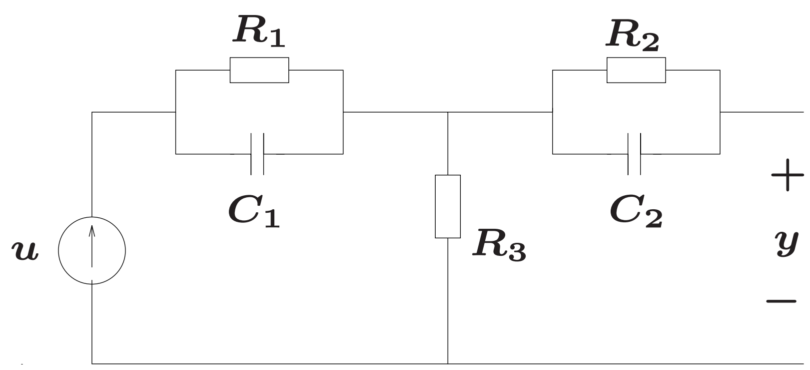
Observabilidade, Decomposição Canônica

1. Observabilidade de Sistemas LIT
2. Dualidade
3. Índices de Observabilidade
4. Decomposição Canônica

Observabilidade – Aquecendo os motores

▷ Um estado pode ser "observado" (ou acessado) a partir da saída?



Definem-se as variáveis de estado como v_{C_1} e v_{C_2}

▷ Note que a corrente através de R_3 iguala-se a entrada u (o circuito está aberto em y). Portanto a resposta gerada pelo estado inicial $v_{C_1}(0)$ não aparece na saída y. Então o estado inicial $v_{C_1}(0)$ não pode ser observado a partir da saída

Observabilidade – Sistemas LIT

- Conceito dual à controlabilidade
- Considere a equação dinâmica de dimensão n, p entradas e q saídas

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$

A equação de estado acima ou **o par (A,C) é observável** se para qualquer estado inicial $x(0)$, existir um tempo finito t_1 tal que o **conhecimento da entrada u e da saída y no intervalo $[0, t_1]$** seja suficiente para determinar de maneira única o estado inicial $x(0)$

Observabilidade – Sistemas LIT

Note que a saída do sistema para uma condição inicial $x(0)$ e uma entrada $u(t)$ é dada por

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \ + \ Du(t)$$

Assumindo y e u conhecidos, então a única incógnita seria $x(0)$. Desta forma pode-se escrever:

$$Ce^{At}x(0) = \bar{y}$$

$$\bar{y} \triangleq y(t) - C\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau - Du(t)$$

Observabilidade – Sistemas LIT

▷ Note então que estudar a observabilidade se reduz a obter $\boldsymbol{x(0)}$ a partir de $\boldsymbol{u(t)}$ e $\boldsymbol{y(t)}$. Se $\boldsymbol{u \equiv 0}$, a saída $\bar{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{(t)}$ reduz-se a resposta à entrada nula

$$\boldsymbol{y(t) = Ce^{At}x(0)}$$

⇝ Um sistema é observável se, e somente se, o estado inicial $\boldsymbol{x(0)}$ pode ser determinado de maneira única a partir da resposta à entrada nula durante um intervalo de tempo

Observabilidade – Sistemas LIT

Teorema O sistema é observável se, e somente se, a matriz $n \times n$

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau$$

for não singular para qualquer $t > 0$

Demonstração Pré-multiplicando $Ce^{At}x(0) = \bar{y}(t)$ por $e^{A't}C'$ e integrando no intervalo $[0, t_1]$ tem-se

$$\left(\int_0^{t_1} e^{A't} C' C e^{At} dt \right) x(0) = \int_0^{t_1} e^{A't} C' \bar{y}(t) dt$$

Se $W_o(t_1)$ é não singular, $x(0)$ é único e dado por

$$x(0) = W_o^{-1}(t_1) \int_0^{t_1} e^{A't} C' \bar{y}(t) dt$$

Isso demonstra que <u>se $W_o(t)$ é não singular</u> para qualquer $t > 0$ <u>então o sistema é observável</u>

