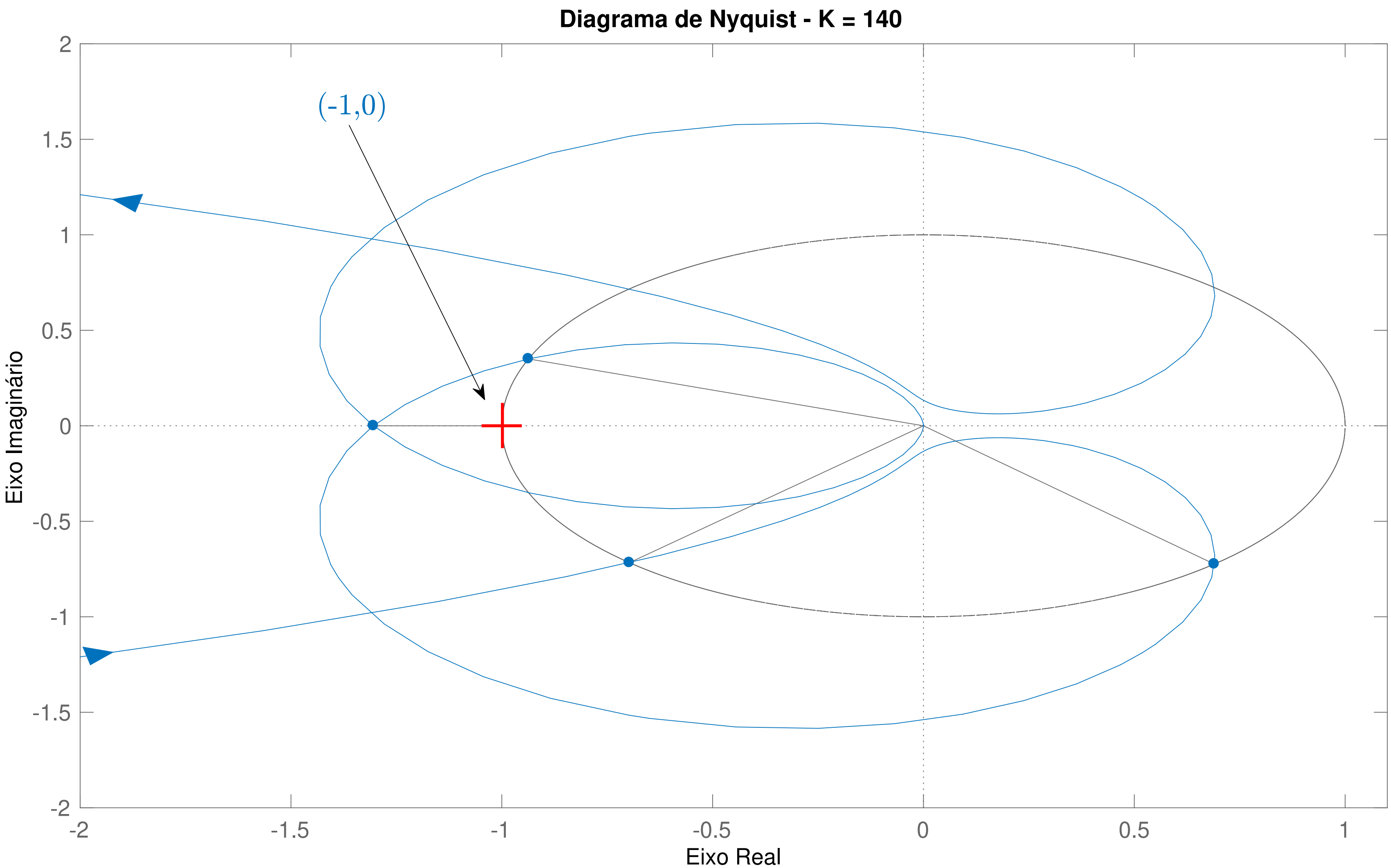
Múltiplas frequências de cruzamento – $K = 85$



