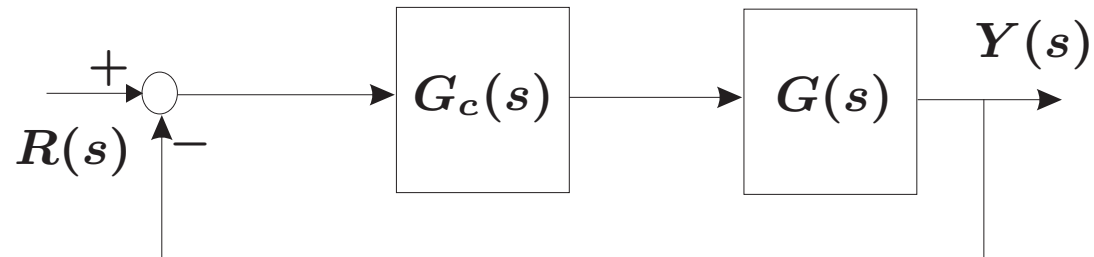


Estabilidade no Domínio da Frequência

1. Exemplos de Traçados de Diagrama de Nyquist
 - 1.1 Sistema de 2a. ordem com um polo na origem (integrador)
 - 1.2 Sistema com três polos (sendo um integrador)
 - 1.3 Sistema de 3a. ordem com dois polos na origem (dois integradores)
 - 1.4 Sistema com um zero no semi-plano direito (fase não-mínima)
 - 1.5 Sistema com integrador e um polo no semi-plano direito

Relembrando

Para a configuração do sistema de controle com realimentação negativa e unitária:



A FT em malha fechada é dada por: $T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$

E o **ganho em malha** é descrito por $L(s) = G_c(s)G(s)$ (vamos adotar $L(s)$ como a notação padrão para o ganho em malha)

Nota: Lembre-se que o critério de estabilidade de Nyquist foi estabelecido para o ganho em malha $L(s)$ e a análise então é em relação ao ponto $(-1,0)$

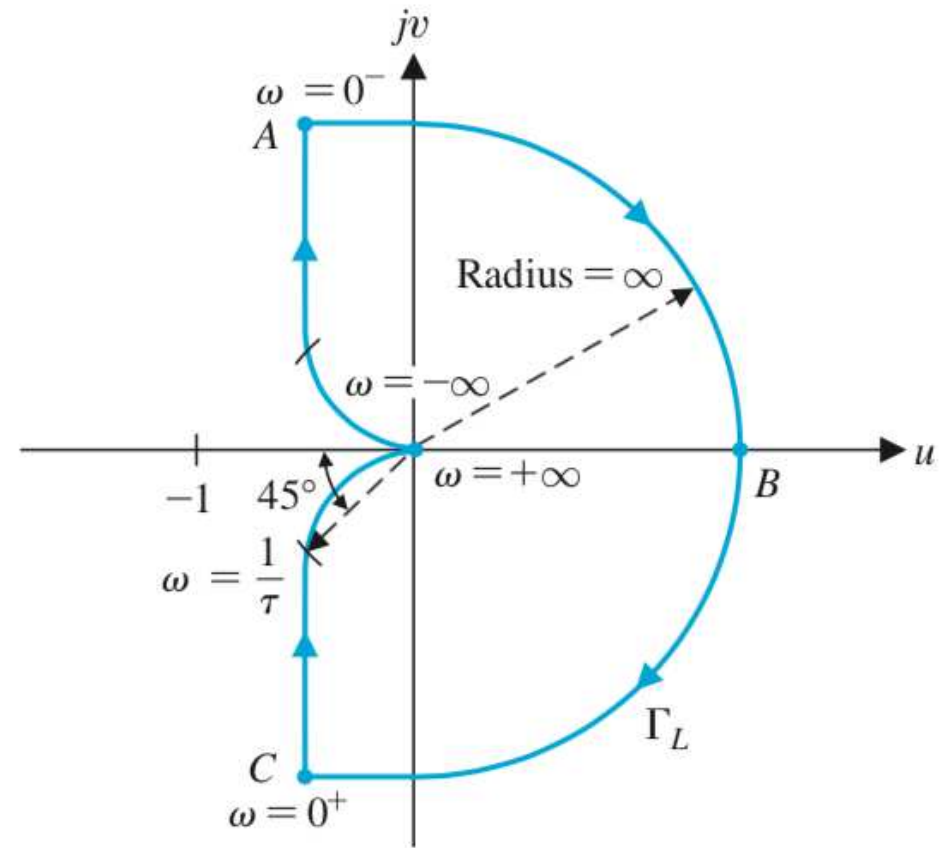
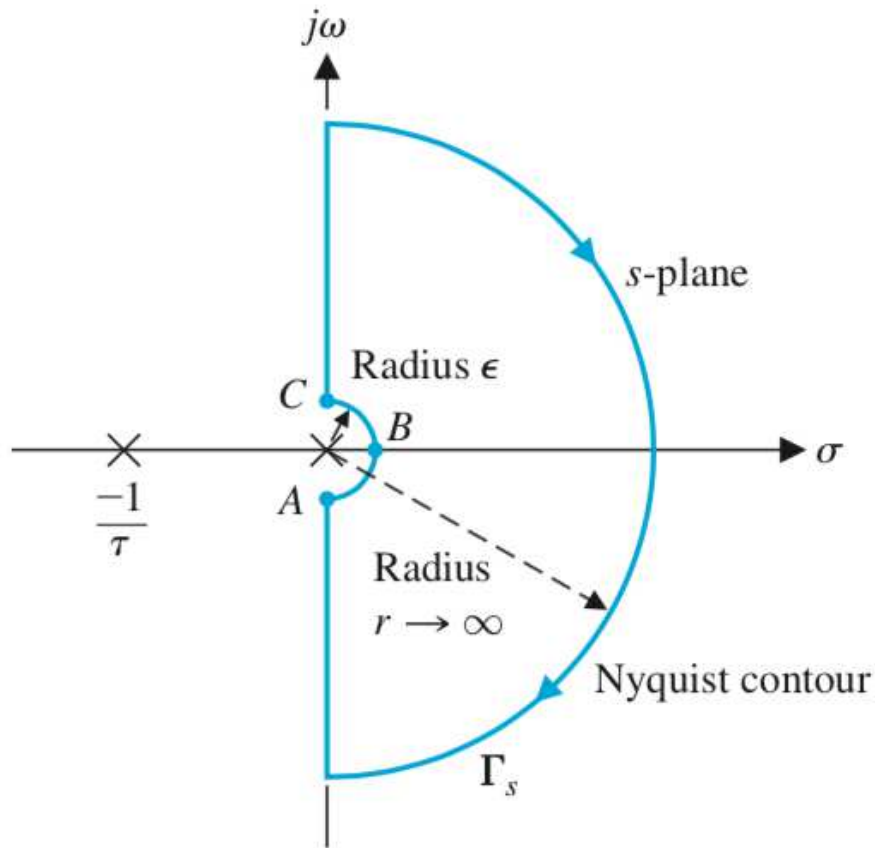
Sistema com um polo na origem

Considere o ganho em malha contendo um **integrador** e um **polo real** no semi-plano esquerdo **com ganho K variável**:

$$L(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

Naturalmente ao considerar o Teorema de Cauchy, a questão nevrálgica que se coloca é que o contorno escolhido não pode cruzar nenhum polo ou zero da função (que é o ganho em malha). Portanto, é necessário fazer um desvio ao redor do ponto singular, que neste caso é o integrador (polo na origem). Pode-se então considerar no contorno um desvio infinitesimal ao redor do polo na origem, considerando um semi-círculo de raio ϵ com $\epsilon \rightarrow 0$, e ilustrado na figura (a) a seguir

O contorno Γ_S no plano-s desvia do integrador



Sistema de 2a. ordem com um polo na origem

Da figura (b) anterior, tem-se uma ideia geral do traçado do diagrama de Nyquist.

Faça o traçado por partes!