Observabilidade – Sistemas LIT

Agora, demonstra-se que se $W_o(t_1)$ é singular (ou, equivalentemente, semidefinda positiva) para todo $t_1 > 0$, então o sistema é não observável

Se $W_o(t_1)$ é semidefinda positiva, existe $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ não nulo tal que

$$\begin{aligned} v'W_o(t_1)v &= \int_0^{t_1} v'e^{A't}C'Ce^{At}v dt \\ &= \int_0^{t_1} \|Ce^{At}v\|^2 dt = 0 \end{aligned}$$

o que implica $Ce^{At}v \equiv 0$ para todo $t \in [0,t_1]$. Se $u \equiv 0$, as condições iniciais diferentes: $x_1(0) = v \neq 0$ e $x_2(0) = 0$, produzem a mesma saída

$$y(t) = Ce^{At}x_1(0) = Ce^{At}x_2(0) \equiv 0$$

e, portanto, o sistema é não observável (não há unicidade)

Observabilidade – Sistemas LIT

Teorema (Dualidade) O par (A,B) é controlável se, e somente se, o par (A',B') for observável

Demonstração (A,B) é controlável se, e somente se,

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B' e^{A'\tau} d\tau$$

for não singular para qualquer $t > 0$. O par (A',B') é observável se, e somente se, trocando A por A' e C por B'

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B' e^{A'\tau} d\tau$$

for não singular para qualquer $t > 0$

Observabilidade – Sistemas LIT

▷ A Observabilidade depende apenas de (A,C)

Teorema As afirmações abaixo são equivalentes:

1. O par (A,C) é observável

2. A matriz $n \times n$

$$W_o(t) = \int_0^t e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau$$

é não-singular $\forall\ t > 0$

3. A matriz de observabilidade $nq \times n$ (comando `obsv` no Matlab)

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tem posto n (posto completo de colunas)

Observabilidade – Sistemas LIT

4. A matriz $(n+q)\times n$

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$$

tem posto n (posto completo de colunas) para todo autovalor λ de A

5. Se todos os autovalores de A têm parte real negativa, a solução única de

$$A'W_o + W_oA = -C'C$$

é definida positiva. Essa solução é chamada de Gramiano de observabilidade e pode ser expressa como

$$W_o = \int_0^\infty e^{A'\tau}C'Ce^{A\tau}d\tau$$

Observabilidade – Sistemas LIT

Para o item **3** do Teorema, note que da transposta da matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C}' = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}'$$

tem-se

$$\mathcal{C}' = \begin{bmatrix} B' \\ B'A' \\ B'A^{2'} \\ \vdots \\ B'A^{n-1'} \end{bmatrix} \quad \text{que por dualidade obtém-se:} \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Índices de Observabilidade

▷ Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ com C de posto completo de linhas (se não for o caso, alguma linha redundante pode ser eliminada)

▷ Se (A,C) for observável, a matriz de observabilidade $\mathcal{O}$ tem rank n e, consequentemente, n linhas linearmente independentes (de um total de nq linhas)

▷ Seja c_i a i-ésima linha de C. De maneira dual à controlabilidade, se uma linha associada a c_m torna-se LD, todas as demais linhas subsequentes também o serão. Seja ν_m o número de linhas LI associadas a c_m. Se $\mathcal{O}$ tem rank n,

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_q = n$$

$\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p\}$ são índices de observabilidade e

$$\nu = \max\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p\}$$

é o índice de observabilidade de (A,C)

Índices de Observabilidade

▷ Se (A,C) é observável, o índice de observabilidade ν é o menor inteiro tal que

$$\rho(\mathcal{O}_\nu) = \rho\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\nu-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

▷ O intervalo para ν é dado por

$$n/q \leq \nu \leq \min\ (\bar{n}, n-q+1) \qquad q = \text{rank}\ (C)$$

sendo $\bar{n}$ o grau do polinômio mínimo de A

Índices de Observabilidade

Corolário O par (A,C) com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\rho(C) = q$ é observável se, e somente se, a matriz

$$\mathcal{O}_{n-q+1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-q} \end{bmatrix}$$

tiver posto n

Teorema A observabilidade é invariante sob qualquer transformação de equivalência

Teorema O conjunto de índices de observabilidade do par (A,C) é invariante sob qualquer transformação de equivalência e para qualquer re-ordenamento das linhas de C

Reconstruindo a condição inicial?