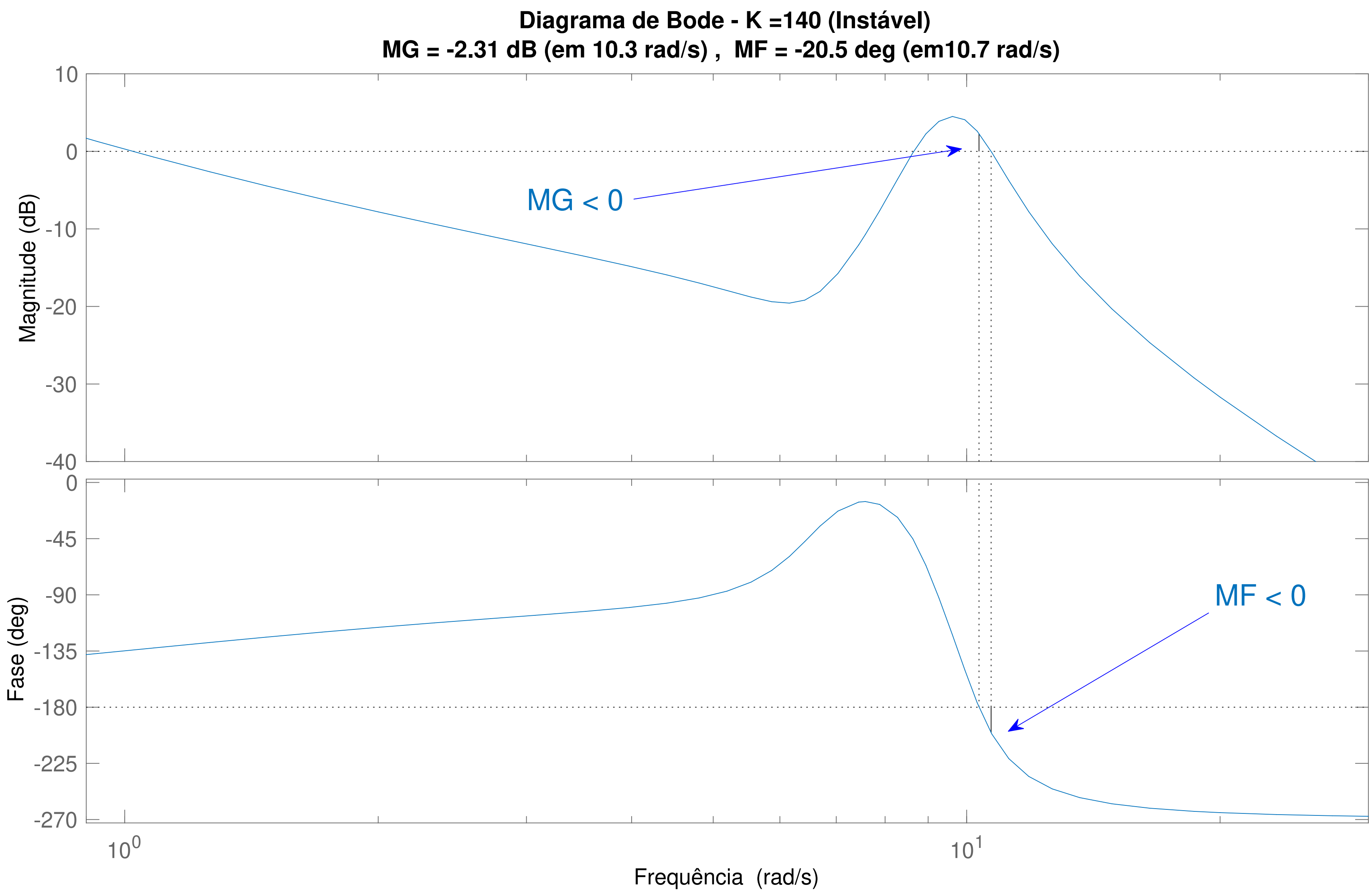
Zoom do Diagrama de Bode anterior – $K = 85$ (Estável)