▷ Por exemplo, partindo do mapeamento do contorno original Γ_S (que desvia do polo na origem) dado em (a), **considere todas as frequências entre $\omega = 0^+$ até $\omega = +\infty$** (que percorre o eixo vertical em $+j\omega$). Cada frequência neste intervalo será mapeada pelo ganho em malha

$$L(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)(\tau j\omega + 1)}$$

▷ Note que para $\omega = 0^+$ obtém-se módulo: $|L(j\omega)| \rightarrow \infty$, com fase igual a -90° (que é a combinação em fase, em baixas frequências, do: integrador que contribui com -90° ; do polo real que contribui com fase de 0° ; e do ganho K que contribui com fase de 0°)

Sistema de 2a. ordem com um polo na origem

▷ Para $\omega = +\infty$ tem-se módulo: $|L(j\omega)| = \frac{K}{(j\omega)(\tau j\omega + 1)} \rightarrow 0$

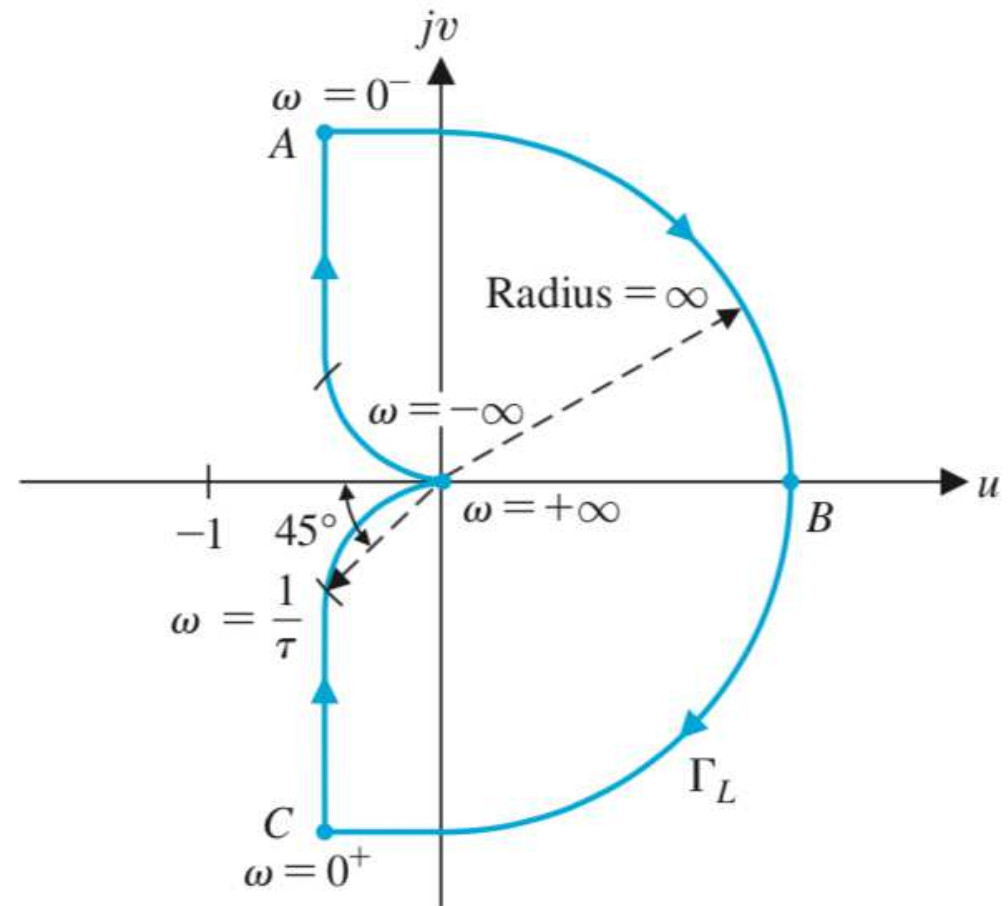
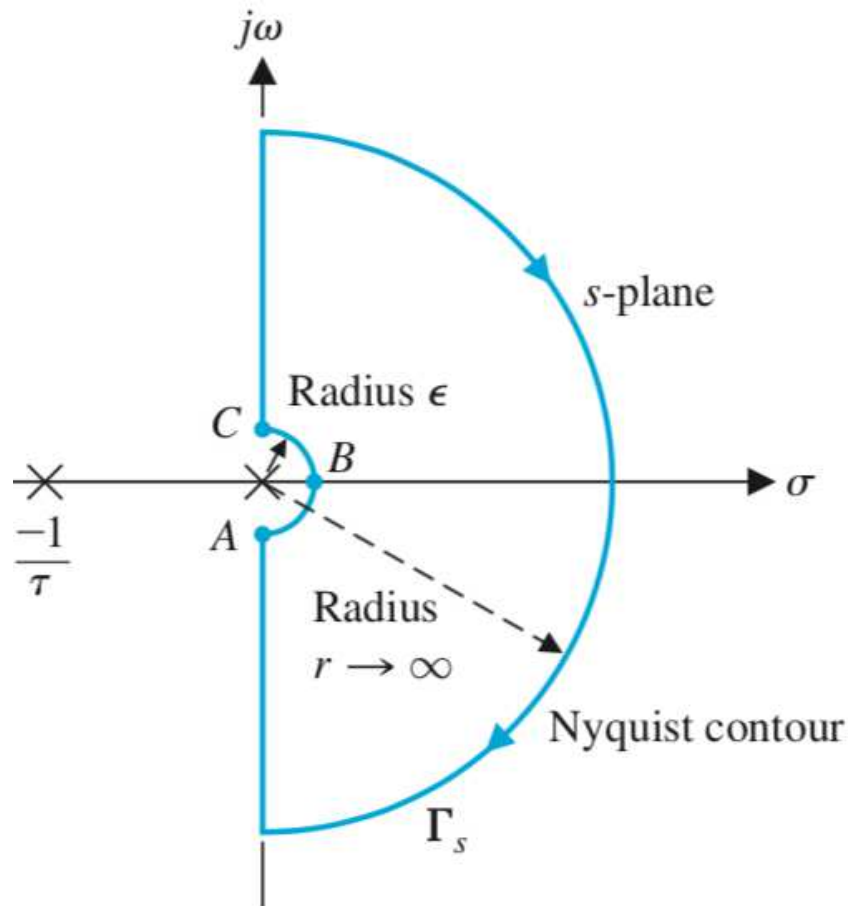
com fase de -180^0 (o integrador contribui em altas frequências com fase de -90^0 ; o polo real contribui com fase -90^0 ; e o ganho K com fase 0^0)

▷ Note ainda que na frequência de corte $\omega = 1/\tau$, o polo real contribui com fase de -45^0 , o integrador contribui com fase de -90^0 e o ganho K com fase de 0^0 . Nesta frequência a fase "total" é -135^0 com módulo finito (é irrelevante o valor do módulo neste momento)

▷ Esta análise resulta no seguimento, descrito na figura (b) da pag. 4, entre o ponto "C" e a origem no diagrama de Nyquist. **Lembre-se que o mapeamento é simétrico em relação ao eixo real (então para o traçado entre $\omega = -\infty$ até $\omega = 0^-$ basta "rebater" o trecho obtido acima, que na figura (a) da pag. 4 representa a origem até o ponto "A")**

Trecho entre $\omega = 0^-$ e $\omega = 0^+$ em Γ_S ?

No contorno Γ_S , note que em $\omega = 0^-$ a fase é -90° (Ponto A). No Ponto B a fase é 0° . Em $\omega = 0^+$ a fase é 90° (Ponto C)



Trecho entre $\omega = 0^-$ e $\omega = 0^+$ em Γ_S ?