▷ Diferenciando $Ce^{At}x(0) = \bar{y}(t)$ e considerando $t = 0$, tem-se

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\nu-1} \end{bmatrix} x(0) = \mathcal{O}_\nu x(0) = \tilde{y}(0) \triangleq \begin{bmatrix} \bar{y}(0) \\ \dot{\bar{y}}(0) \\ \vdots \\ \bar{y}^{(\nu-1)}(0) \end{bmatrix}$$

Uma solução $x(0)$ existe se $\tilde{y}(0)$ estiver no range de $\mathcal{O}_\nu$. Se (A,C) é observável então $\mathcal{O}_\nu$ tem podto completo de colunas e a solução é única e dada por:

$$x(0) = [\mathcal{O}'\mathcal{O}]^{-1}\mathcal{O}'\tilde{y}(0)$$

Note que para a determinação do vetor $\tilde{y}(0)$ (contendo as derivadas) é necessário o conhecimento de $\bar{y}(t)$ na vizinhança de $t = 0$

Sistemas Equivalentes

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}$$

Seja $\bar{x} = Px$ com P não singular. Então

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \end{cases}$$

$$\bar{A} = PAP^{-1} \;\; ; \;\; \bar{B} = PB \;\; ; \;\; \bar{C} = CP^{-1} \;\; ; \;\; \bar{D} = D$$

é um sistema equivalente

$$(A,B) \text{ controlável } \iff (\bar{A},\bar{B}) \text{ controlável}$$

$$(A,C) \text{ observável } \iff (\bar{A},\bar{C}) \text{ observável}$$

Sistemas Equivalentes

▷ Todas as propriedades (estabilidade, controlabilidade e observabilidade) são preservadas pela transformação de equivalência.

▷ As matrizes de controlabilidade e de observabilidade se relacionam da seguinte forma

$$\bar{\mathcal{C}} = P\mathcal{C} \ \ ; \ \ \bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O}P^{-1}$$

Decomposição Canônica

Teorema Considere um sistema de dimensão n com

$$\rho(\mathcal{C}) = \rho\left(\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = n_1 < n$$

e forme a matriz $n \times n$, $P^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_{n_1} & \cdots & q_n \end{bmatrix}$, cujas primeiras n_1 colunas são quaisquer n_1 colunas LI da matriz de Controlabilidade $\mathcal{C}$, e as demais são escolhidas arbitrariamente de modo que P seja não singular

A transformação de similaridade $\bar{x} = Px$ gera o sistema equivalente:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + Du \end{cases}$$

com $\bar{A}_c \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ e $\bar{A}_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{(n-n_1)\times(n-n_1)}$

Decomposição Canônica

A sub-equação de dimensão n_1

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_c &= \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{B}_c u \\ \bar{y} &= \bar{C}_c \bar{x}_c + D u \end{aligned}$$

é controlável e tem a mesma matriz de transferência do sistema original

Decomposição Canônica

Demonstração Seja $\mathcal{C}$ a matriz de controlabilidade de (A,B). Então tem-se $\rho(\mathcal{C}) = \rho(\bar{\mathcal{C}}) = n_1$ e pode-se verificar que

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathcal{C}} &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \bar{B}_c & \bar{A}_c\bar{B}_c & \cdots & \bar{A}_c^{n_1}\bar{B}_c & \cdots & \bar{A}_c^{n-1}\bar{B}_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c|c} \bar{\mathcal{C}}_c & \bar{A}_c^{n_1}\bar{B}_c & \cdots & \bar{A}_c^{n-1}\bar{B}_c \\ 0 & 0 & & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \} \; n_1 \text{ linhas} \\ \} \; n - n_1 \text{ linhas} \end{array}
\end{aligned}
$$

sendo $\bar{\mathcal{C}}_c$ a matriz de controlabilidade do par $(\bar{A}_c, \bar{B}_c)$. Como as colunas de $\bar{A}_c^k\bar{B}_c$, para $k \geq n_1$, são LD das colunas de $\bar{\mathcal{C}}_c$, a condição $\rho(\mathcal{C}) = n_1$ implica $\rho(\bar{\mathcal{C}}) = n_1$ e portanto a equação de dimensão n_1 é controlável

Resta mostrar que a equação de dimensão n_1 tem a mesma função de transferência do sistema original ?