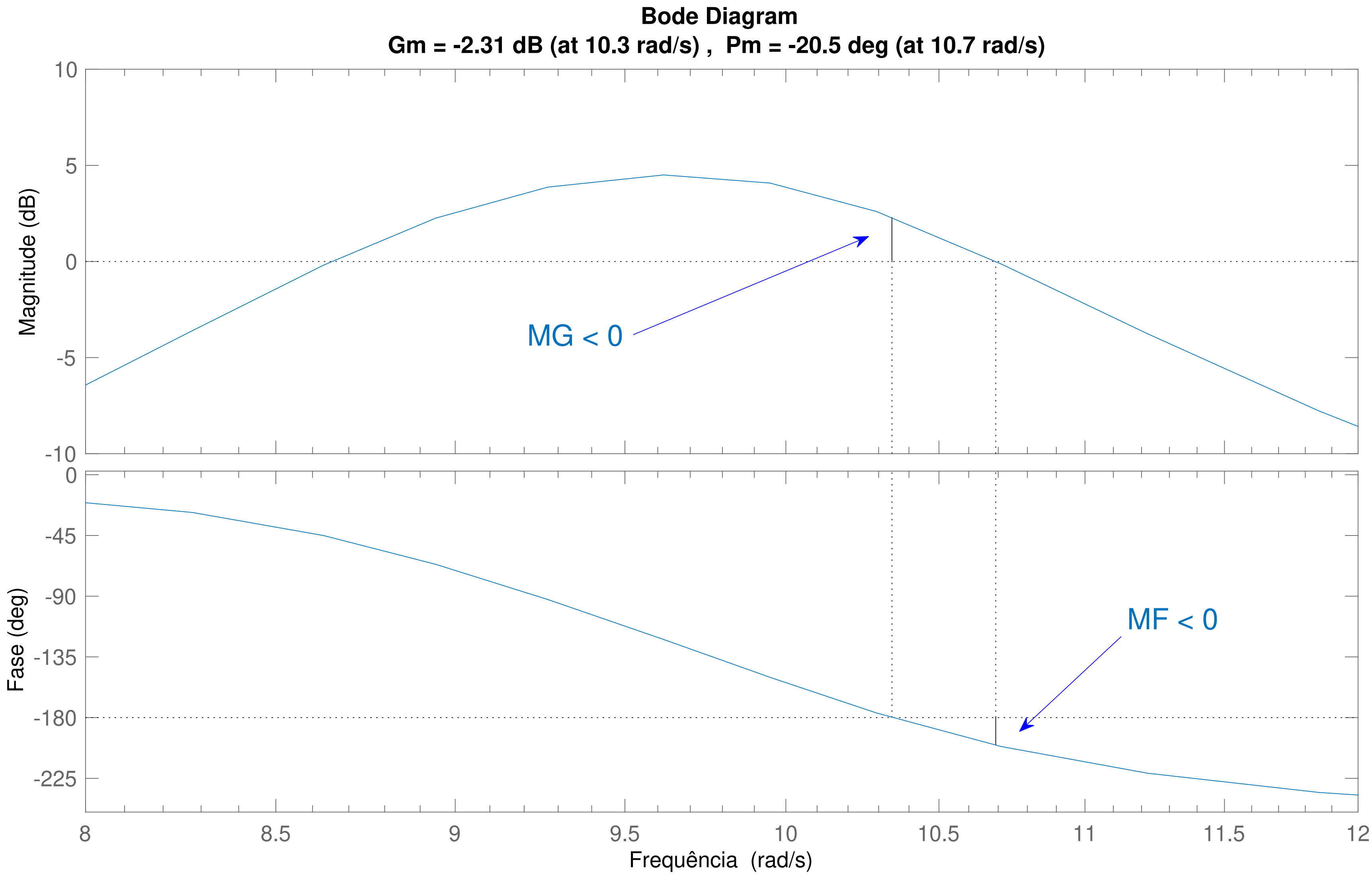
Múltiplas frequências de cruzamento – $K = 140$ (Instável)



Múltiplas frequências de cruzamento – $K = 140$ (Instável)



Zoom do Diagrama de Bode anterior – $K = 140$ (Instável)



Critérios de Desempenho no Domínio da Frequência

Resposta transitória $\times$ resposta em frequência – Para estimar o desempenho transitório de um sistema realimentado a partir da resposta em frequência em malha fechada pode-se usar a Carta de Nichols (note que já estimamos a resposta transitória via diagrama de Bode para sistema de 2a. ordem em malha fechada...)