Represente a origem da forma polar $s = \epsilon e^{j\phi}$. Faça a fase ϕ variar de -90° em $\omega = 0^-$ (Ponto A, na figura anterior para Γ_S), passando por 0° no Ponto B e alcançando 90° quando $\omega = 0^+$ (Ponto C)

Particularmente fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtém-se o módulo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L(j\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon e^{j\phi} (\epsilon e^{j\phi} \tau + 1)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon e^{j\phi}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon} e^{-j\phi} \rightarrow \infty$$

Note que o mapeamento irá "rebater" a fase no contorno Γ_S devido a troca de sinal em $e^{-j\phi}$, quando $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto, ao mapear o Ponto A (que tem fase de -90° em $\omega = 0^-$), irá gerar no diagrama de Nyquist um ponto com fase de $+90^\circ$ e magnitude ∞ . O Ponto B será mapeado com fase de 0° e módulo ∞ . O Ponto C (que em $\omega = 0^+$ tem fase de $+90^\circ$), será mapeado com fase de -90° e módulo ∞ . O traçado no Diagrama de Nyquist está na figura (b) da pag. 4

Sistema com um polo na origem

▷ Note também que a magnitude de $L(s)$ se aproxima de zero ao escrever "s" na forma polar, $s = re^{j\phi}$, e o raio do contorno Γ_S no plano-s tende a infinito, conforme descrito na figura (a) da pag. 4. Curiosamente, quando $r \rightarrow \infty$, normalmente o módulo se aproxima de zero ou de uma constante (depende da composição do ganho em malha $L(s)$)

Crítério de Nyquist – Para checar se o sistema é estável, note que o número de polos de $L(s)$ no semi-plano direito no plano-s é zero, portanto $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Veja que o traçado do diagrama de Nyquist não envolve o ponto -1 , então $\mathbf{N} = \mathbf{0}$. Logo:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} + \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

i.e., não há zeros no semi-plano direito no plano-s e o sistema em malha fechada é estável

Curiosidade – Como seria o Lugar das Raízes para $L(s)$? O que se aprende disso?

Sistema de 3a. ordem com integrador

Considere o ganho em malha contendo um **integrador** e dois polos reais no semi-plano esquerdo com **ganho K variável**:

$$L(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

Assim como no caso anterior, ao considerar o Teorema de Cauchy o contorno escolhido não pode cruzar nenhum polo ou zero do ganho em malha. Sendo assim, é necessário também fazer um desvio ao redor do integrador (polo na origem) no plano- s . Repetindo os passos do caso anterior, o desvio infinitesimal ao redor do polo na origem é um semi-círculo de raio ϵ , com $\epsilon \rightarrow 0$, conforme ilustrado na figura (a) da pag. 4 para o contorno Γ_S

Sistema de 3a. ordem com integrador

- ▷ Primeiramente note que o semi-círculo no contorno Γ_S no plano- s denotado por $s = re^{j\phi}$, quando $r \rightarrow \infty$, irá mapear em Γ_L o módulo $|L(j\omega)| \rightarrow 0$
- ▷ Note ainda, como no exemplo anterior, que tem-se o mesmo mapeamento do semi-círculo ao redor da origem no plano- s , para ω variando entre 0^- e 0^+
- ▷ Resta portanto checar o traçado da parcela em Γ_L que corresponde a variação para $0^+ < \omega < +\infty$ no contorno Γ_S no plano- s . Do ganho em malha tem-se:

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)} = \frac{-K(\tau_1 + \tau_2) - jK(1/\omega)(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)}{1 + \omega^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \omega^4\tau_1^2\tau_2^2}$$

sendo:

$$|L(j\omega)| = \frac{K}{[\omega^4(\tau_1 + \tau_2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)^2]^{1/2}}$$
$$\angle L(j\omega) = \angle -90^0 - \tan^{-1}(\omega\tau_1) - \tan^{-1}(\omega\tau_2)$$

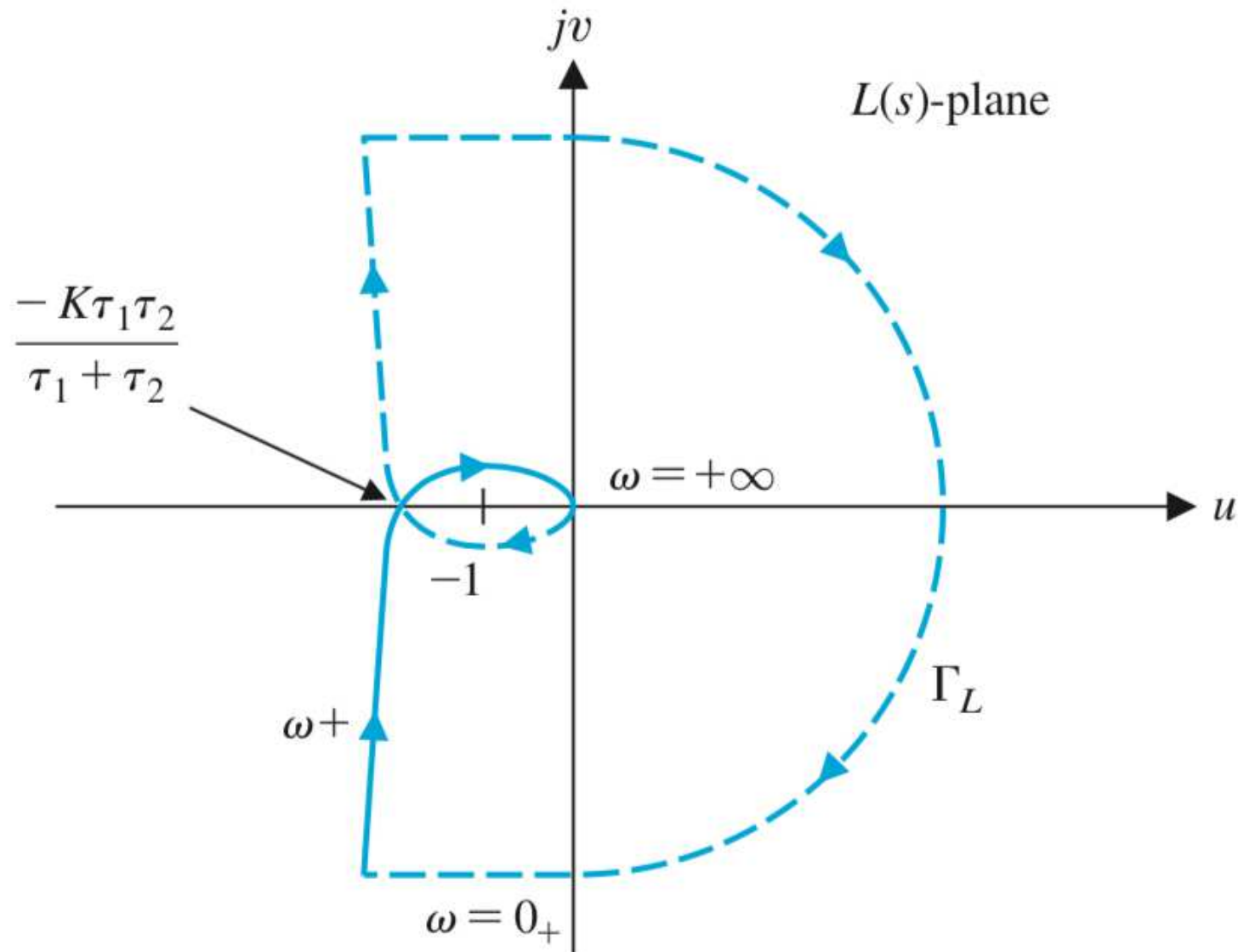
Sistema de 3a. ordem com integrador

- ▷ É fácil notar a partir do módulo $|L(j\omega)|$ que quando $\omega = 0^+$, a magnitude tende a infinito com fase de -90^0 (segue diretamente de $\angle L(j\omega)$)
- ▷ Quando $\omega \rightarrow +\infty$, tem-se:

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow \infty} L(j\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{K}{\omega^3 \tau_1 \tau_2} \right| \underline{\angle -90^0 - \tan^{-1}(\omega \tau_1) - \tan^{-1}(\omega \tau_2)} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{K}{\omega^3 \tau_1 \tau_2} \right| \underline{\angle -270^0}\end{aligned}$$

Isto é, quando $\omega \rightarrow +\infty$ então $|L(j\omega)| \rightarrow 0$ com ângulo de -270^0 . Portanto espera-se que o contorno Γ_L cruze o eixo real (eixo u) no diagrama de Nyquist. Sendo assim, **é possível que o contorno Γ_L envolva o ponto -1** . Depende apenas do ganho K escolhido (já que os polos estão fixos). Vide esboço a seguir...

Estável? Instável? Depende se $N \neq 0$, pois $P = 0...$



Ponto onde Γ_L cruza o eixo real (eixo- u)?

