Estabilidade no Domínio da Freqüência

1. Motivação

2. Mapas de contorno no Plano-s

3. Critério de Nyquist

Estabilidade no Domínio da Freqüência

▷ Como analisar e determinar a estabilidade de um sistema realimentado durante um projeto de controle? Isto é, para uma família de controladores?

- Routh-Hurwitz, lugar das raízes

Por que então estudar outra técnica de análise de estabilidade?

▷ É a forma mais adequada para analisar especificações de desempenho e estabilidade relativa e robusta no domínio da freqüência

Em que se baseia o critério de Nyquist? A idéia principal deste critério consiste no mapeamento de um dado contorno orientado em um plano para outro plano, permitindo localizar a posição de pontos singulares

Estabilidade no Domínio da Freqüência

▷ Veja que para determinar a estabilidade relativa de um sistema em malha fechada, deve-se investigar a EC do sistema:

$$F(s) = 1 + KG_c(s)G(s) = 0$$

onde $G(\cdot)$ denota a planta e $KG_c(\cdot)$ a forma ganho, pólo e zero do controlador

▷ Para garantir estabilidade deve-se verificar se todos os zeros de $F(s)$ estão alocados no semi-plano esquerdo aberto. Por que os zeros de $F(s)$? Pois são pólos em malha fechada