Resposta em frequência em malha fechada – FT em malha fechada

$$T(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

Para resposta em frequência:

$$T(j\omega) = \frac{|G(j\omega)|\, e^{j\phi}}{|1 + G(j\omega)|\, e^{j\eta}} = Me^{j\phi}$$

sendo M a magnitude da resposta em frequência em malha fechada, e ϕ a fase

Resposta em Frequência em Malha Fechada

Pode-se obter a relação entre $T(s)$ e $G(s)$ no plano $G(j\omega)$ fazendo:

$$G(j\omega) = u + jv$$

Veja que da resposta em malha fechada tem-se

$$M = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| = \left| \frac{u + jv}{1 + u + jv} \right| = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{\sqrt{(1 + u)^2 + v^2}}$$

ou,

$$\left(1 - M^2\right) u^2 + \left(1 - M^2\right) v^2 - 2M^2 u = M^2$$

Note que se $M = 1$ então $u = -1/2$

Resposta em Frequência em Malha Fechada

Para $M \neq 1$, após dividir por $(1 - M^2)$ e somar o termo $\left(M^2/(1 - M^2)\right)^2$ a ambos os lados, obtém-se

$$u^2 + v^2 - \frac{2M^2 u}{1 - M^2} + \left(\frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 = \frac{M^2}{1 - M^2} + \left(\frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2$$

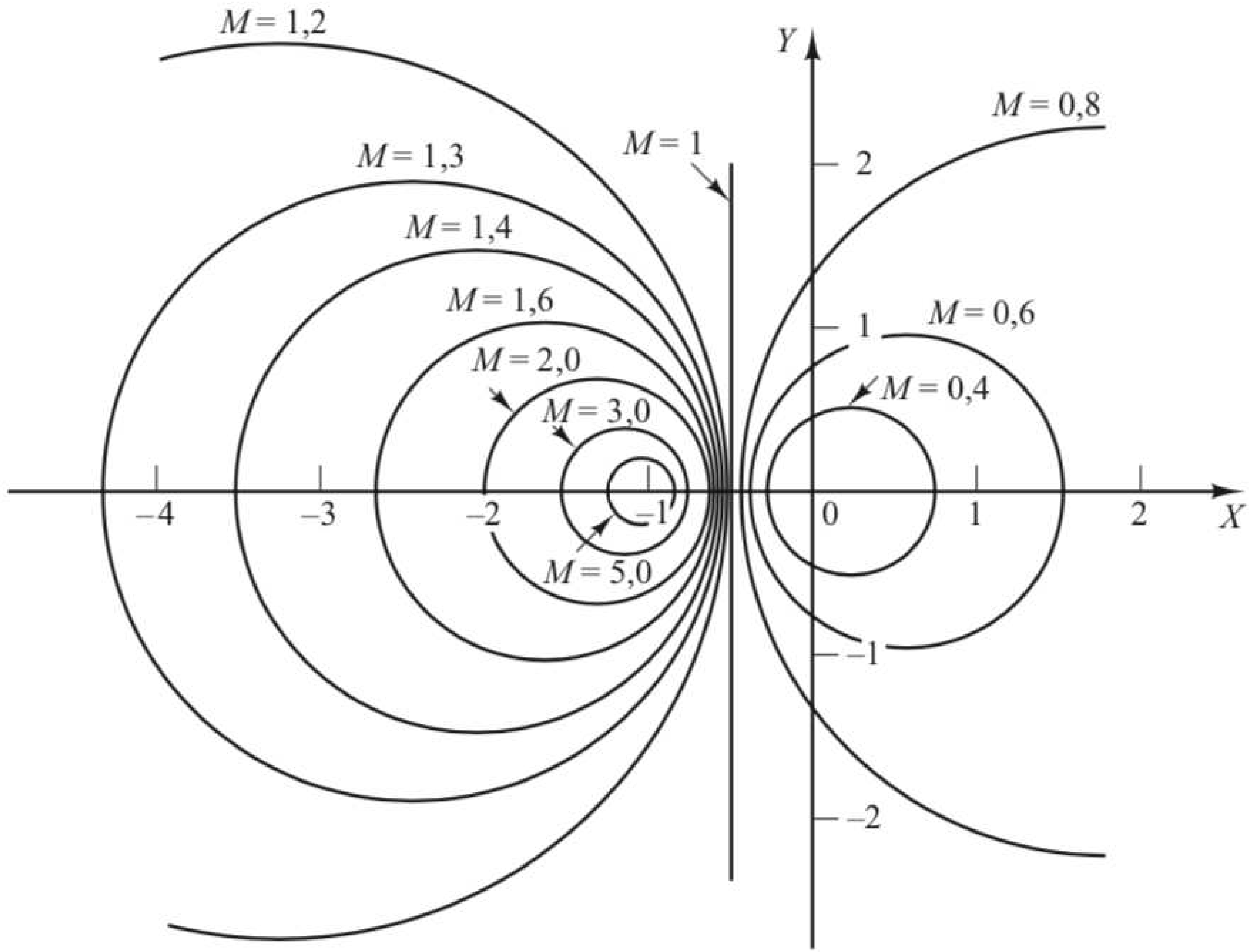
que re-arranjado pode ser expresso na relação abaixo