Decomposição Canônica

A equação de dimensão n_1 tem a mesma FT do sistema original? Como a transformação de equivalência não altera a FT, basta mostrar que a FT do sistema de dimensão n_1 é igual à do sistema transformado

Note que no sistema transformado tem-se:

$$\begin{bmatrix} s\mathsf{I} - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} \\ \mathbf{0} & s\mathsf{I} - \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(s\mathsf{I} - \bar{A}_c\right)^{-1} & M \\ \mathbf{0} & \left(s\mathsf{I} - \bar{A}_{\bar{c}}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

com

$$M = \left(s\mathsf{I} - \bar{A}_c\right)^{-1} \bar{A}_{12} \left(s\mathsf{I} - \bar{A}_{\bar{c}}\right)^{-1}$$

e portanto a matriz de transferência do sistema transformado é...

Decomposição Canônica

Matriz de transferência:

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + D =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \bar{A}_c\right)^{-1} & M \\ \mathbf{0} & \left(s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}}\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + D$$

$$= \bar{C}_c \left(s\mathbf{I} - \bar{A}_c\right)^{-1} \bar{B}_c + D$$

i.e., têm a mesma Função de Transferência ∎

Decomposição Canônica

▷ Na transformação de equivalência $\bar{x} = Px$, o espaço de estados é dividido em dois subespaços: um controlável e outro não controlável

▷ Decomposição do espaço de estados

não-controlável; dimensão $n - n_1$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \uparrow \\ \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ 0 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \\ & & \downarrow & & \end{array}$$

controlável; dimensão n_1

Decomposição Canônica

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

`rank(B)` é 2 $\Rightarrow \mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$

$$\rho(\mathcal{C}_2) = \rho \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

o sistema é não controlável...

Decomposição Canônica

Escolha:

$$P^{-1} = Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{x} = Px$$

as duas primeiras colunas de Q são as duas primeiras colunas LI de $\mathcal{C}_2$. Note

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad ; \quad \bar{B} = PB = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Decomposição Canônica

▷ Sistema de dimensão $n_1 = 2$

$$\dot{\bar{x}}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_c + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

MATLAB A função `ctrbf` transforma o sistema para a forma canônica controlável:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{\bar{c}} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_c \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_c \end{bmatrix}$$

Decomposição Canônica

Teorema (Decomposição Canônica — Forma Dual) Considere um sistema de dimensão n com

$$\rho(\mathcal{O}) = \rho\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n_2 < n$$

e forme a matriz $n \times n$ $P \triangleq \begin{bmatrix} p_1 & \dots & p_{n_2} & \dots & p_n \end{bmatrix}'$ cujas primeiras n_2 linhas são quaisquer n_2 linhas LI de $\mathcal{O}$ e as demais são escolhidas arbitrariamente de modo que P seja não singular. Então...

Decomposição Canônica

Então, $\bar{x} = Px$ transforma o sistema em

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & \mathbf{0} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} \bar{C}_o & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + Du \end{cases}$$

$\bar{A}_o \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ e $\bar{A}_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{(n-n_2)\times(n-n_2)}$. A sub-equação de dimensão n_2

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_o = \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o u \\ \bar{y} = \bar{C}_o \bar{x}_o + Du \end{cases}$$

é observável e tem a mesma matriz de transferência

MATLAB `obsvf`

Decomposição Canônica

Teorema (Decomposição de Kalman) Toda equação de estado pode ser transformada na forma canônica equivalente

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{co} \\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{\bar{c}o} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \\ y & = & \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & 0 & \bar{C}_{\bar{c}o} & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + Du \end{array} \right.$$

sendo, $\bar{x}_{co}$ controlável e observável; $\bar{x}_{c\bar{o}}$ controlável e não observável; $\bar{x}_{\bar{c}o}$ não controlável e observável e $\bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}$ não controlável e não observável