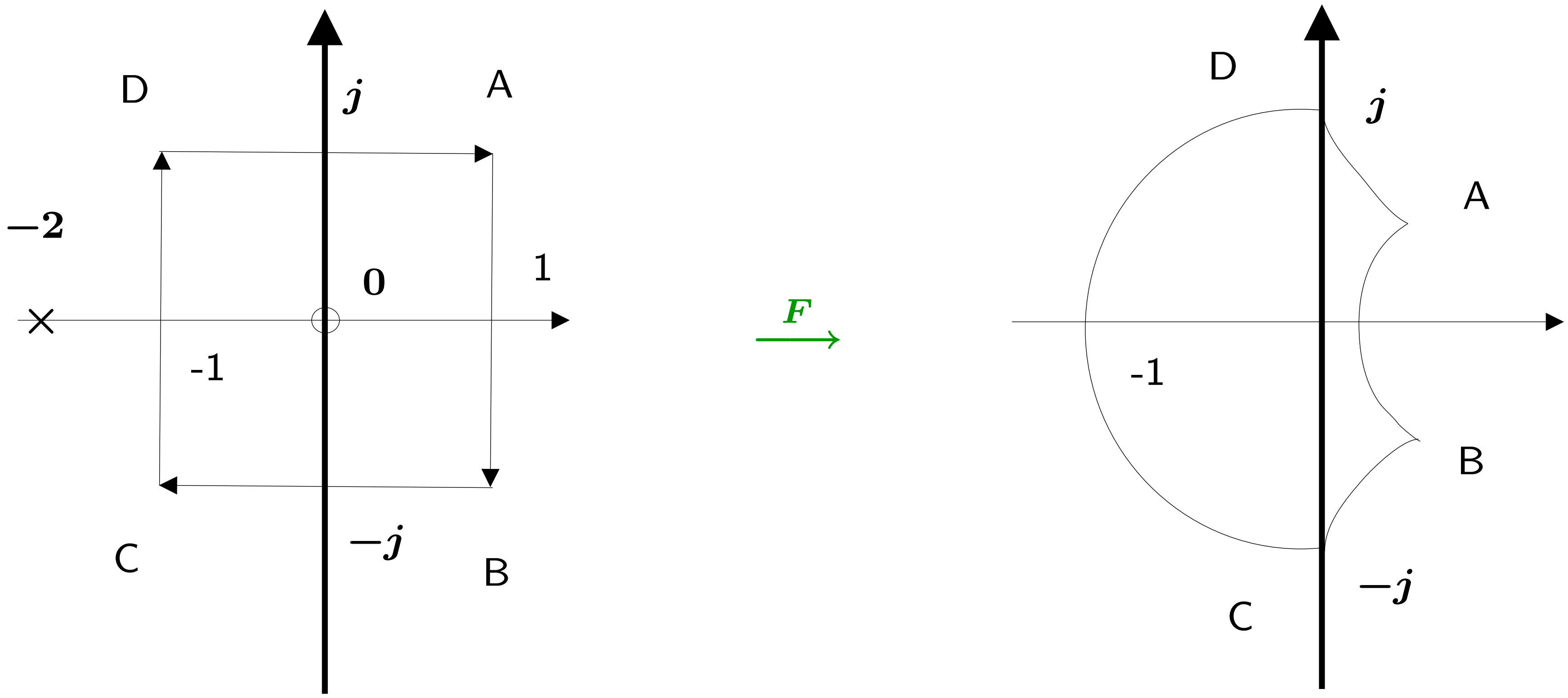
Mapeamento de Contornos no Plano-s

A estratégia de mapeamento consiste em criar uma transformação, no caso a própria função $F(s)$, que mapeie um contorno orientado no plano-s para um outro plano. Como "s" é uma variável complexa, isto é, $s = \sigma + j\omega$, a função $F(s)$ é também complexa, tal que pode-se definir:

$$F(s) = u + jv$$

podendo então ser representado em um novo plano complexo-$F(s)$ nas coordenadas u e v

Exemplo Considere a função $F(s) = \frac{s}{s+2}$, e um contorno orientado no plano-s, o mapeamento para o plano-$F(s)$ é descrito abaixo



Plano-s

Plano-F

Estabilidade no Domínio da Freqüência