$$\left(u - \frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{M}{1 - M^2}\right)^2$$

i.e., é um círculo centrado em $(M^2/(1 - M^2), 0)$ com raio $M/(1 - M^2)$

Portanto, se $M < 1$ geram-se círculos à direita de $u = -1/2$, e se $M > 1$ geram-se círculos à esquerda de $u = -1/2$. Vide figura a seguir

Resposta em Frequência em Malha Fechada



Resposta em Frequência em Malha Fechada

De forma similar, círculos de ângulos de fase constantes podem ser obtidos p/ T:

$$\phi = \angle \frac{u+jv}{1+u+jv} = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v}{(1+u)}\right)$$

Usando a relação para $N = \tan\phi$, tem-se

$$N = \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan\theta - \tan\beta}{1 + \tan\theta\tan\beta}$$

ou

$$N = \frac{\frac{v}{u} - \frac{v}{1+u}}{1 + \frac{v}{u}\frac{v}{1+u}} = \frac{\frac{v}{u(1+u)}}{1 + \frac{v^2}{u(1+u)}} = \frac{v}{u^2 + u + v^2}$$

ou

$$u^2 + v^2 + u - \frac{v}{N} = 0$$

Resposta em Frequência em Malha Fechada

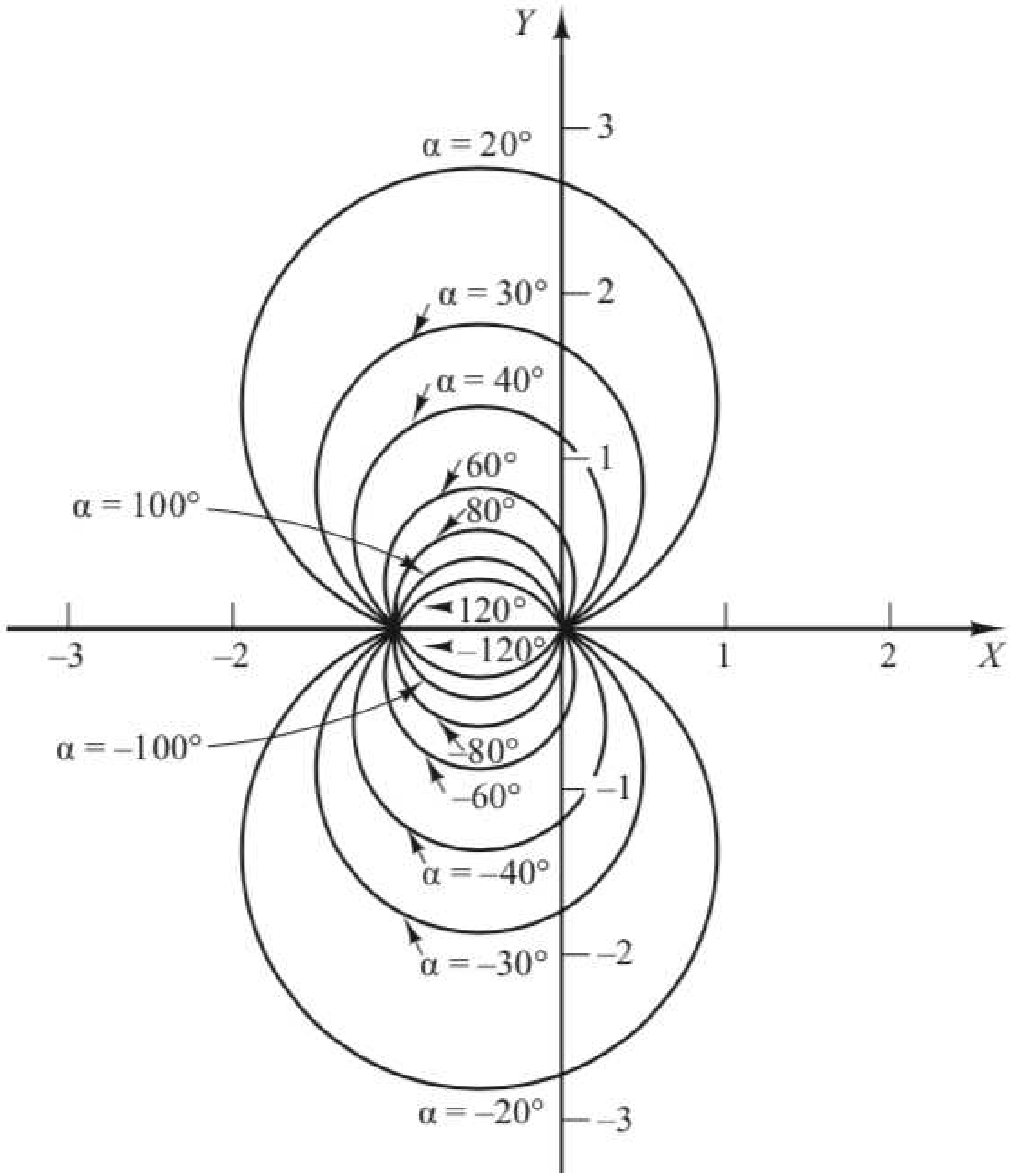
Adicionando-se o termo $(1 + 1/N^2)/4$ a ambos os lados obtém-se

$$\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{N^2}\right)$$

que é a equação de um círculo centrado em $u - 1/2$ e $v = 1/2N$, com raio igual a $(1/2)\sqrt{1 + 1/N^2}$