Decomposição Canônica

O sistema é equivalente (para estado inicial nulo) à equação de estado controlável e observável

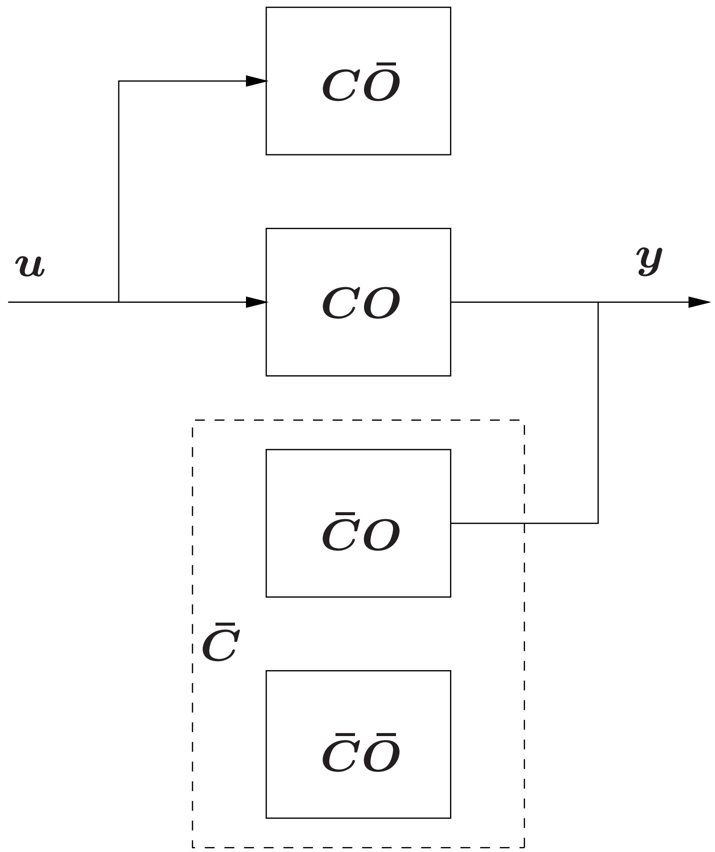
$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_{co} & = \bar{A}_{co}\bar{x}_{co} + \bar{B}_{co}u \\ \\ y & = \bar{C}_{co}\bar{x}_{co} + Du \end{cases}$$

com a matriz de transferência dada por:

$$G(s) = \bar{C}_{co}(s\mathbf{I} - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co} + D$$