Teorema de Cauchy *"Se um contorno Γ_S no plano-s envolve* **Z** *zeros e* **P** *pólos da função $F(s)$ e não cruza nenhum pólo ou zero de $F(s)$, e ainda, a orientação do contorno é no sentido horário; o contorno correspondente Γ_F no plano-$F(s)$ cerca a origem do plano-$F(s)$*

$$\boxed{\mathsf{N} = \mathsf{Z} - \mathsf{P} \quad \text{vezes}}$$

no sentido horário"

▷ Portanto para o exemplo anterior, o contorno no plano-$F(s)$ envolve a origem uma vez, pois $\mathsf{N} = \mathsf{Z} - \mathsf{P} = 1$

Estabilidade no Domínio da Freqüência

Critério de Nyquist no Domínio-s – procura determinar se existe algum zero da EC em malha fechada

$$\boldsymbol{F(s) = 1 + KG_c(s)G(s) = 0}$$

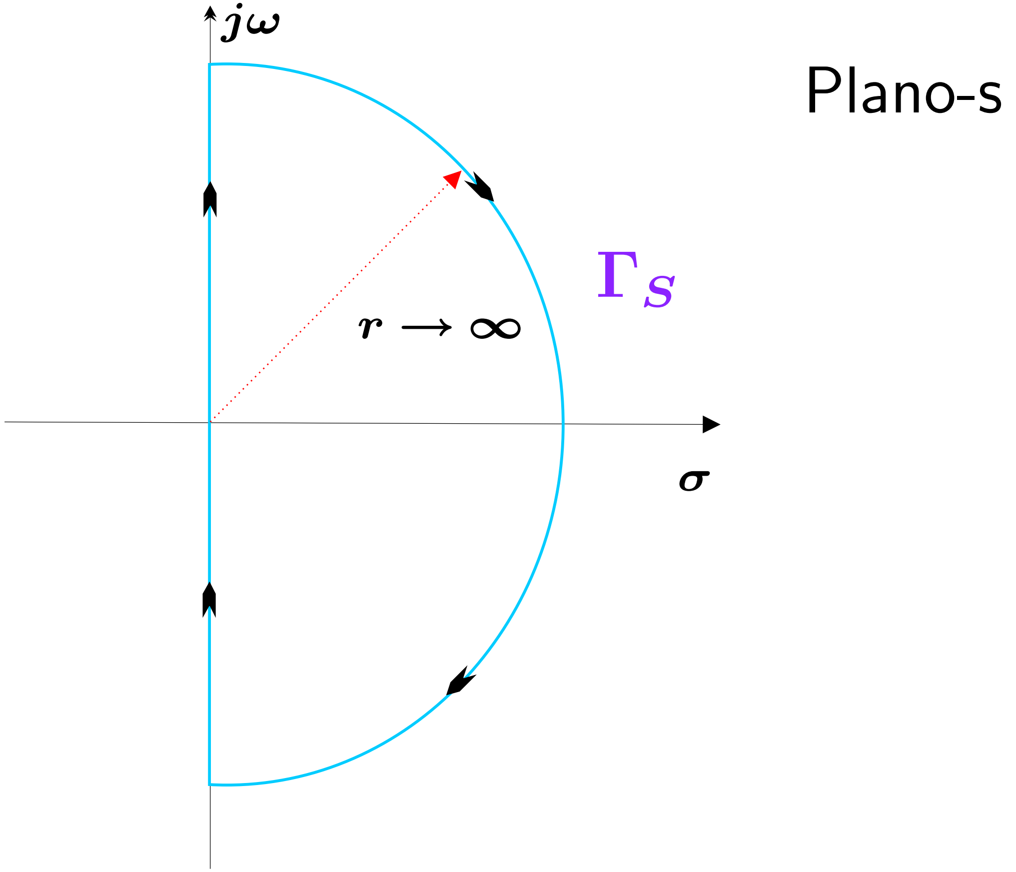
no semi-plano direito fechado (de fato, analisando se o sistema em malha fechada é **instável**)