▷ Primeiramente cheque onde a parte imaginária de $L(j\omega)$ se anula, i.e., $L(j\omega) = u + jv = 0$ ou:

$$v = \frac{K(1/\omega)(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)}{1 + \omega^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \omega^4\tau_1^2\tau_2^2} = 0$$

Portanto $v = 0$ quando $1 - \omega^2\tau_1\tau_2 = 0$ ou $\omega = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$

▷ Na frequência $\omega = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$, calcula-se a magnitude da parte real, i.e.:

$$u = \frac{-K(\tau_1 + \tau_2)}{1 + \omega^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \omega^4\tau_1^2\tau_2^2} \Bigg|_{\omega^2 = \frac{1}{\tau_1\tau_2}} = \frac{-K\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$$

Ponto onde Γ_L cruza o eixo real (eixo- u)?

▷ Claramente o sistema será estável se não envolver o ponto -1 , (pois teremos $N = 0$ e, como $P = 0$, então $Z = N + P = 0$). Para este caso, basta que a condição abaixo seja garantida ao se querer impor estabilidade:

$$\frac{-K\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} > -1, \quad \text{ou} \quad K < \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}$$

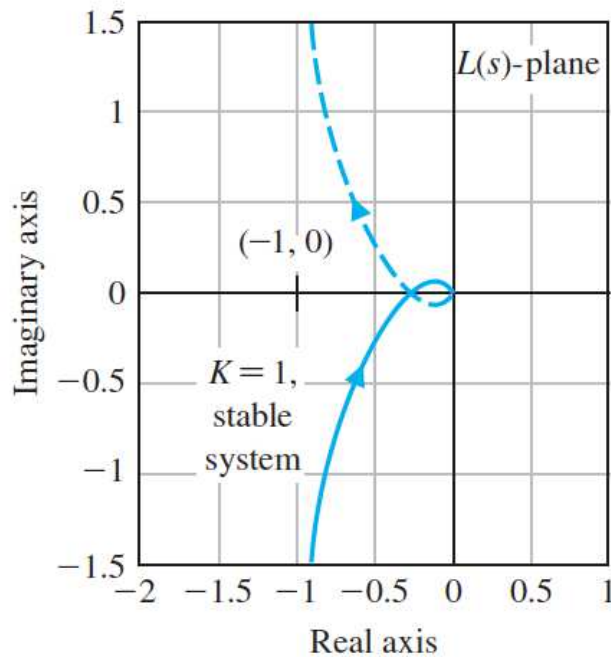
Note que o sistema será marginalmente estável se $K = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}$

▷ **Exemplificando:** se $\tau_1 = \tau_2 = 1$, então o ganho em malha é dado por

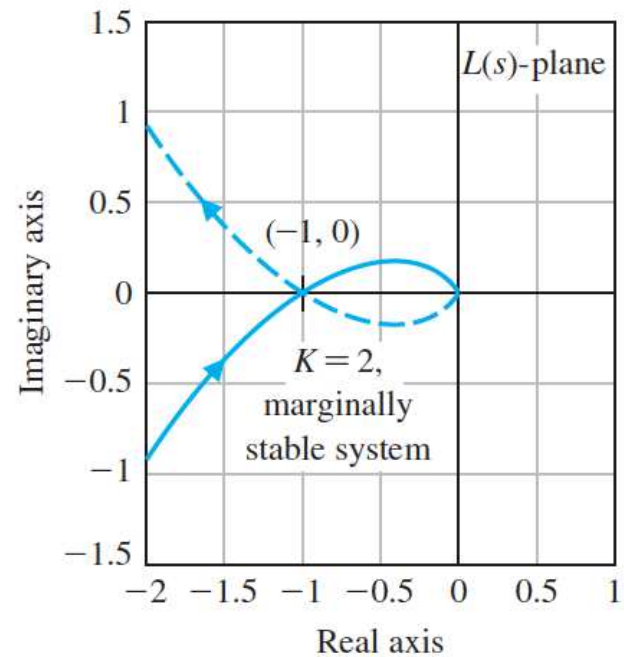
$$L(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}$$

e o sistema é estável quando $K < 2$. Vide cenários a seguir...

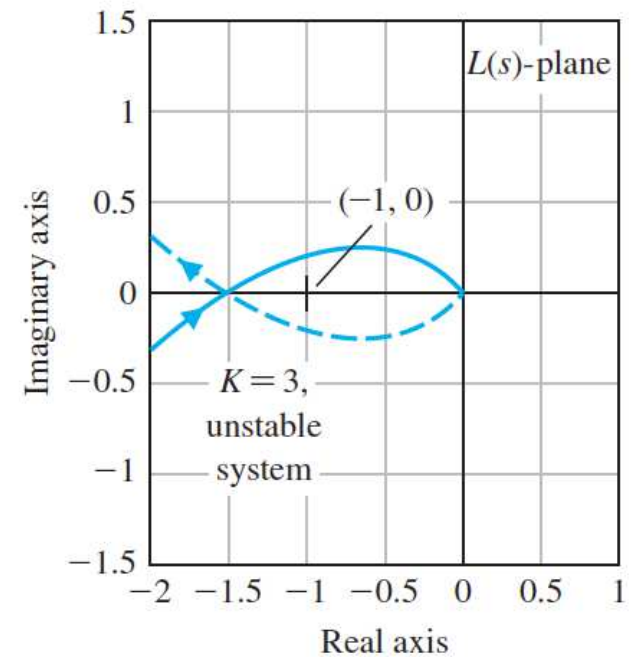
K variando. Estável? Instável? Depende se $N \neq 0...$



(a)



(b)



(c)

Sistema de 3a. ordem com dois polos na origem

Considere o ganho em malha com **dois integradores**, um polo real no semi-plano esquerdo e ganho K variável:

$$L(s) = \frac{K}{s^2(\tau s + 1)}$$

a mesma discussão dos casos anteriores considerando polo na origem se aplica aqui. Considere o contorno no plano- s (Γ_s) descrito na figura (a) da pag. 4

▷ Fazendo $s = j\omega$ tem-se:

$$L(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2(j\omega + 1)} = \frac{K}{[\omega^4 + \tau^2\omega^6]^{1/2}} \angle -90^\circ - 90^\circ - \tan^{-1}(\omega\tau)$$

Sistema de 3a. ordem com dois polos na origem

▷ Para mapear a variação entre $0^+ < \omega < +\infty$ do contorno Γ_S no plano- s para o diagrama de Nyquist, note que da relação de fase anterior tem-se que o ângulo é no mínimo -180^0 ou menor. Portanto quando $\omega \rightarrow 0^+$ tem-se:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} L(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left| \frac{K}{\omega^2} \right| \angle -180^0$$

Em $\omega \rightarrow 0^+$ o ângulo é -180^0 e a magnitude tende a ∞

Quando $\omega \rightarrow +\infty$, tem-se:
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} L(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{K}{\omega^3} \right| \angle -270^0$$

Então quando $\omega \rightarrow +\infty$ o ângulo é -270^0 e a magnitude tende a 0

Sistema de 3a. ordem com dois polos na origem

▷ Para mapear o semi-círculo ao redor da origem do contorno Γ_S no plano- s (figura (a), pag. 4) fazendo ω variar de 0^- até 0^+ considera-se $s = \epsilon e^{j\phi}$ ($\epsilon \rightarrow 0$ é o raio do semi-círculo). Note então que tem-se