▷ Vide figura a seguir

Resposta em Frequência em Malha Fechada

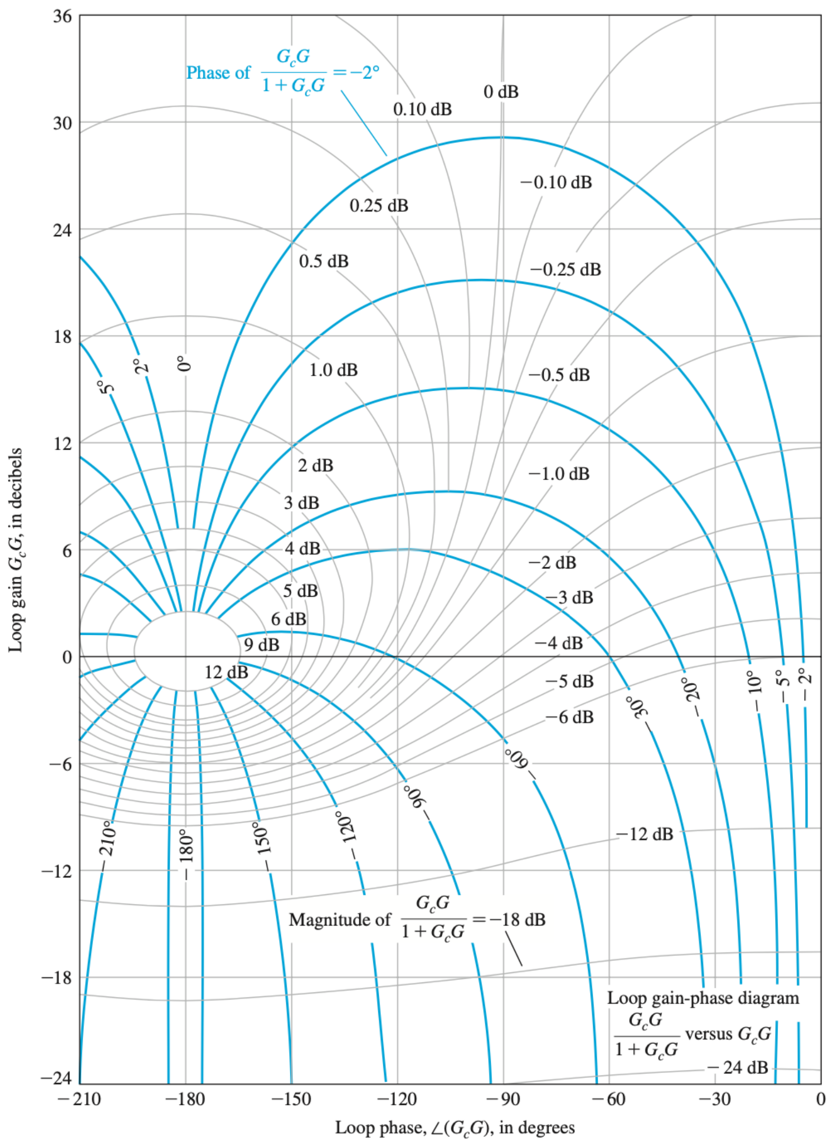


Carta de Nichols

▷ Ao se combinar em um mesmo diagrama, os círculos relativos as informações de magnitude e fase da resposta do sistema em malha fechada, tem-se a carta de Nichols (é um diagrama que irá ”deformar” os outros dois diagramas, de magnitude e fase, em um único diagrama)

▷ MATLAB: `nichols`

Carta de Nichols



Carta de Nichols

Exemplo Considere um sistema realimentado com ganho em malha aberta:

$$G_c(j\omega)G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(0.2j\omega+1)}$$