$\rightsquigarrow$ Como pode ser a escolha de um contorno no plano-s? Basta selecionar um contorno $\boldsymbol{\Gamma_S}$ que envolva todo o semi-plano direito fechado...

$\rightsquigarrow$ A estabilidade é caracterizada determinando-se então o excesso de zeros em relação ao pólos da EC no semi-plano direito traçando $\boldsymbol{KG_c(s)G(s)}$ para todo 's' ao longo do contorno $\boldsymbol{\Gamma_S}$

Critério de Estabilidade de Nyquist

O contorno de Nyquist, $\boldsymbol{\Gamma_S}$, é ilustrado na figura abaixo:



Critério de Estabilidade de Nyquist

▷ Portanto traçando o contorno Γ_F no plano-$F(s)$ e determinando o número de cercos da origem, dado por **N**, obtém-se o número de zeros (instáveis) de $F(s)$ no contorno Γ_S que, pelo teorema de Chauchy, é descrito pela relação:

$$\mathsf{Z} = \mathsf{N} + \mathsf{P}$$

Se **P** $= 0$, então o número de raízes instáveis do sistema é igual a **N**

Critério de Estabilidade de Nyquist

Nota normalmente o ganho de malha $KG_c(s)G(s)$ pode estar na forma fatorada de polinômios, $a(s)/b(s)$. Então pode ser mais **conveniente** considerar uma variação da EC descrita por:

$$F'(s) = F(s) - 1 = KG_c(s)G(s) = 0$$

Desta forma o mapeamento do contorno Γ_S no plano-s será através da função $F'(s)$ para o plano-$F'(s)$ (ou plano-$KG_c(s)G(s)$)

- Número de cercos (no sentido horário) da origem no plano-$F(s)$ corresponde simplesmente ao número de cercos (no sentido horário) do **ponto -1** no plano-$F'(s)$

Critério de Estabilidade de Nyquist

⇝ O critério de Nyquist pode ser especificado da seguinte forma:

"Um sistema realimentado é estável se e somente se o contorno $\Gamma_{F'(s)}$ *no plano-*$F'(s)$ *não envolve o ponto* $(-1, 0)$ *quando o número de pólos de* $KG_c(s)G(s)$ *instáveis no plano-s é nulo* $(\mathbf{P} = 0)$*"*

Quando o número de pólos de $KG_c(s)G(s)$ no lado direito do plano-s é diferente de zero, o critério de Nyquist é posto da seguinte forma:

"Um sistema realimentado é estável se e somente se, para o contorno $\Gamma_{F'(s)}$ *no plano-*$F'(s)$ *o número de cercos no sentido anti-horário do ponto* $(-1, 0)$ *é igual ao número de pólos de* $KG_c(s)G(s)$ *instáveis no plano-s* $(\mathbf{N} = -\mathbf{P})$*"*