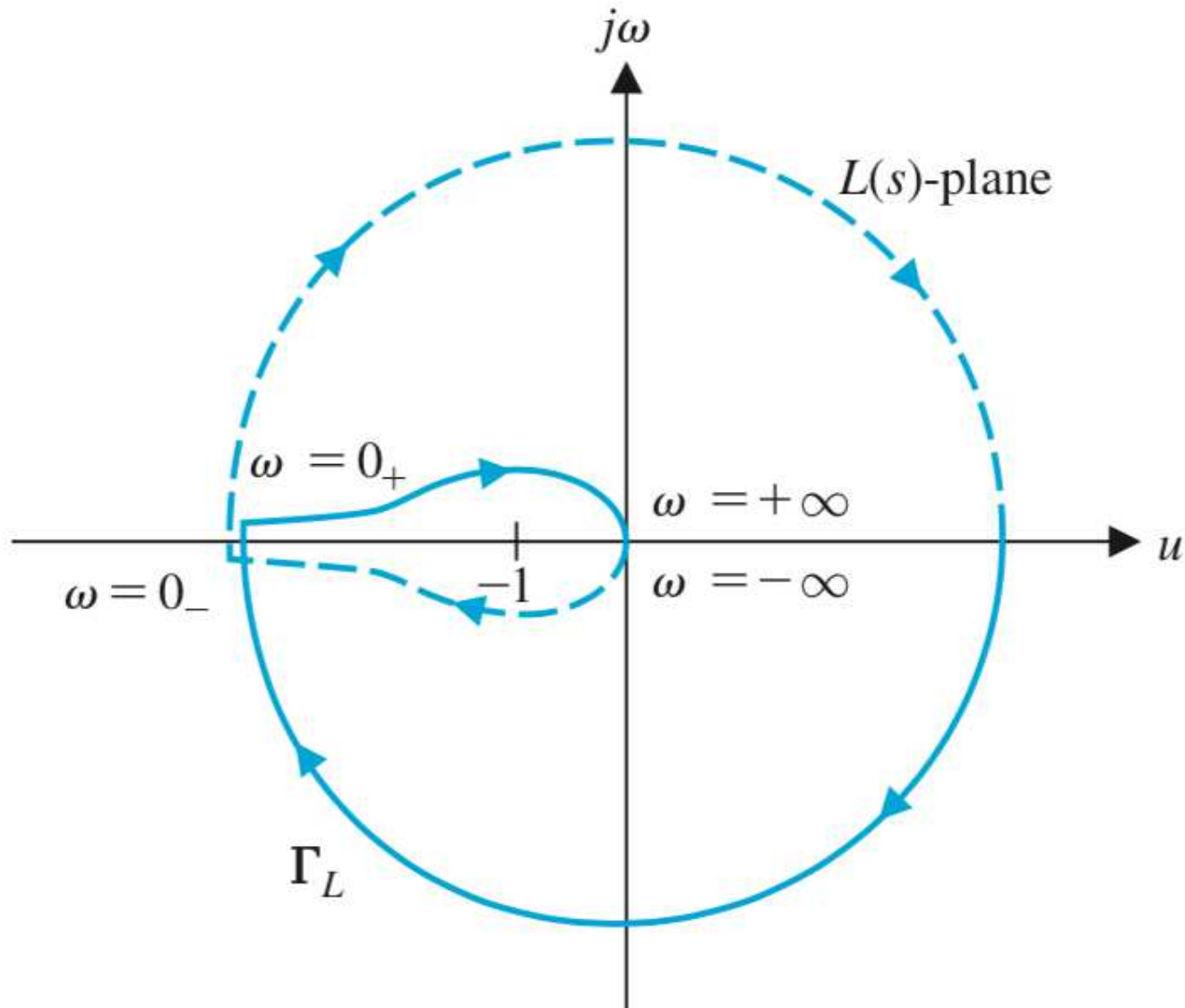
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon^2 e^{2j\phi}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon^2} e^{-2j\phi}$$

No semi-círculo variando de -90^0 (em $\omega = 0^-$), passando por 0^0 até 90^0 (em $\omega = 0^+$), gera-se no diagrama de Nyquist a variação de ângulo de $+180^0$ em $\omega = 0^-$ (p/ $e^{-2j\phi}$); 0^0 entre $\omega = 0^-$ e $\omega = 0^+$ e -180^0 em $\omega = 0^+$

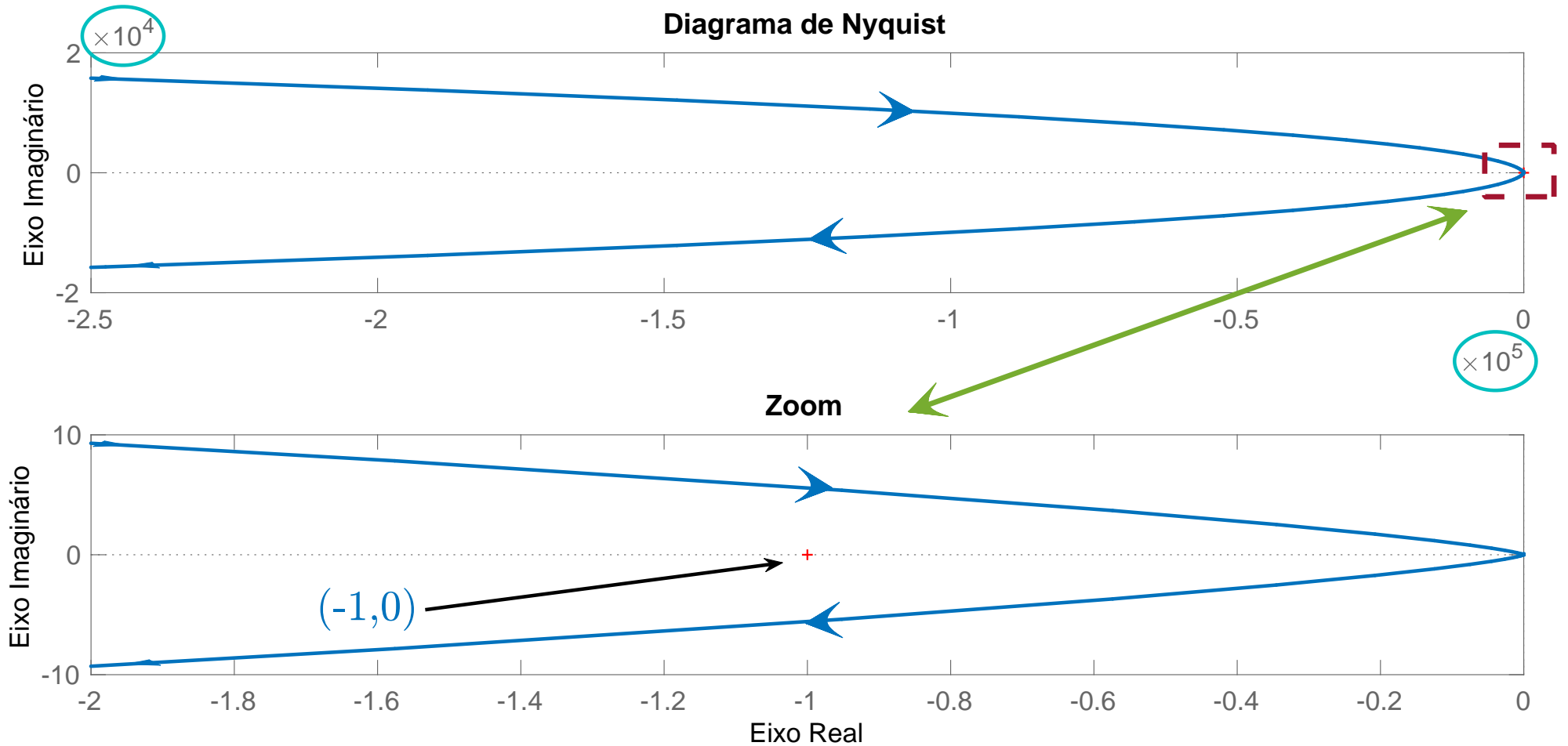
▷ O contorno Γ_L no diagrama de Nyquist é apresentado a seguir e o contorno envolve o ponto $= -1$ duas vezes... Então $\mathbf{N} = 2$

▷ Como $\mathbf{P} = 0$, tem-se $\mathbf{Z} = 2$. Portanto **o sistema em malha fechada é instável independentemente do ganho K**