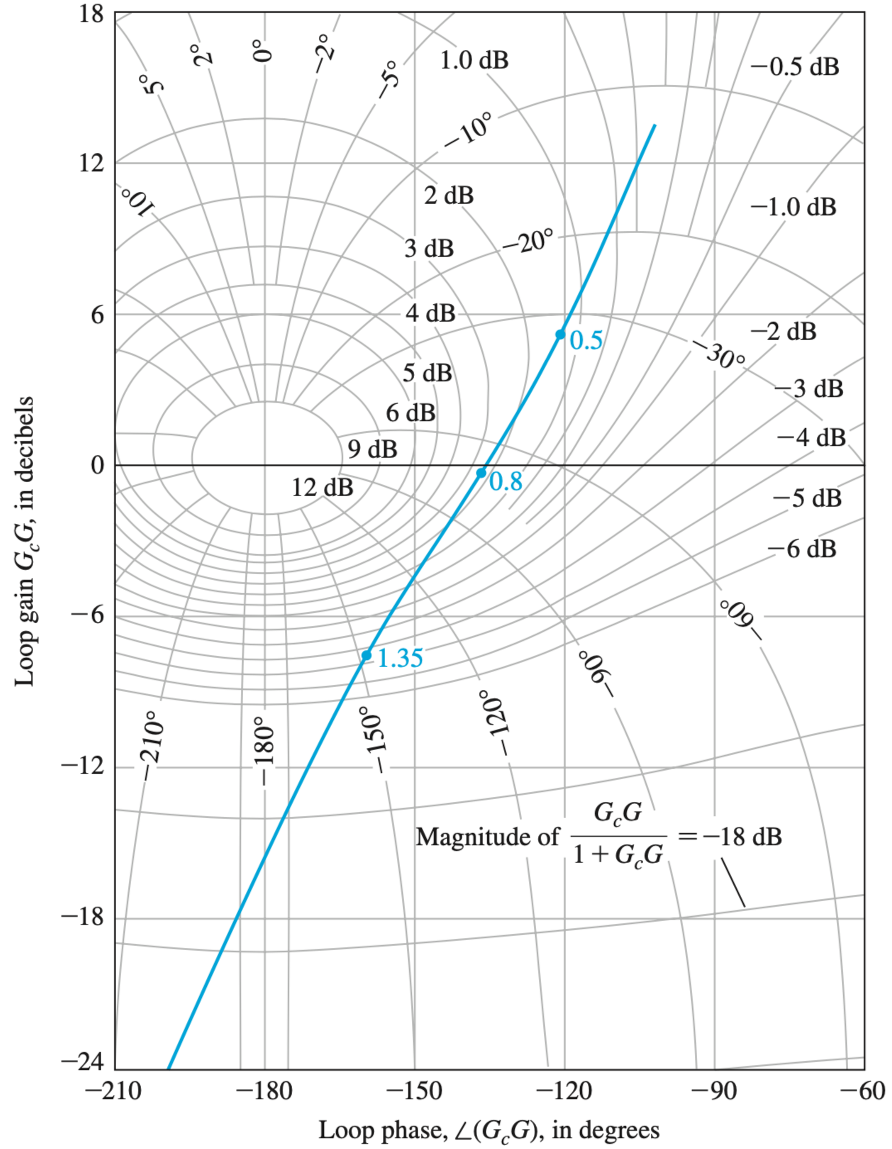
▷ Da carta de Nichols, traçada na próxima tela, pode-se ler em malha fechada:

1. Magnitude máxima (pico ressonante) $M_\omega = +2.5$dB e ocorre na frequência ressonante $\omega_r = 0.8$rad/s (Geram estimativas para amortecimento ζ e, portanto, sobre-sinal M_p)

2. Faixa de passagem ou largura de banda (ω_B) em -3dB é $\omega_B = 1.35$rad/s (Pode-se usar para estimar ω_n e, portanto, t_a)

▷ Estimativas para **MG** e **MF**? Como?

Lembrete $M_\omega = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$, $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$, $M_p = e^{\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ e $t_a = \frac{4}{\zeta\omega_n}$


Loop gain G_cG, in decibels
Loop phase, $\angle(G_cG)$, in degrees
Magnitude of $\frac{G_cG}{1+G_cG}$ = −18 dB
1.0 dB
2 dB
3 dB
4 dB
5 dB
6 dB
9 dB
12 dB
−0.5 dB
−1.0 dB
−2 dB
−3 dB
−4 dB
−5 dB
−6 dB
5°
2°
0°
−2°
−5°
−10°
10°
−20°
−30°
−60°
−90°
−120°
−150°
−180°
−210°
0.5
0.8
1.35
18
12
6
0
−6
−12
−18
−24
−210
−180
−150
−120
−90
−60

Carta de Nichols – Estimativas para MG e MF

MG $= \mathbf{15.6}$dB (em $\mathbf{2.24}$ rad/s) (ou, em valor absoluto, **MG** $= \mathbf{1/10^{\frac{-15.6}{20}}} = \mathbf{6.025}$) e **MF** $= \mathbf{43.2^0}$ (em $\mathbf{0.78}$ rad/s)