Critério de Estabilidade de Nyquist

Exemplo Considere um sistema com ganho de malha

$$GH(s) = \frac{100}{(s+1)(s/10+1)} = \frac{100}{(j\omega+1)(j\omega/10+1)}$$

Para esboçar o diagrama de Nyquist variando ω de 0 a ∞ obtém-se

ω	0	10^{-2}	0.76	2	3.2	10	10^3	∞
$\lvert GH \rvert$	100	100	79.2	43.8	25	7.1	10^{-5}	0
$\angle GH$	0^0	-1^0	-42^0	-75^0	-90^0	-129^0	-179^0	-180^0

É estável pelo critério de Nyquist? veja a figura a seguir...

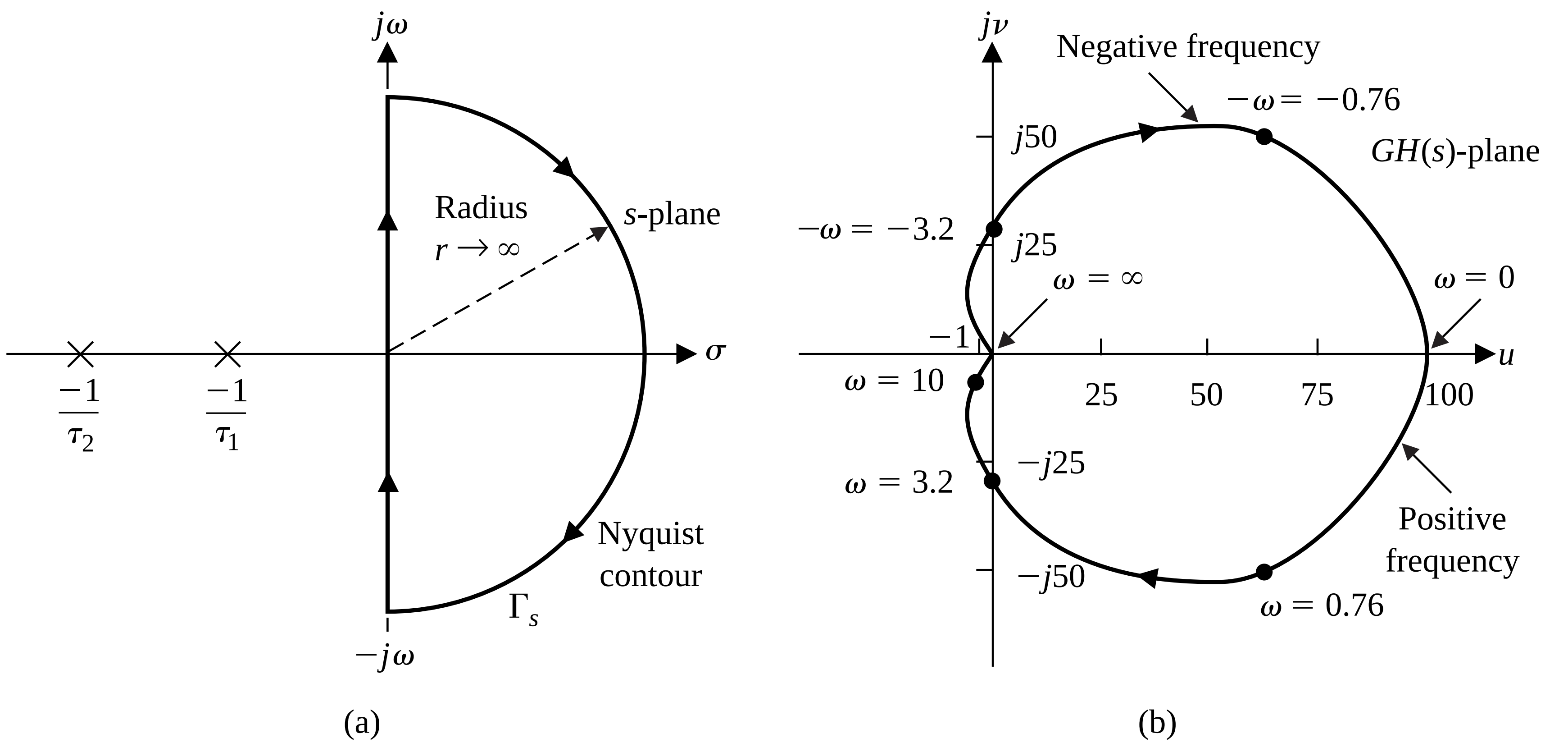


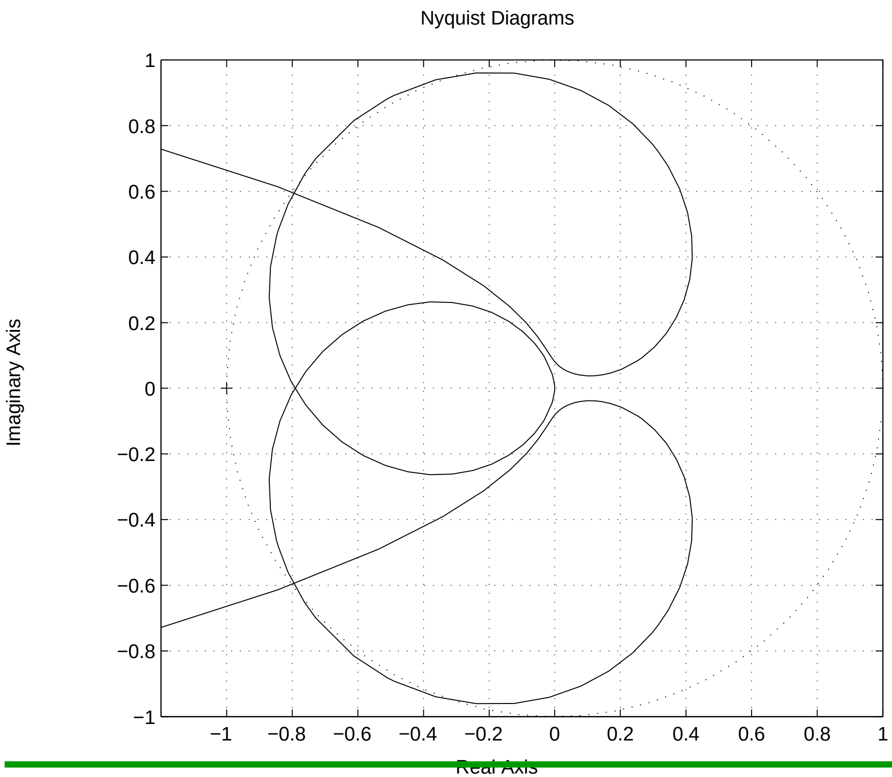
Figure 9.9 Nyquist contour and mapping for $GH(s) = 100/(s + 1)(s/10 + 1)$

Critério de Estabilidade de Nyquist

Exemplo Considere o seguinte ganho de malha:

$$KG_c(s)G(s) = K \times \frac{(s+1)(s^2+2s+43.25)}{s^2(s^2+2s+82)(s^2+2s+101)}$$