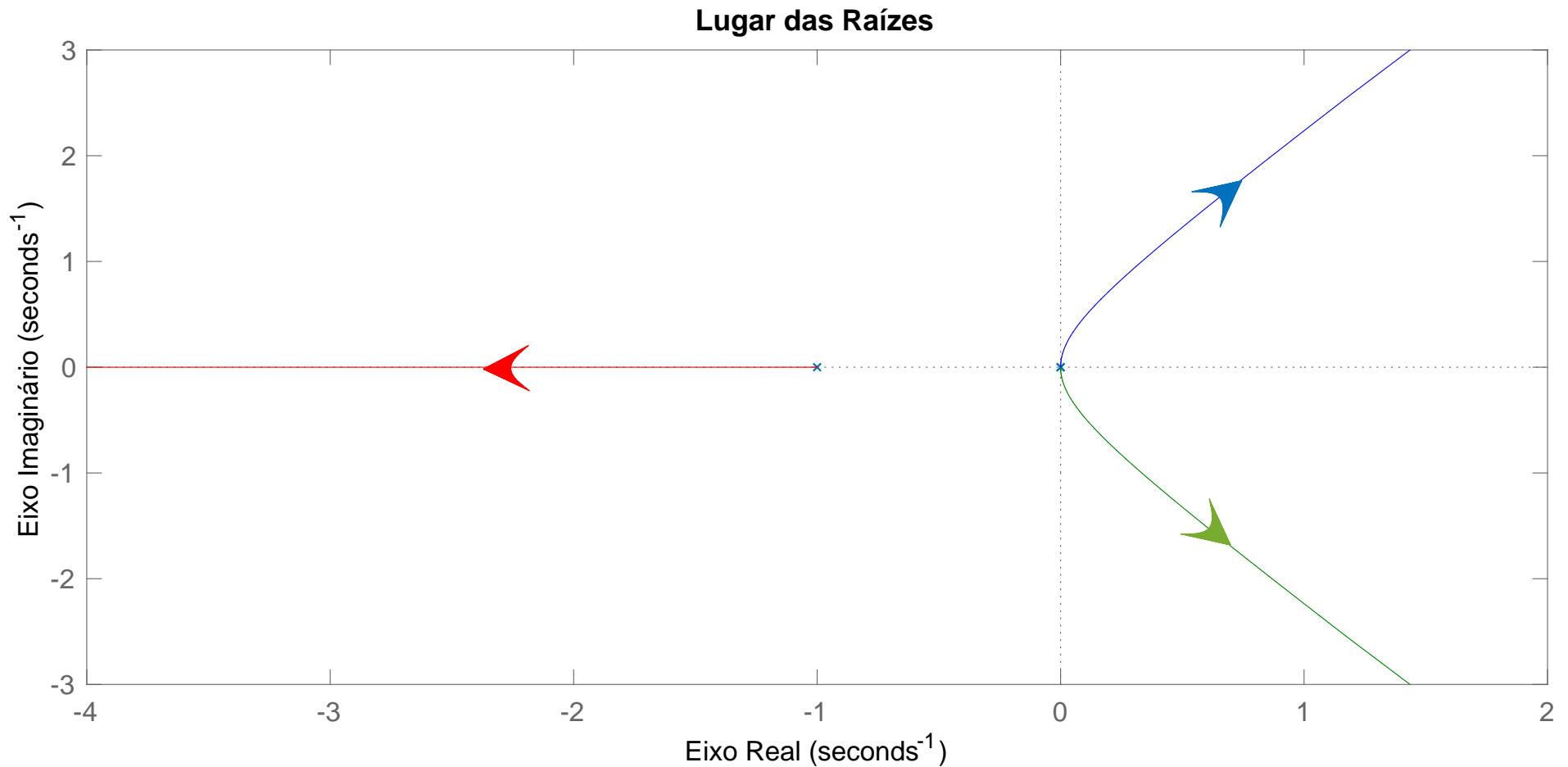
Sistema de 3a. ordem com dois polos na origem



Matlab – $P/K = 10$ e $\tau = 1$: $L(s) = \frac{10}{s^2(s+1)}$



Lugar das Raízes? Instável $\forall K...$



Sistema com um zero no semi-plano direito

Considere o ganho em malha da forma abaixo com K variável:

$$L(s) = \frac{K(s - 2)}{(s + 1)^2}$$

▷ Fazendo $s = j\omega$, tem-se: $L(j\omega) = \frac{K(j\omega - 2)}{(j\omega + 1)^2} = \frac{K(j\omega - 2)}{(1 - \omega^2) + 2j\omega}$

▷ Para $\omega = 0^+$, tem-se no diagrama de Nyquist:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} L(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{K(j\omega^0 - 2)}{(1 - \omega^2)^0 + 2j\omega^0} = -2K$$

Note que a fase em cada frequência é fruto da composição de dois polos (estáveis) e um zero (no semi-plano direito - sistema de fase não-mínima). Portanto, em $\omega = 0^+$ tem-se ângulo de 180^0 , que é a combinação de:

$$180^0 + \tan^{-1}(-2\omega^0) - 2 \tan^{-1}(1\omega^0)$$

Sistema com um zero no semi-plano direito

▷ Note que para $\omega \rightarrow +\infty$ obtém-se módulo: $|L(j\omega)| \rightarrow 0$, com fase de -90° . Que é a combinação em fase de:

$$180^\circ + \tan^{-1}(-2\omega) - 2 \tan^{-1}(1\omega) = 180^\circ - 90^\circ - 180^\circ$$

▷ Observe que tem-se variação de fase de 180° quando $\omega = 0^+$, até -90° quando $\omega = +\infty$, com a magnitude alterando de $-2K$ a 0 . Então o contorno no diagrama de Nyquist irá cruzar o eixo real 3 vezes: em $-2K$ (com fase de 180°), em 0 (com fase de -90°) e em outro ponto quando a fase for 0° (transição de mudança de sinal na fase...). Pode-se calcular a frequência na qual a parte imaginária no eixo- v é nula: $\tilde{\omega} = \sqrt{5}$, com $L(j\tilde{\omega}) = K/2$

▷ Particularmente quando $K = 1/2$, o contorno cruza o ponto -1 (basta fazer $-2K = -1$ quando $\phi = +180^\circ$ e $\omega = 0^+$ (Marginalmente estável))

▷ O traçado do diagrama para $K = 1$ é apresentado na sequência e pode-se notar que quando $K > 1/2$, $N = 1$ e $Z = 1 + 0$ (instável)

$P/K > \frac{1}{2}$, $N = 1$ (com $P=0$) $\therefore Z = 1$ (instável)