Decomposição Canônica

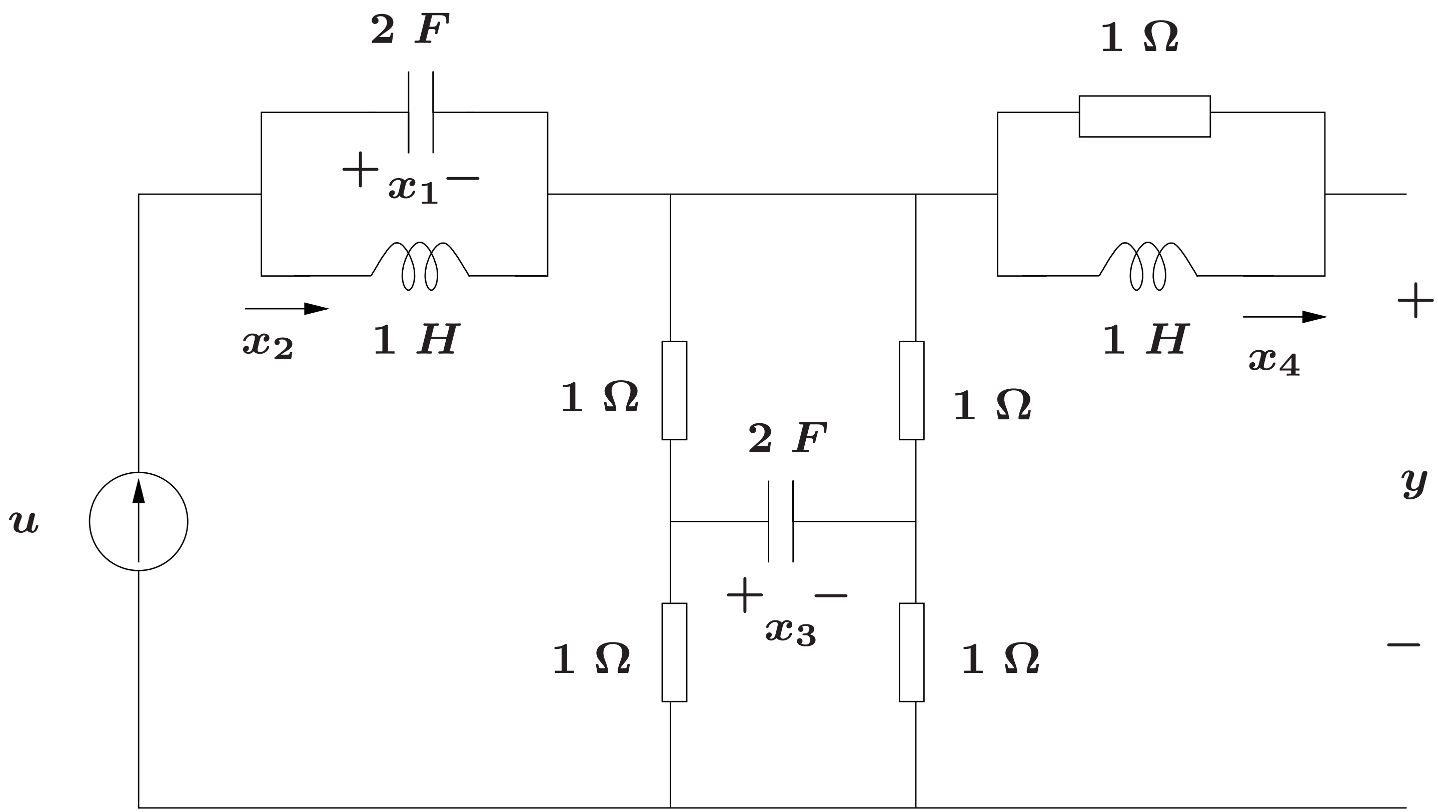
Decomposição de Kalman



▷ Descrição por FT não é necessariamente equivalente à descrição por equações de estado

MATLAB `minreal` (realização mínima, cancelando polos e zeros)

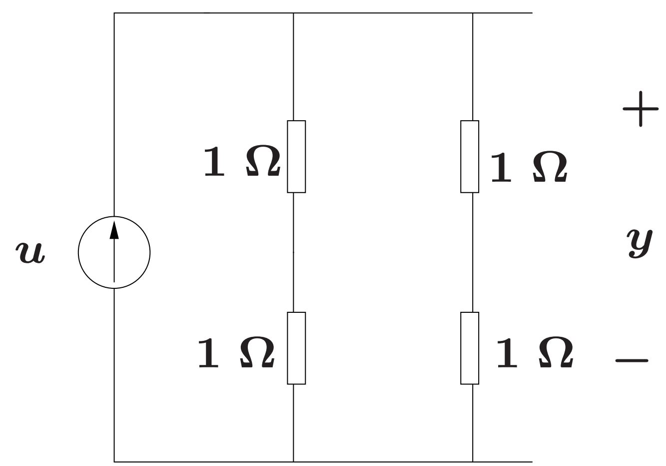
Exemplo



Eliminando as variáveis de estado que são não controláveis e/ou não observáveis...

Decomposição Canônica

Eliminando as variáveis de estado que não são controláveis (circuito com o R+L do lado aberto em y) e e/ou não são observáveis (C+L em paralelo na malha da fonte de corrente u) (note ainda que devido a simetria, x_3 é não controlável e não observável...):



▷ Corrente em cada ramo: $u/2$ e saída $y = u/2 + u/2 = u$. Portanto FT: $y = u$, i.e., $G(s) = 1$

Decomposição Canônica

Equação de estado do circuito original (forma canônica controlável)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + u \end{cases}$$

Parte controlável

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} x_c + u \quad \Rightarrow \quad y = u \end{cases}$$