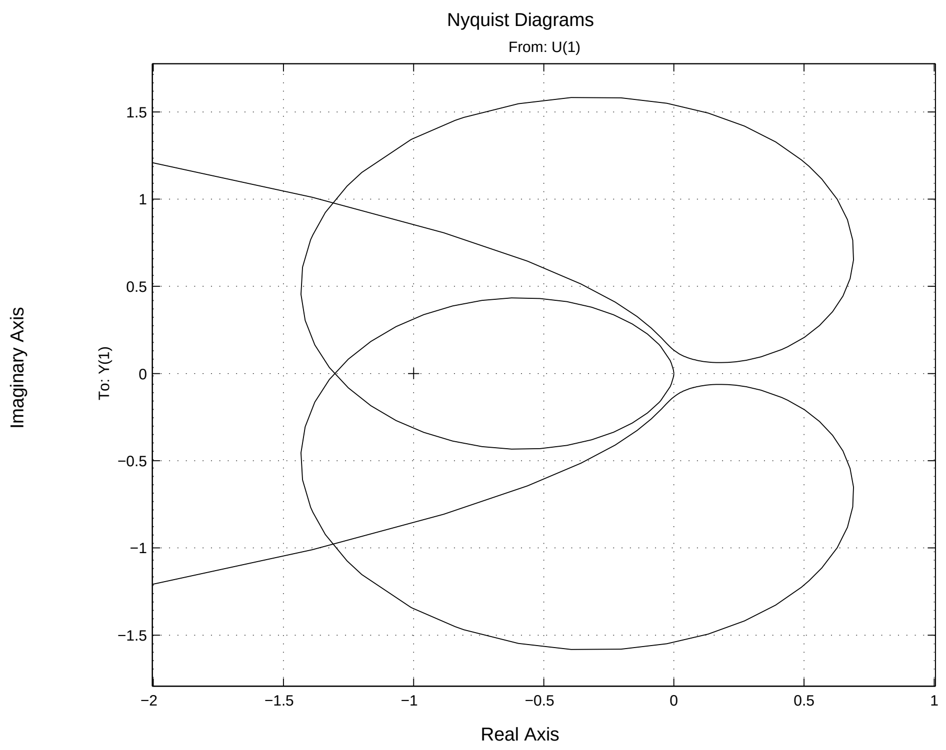
Os pólos são $s_{1,2} = 0$, $s_{3,4} = -1 \pm 10i$ e $s_{5,6} = -1 \pm 9i$. O contorno $\Gamma_{F'}$ no plano-F' é apresentado abaixo para $K = 85$



$$\mathsf{Z} = \mathsf{N} + \mathsf{P} = 0 + 0 = 0$$

Critério de Estabilidade de Nyquist

Por outro lado, considere o ganho estático igual a $\boldsymbol{K = 140}$. O respectivo diagrama de Nyquist é apresentado abaixo

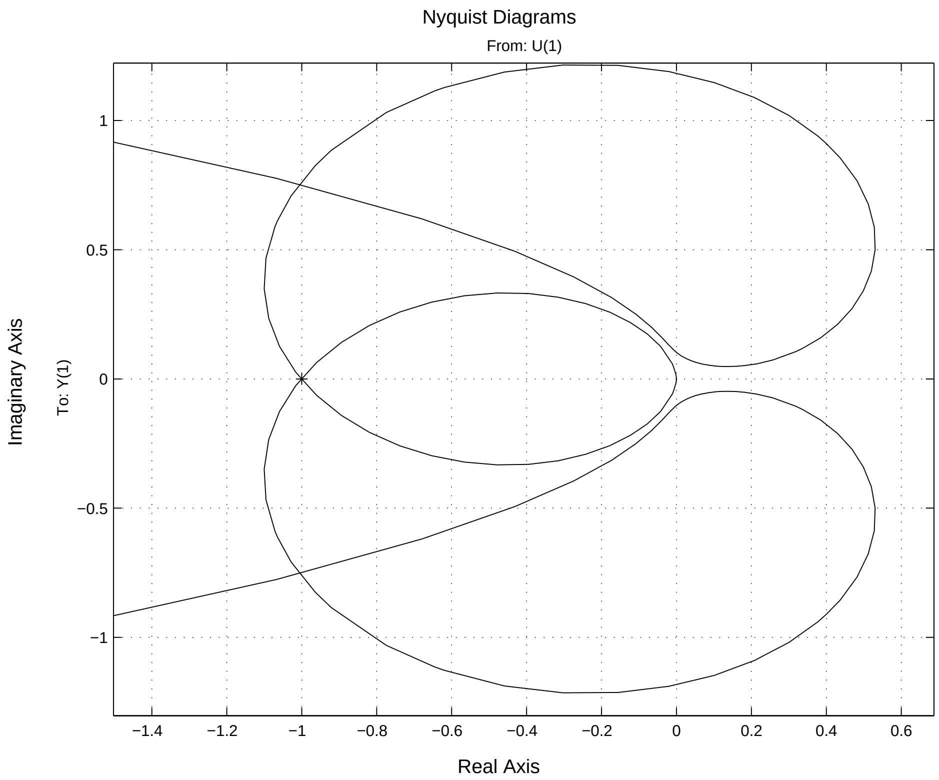


$$\mathbf{Z = N + P = 2 + 0 = 2}$$

- Verificando os pólos em malha fechada obtém-se: $\mathbf{0.1817 \pm 10.4502}\boldsymbol{i}$; $\mathbf{-1.8162 \pm 8.5242}\boldsymbol{i}$; $\mathbf{-0.3655 \pm 0.7721}\boldsymbol{i}$ **(instabilidade!!)**