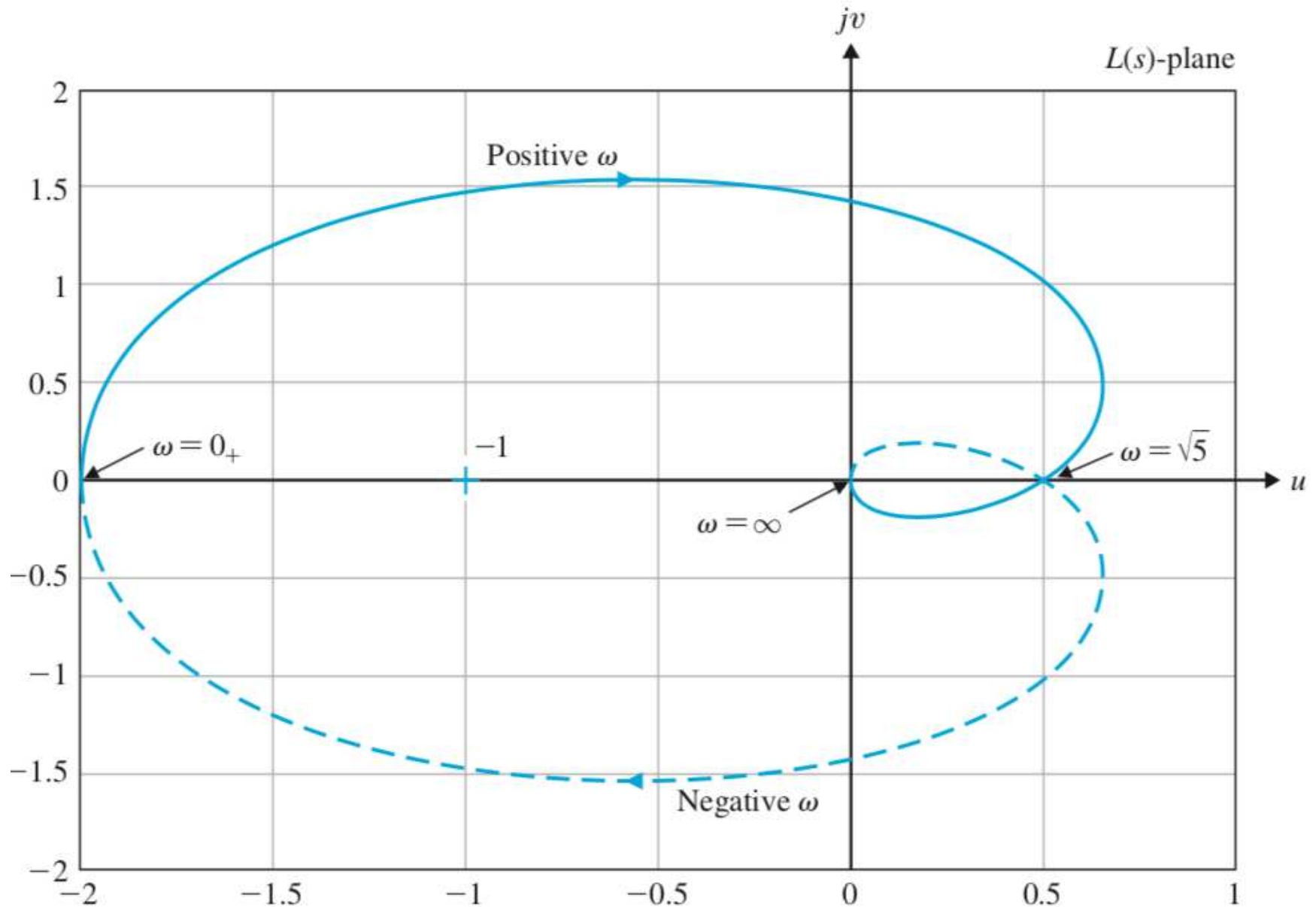


Diagrama de Nyquist para $K = \frac{1}{2}$ e $K = 0.4$

Diagrama de Nyquist para $K = 0.5$

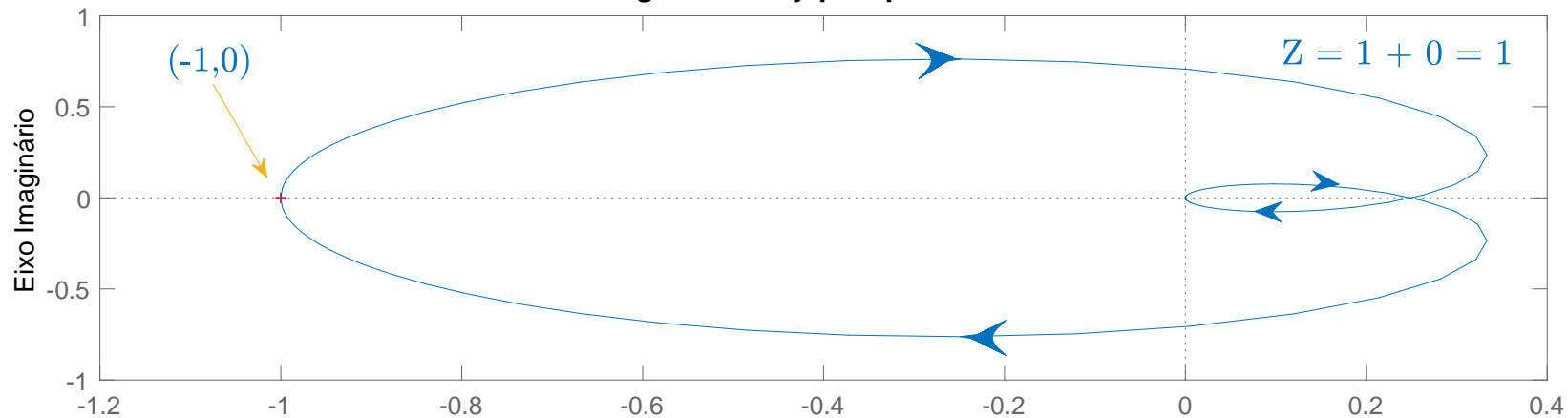
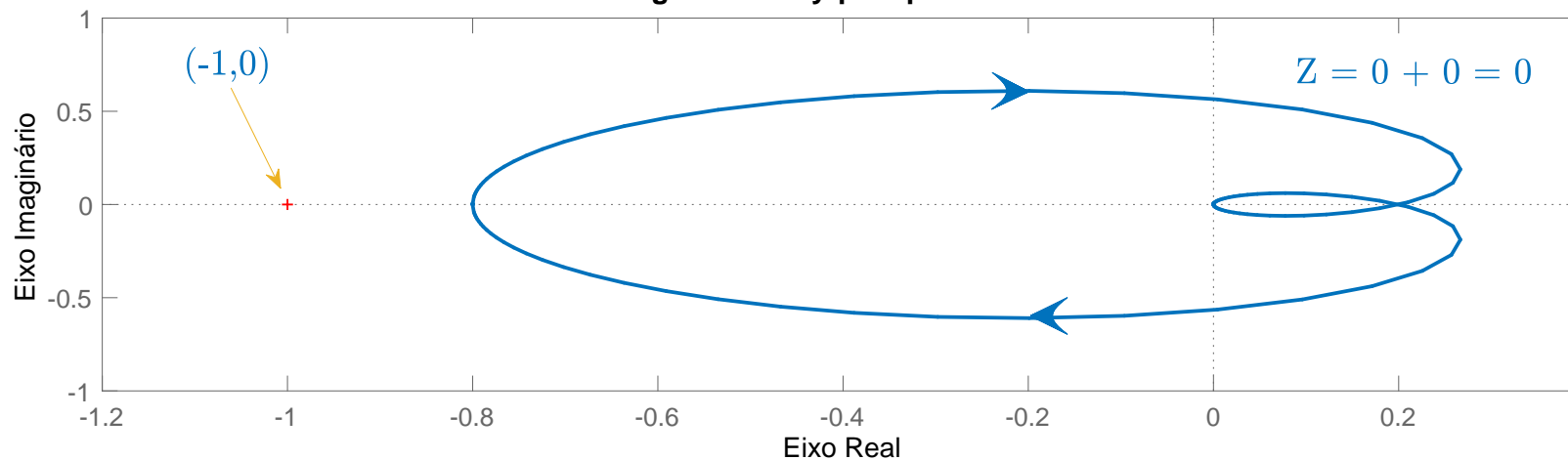


Diagrama de Nyquist para $K = 0.4$



Sistema com um polo no semi-plano direito

Considere o ganho em malha da forma abaixo e K variável:

$$L(s) = \frac{K}{s(s-1)}$$

com um polo no semi-plano direito do plano- s . Portanto, neste caso, $\mathbf{P} = 1$

▷ Note que o sistema será estável se o contorno no diagrama de Nyquist envolver o ponto -1 uma única vez e, somente se, for no sentido anti-horário, tal que $\mathbf{N} = -1$ e, por consequência: $\mathbf{Z} = -1 + 1 = 0$. Caso contrário, será instável