Critério de Estabilidade de Nyquist

Já escolhendo $\boldsymbol{K = 107.5}$ obtém-se

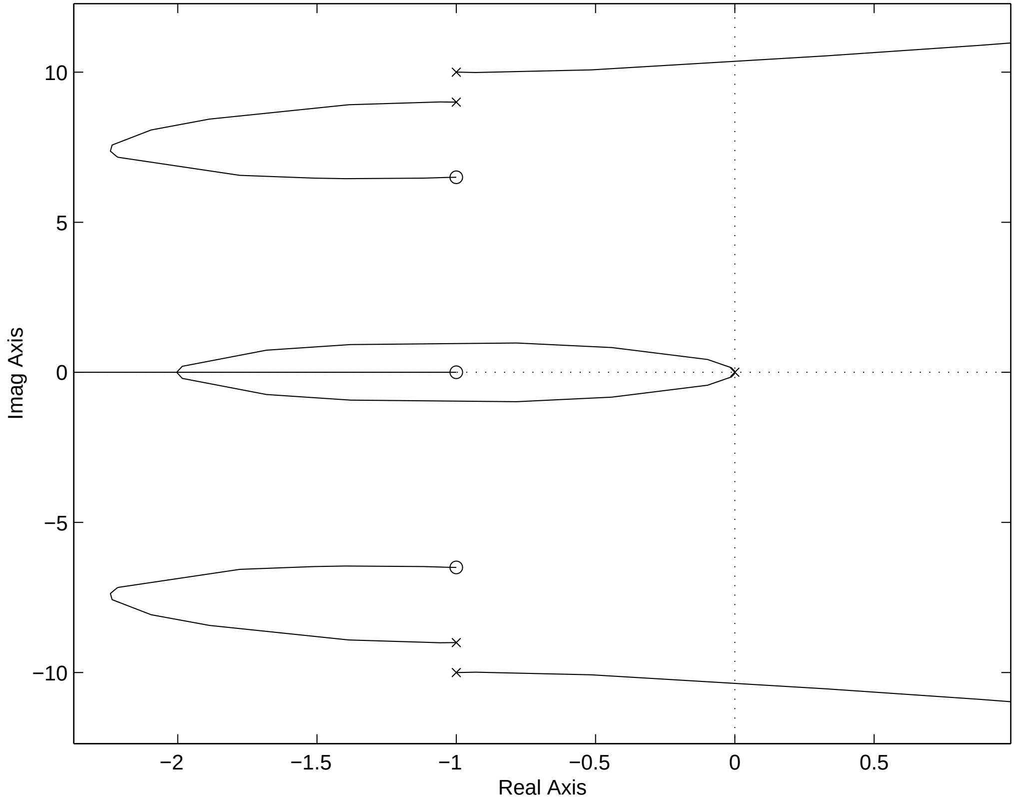


$$\mathsf{Z} = \mathsf{N} + \mathsf{P} = \mathbf{2} + \mathbf{0} = \mathbf{2}$$

- Pólos em malha fechada: $\mathbf{0.0011 \pm 10.3438}\boldsymbol{i}$; $\mathbf{-1.7203 \pm 8.6350}\boldsymbol{i}$; $\mathbf{-0.2808 \pm 0.6940}\boldsymbol{i}$ (Veja que a quase sobreposição do ponto -1 produz zeros próximos ao eixo imaginário)

Critério de Estabilidade de Nyquist

Para ilustrar a efetividade da análise pelo diagrama de Nyquist, considere o lugar das raízes para o ganho de malha



▷ Para K crescente o sistema se torna instável...