Sistema com um polo no semi-plano direito

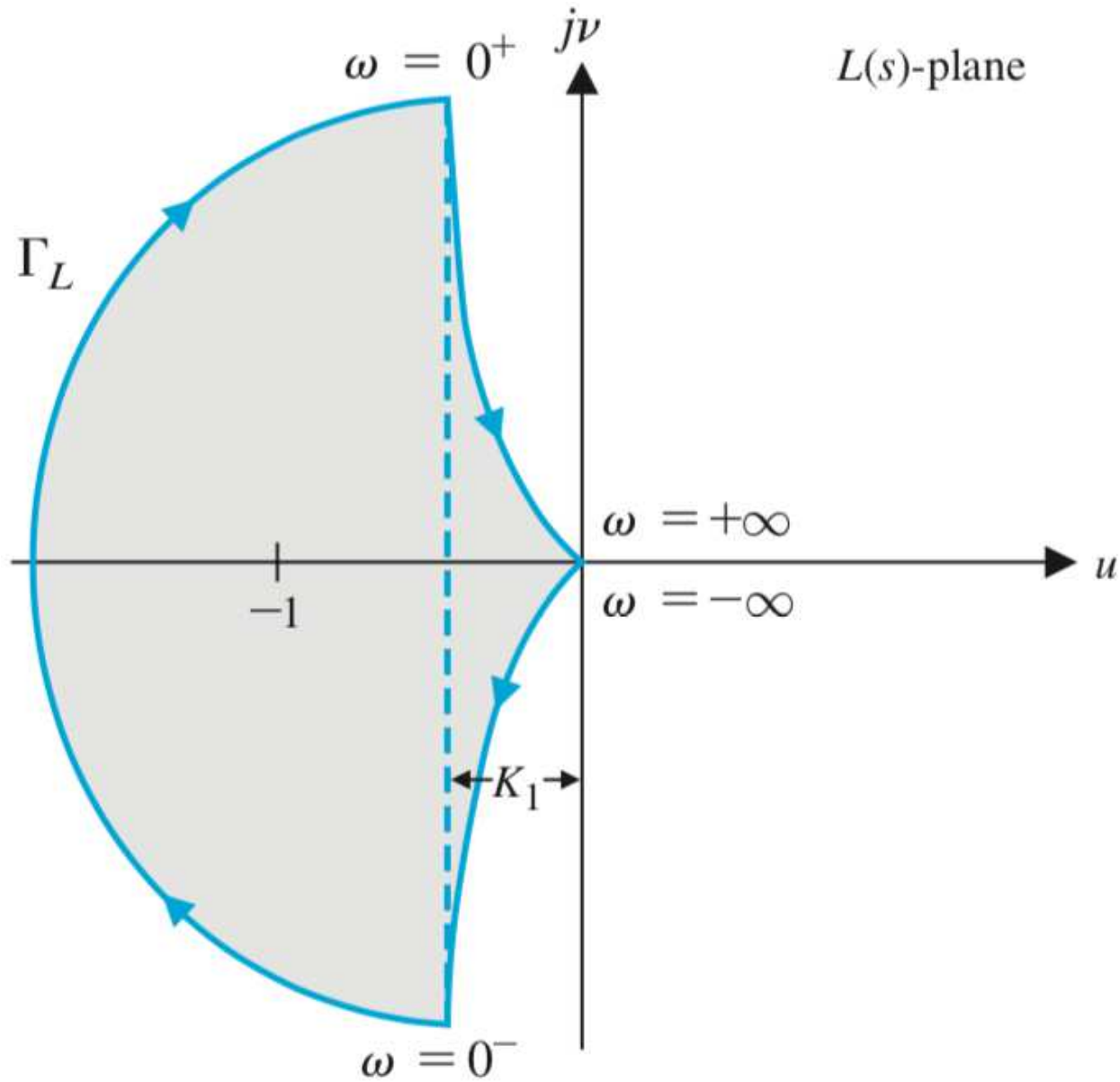
Trecho entre $\omega = 0^-$ e $\omega = 0^+$ em Γ_S , desvio da origem (pag. 4, figura (a))

Representando a origem da forma $s = \epsilon e^{j\phi}$. Faça a fase ϕ variar de -90° em $\omega = 0^-$ (Ponto A, na figura (a), pag. 4), passando por 0° no Ponto B e alcançando 90° quando $\omega = 0^+$ (Ponto C). Para $\epsilon \rightarrow 0$ obtém-se:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L(j\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{-\epsilon e^{j\phi}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{K}{\epsilon} \right| \angle \underline{-\phi - 180^\circ}$$

Note que o polo no semi-plano direito do plano- s irá contribuir com -180° quando $\omega \rightarrow 0$. Além disso, tem-se a contribuição em fase do integrador (90° em $\omega = 0^-$ e -90° em $\omega = 0^+$). Portanto, a composição total em ângulo é: $-180^\circ + 90^\circ = -90^\circ$ em $\omega = 0^-$, passando por $-180^\circ + 0^\circ$ (Ponto B na figura (a), pag. 4), e chegando a $-180^\circ - 90^\circ = -270^\circ (= 90^\circ)$ em $\omega = 0^+$. O módulo tende a ∞ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Veja o lado esquerdo da figura a seguir

Sistema com um polo no semi-plano direito



Sistema com um polo no semi-plano direito

▷ Quando $s = j\omega$, tem-se:

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega - 1)} = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2 + \omega^4)}} \angle_{-180^\circ - \tan^{-1}(-\omega) - 90^\circ}$$

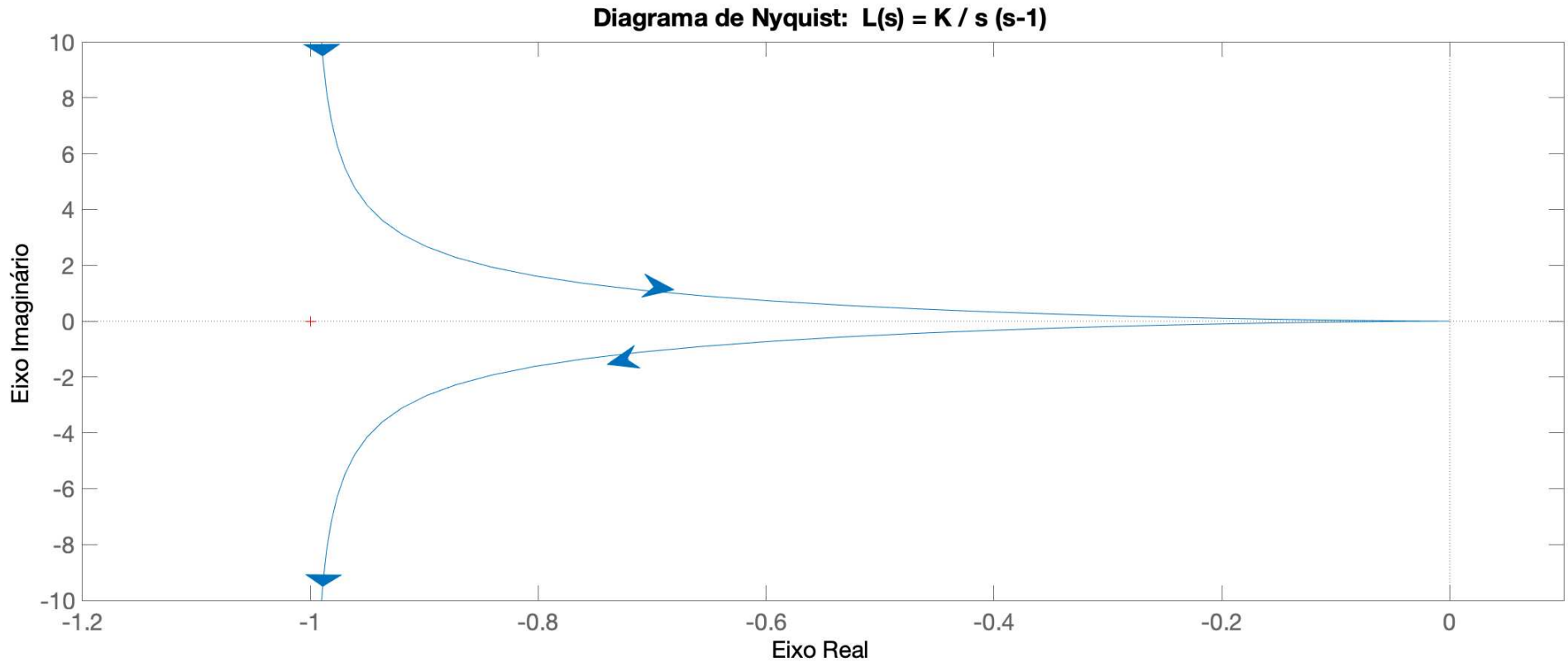
$$\text{ou: } L(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2 + \omega^4)}} \angle_{-180^\circ + \tan^{-1}(\omega) - 90^\circ}$$

▷ Para $s = re^{j\phi}$, quando $r \rightarrow \infty$, tem-se:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} L(s)|_{s=re^{j\phi}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{K}{r^2} e^{-2j\phi} \rightarrow 0$$

sendo que no plano- s (figura (a), pag.4), ϕ varia de 90° ($\omega = +\infty$) até -90° ($\omega = -\infty$) no sentido horário. Portanto, no diagrama de Nyquist, o traçado se aproxima da **magnitude 0** com fase de -180°

Traçado de $L(s) = \frac{K}{s(s-1)}$ usando Matlab?



Sistema com um polo no semi-plano direito

▷ Desta forma o contorno envolve o ponto -1 uma vez no sentido horário tal que $\mathbf{N} = 1$. Como $\mathbf{P} = 1$, então

$$\mathbf{Z} = 1 + 1 = 2$$

o que implica que o sistema em malha fechada é instável com duas raízes da EC no semi-plano direito no plano- s independentemente do ganho K

▷ Porém, ao se projetar um controlador apropriado, pode-se alterar o traçado no Diagrama de Nyquist para se garantir estabilidade se envolver o ponto -1 no sentido anti-horário

▷ A título de ilustração, veja a seguir como seria o Lugar das Raízes para um ganho K variável

Lugar das Raízes – $L(s) = \frac{K}{s(s-1)}$

