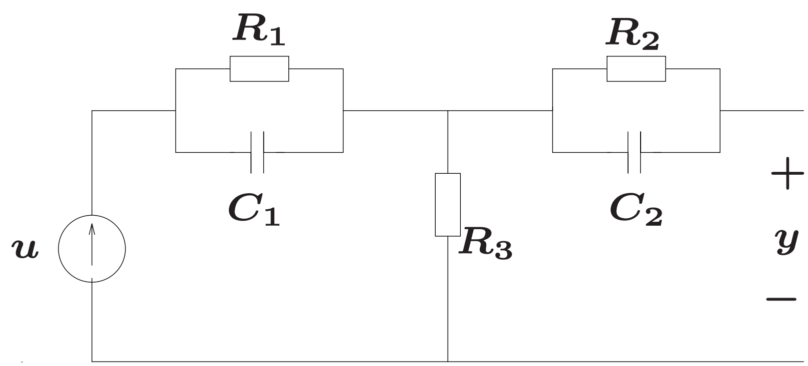
Controlabilidade

1. Controlabilidade de Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Controlabilidade – Aquecendo os motores

Questão: Um estado pode ser "controlado" (ou modificado) a partir da entrada?



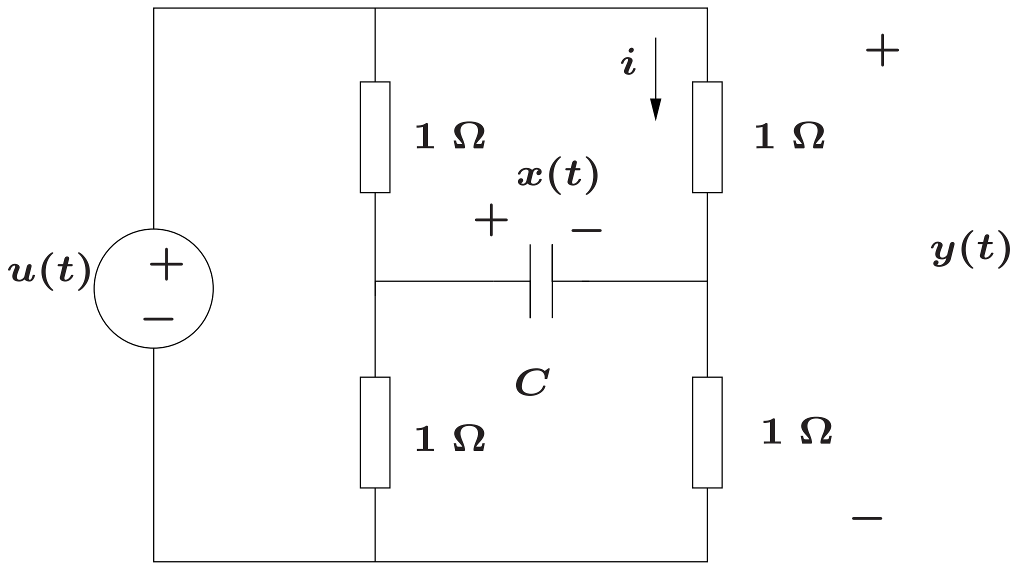
Definem-se as variáveis de estado como v_{C_1} e v_{C_2}

▷ Note que a tensão no capacitor C_2 não pode ser alterada (controlada) a partir da entrada u pois o circuito está aberto em y

▷ Porém a tensão no capacitor C_1 pode ser modificada (controlada)

▷ Além disso, será que a saída y (que é a tensão em R_3) tem alguma influência?

Questão: A variável de estado $x(t)$ (tensão no capacitor) pode ser alterada?



Devido a simetria do circuito, se $x(0) = 0$, então $x(t) = 0$, para todo $t \geq 0$ independentemente da entrada u que for aplicada, e o sistema não é controlável

▷ A saída $y(t)$ tem alguma influência?

Controlabilidade – Sistemas LIT

Considere a equação dinâmica de dimensão n com p entradas

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

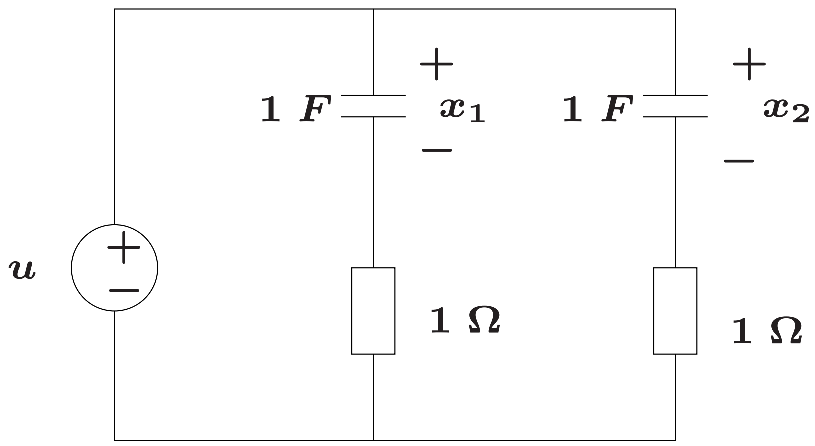
sendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$

Definição A equação de estado acima ou o par (A,B) é controlável se para qualquer estado inicial $x(0) = x_0$ e para qualquer estado final x_1 existir uma entrada $u(t)$ que transfere o estado de x_0 para x_1 em tempo finito

▷ A definição requer apenas que se possa mover qualquer estado inicial no espaço de estados para qualquer estado final em tempo finito. Não há restrições quanto à trajetória a ser seguida nem quanto à magnitude da entrada

▷ **A equação de saída $(y(t))$ não influencia a controlabilidade**

Exemplo



$$\begin{cases} u = x_1 + i_C R = x_1 + \dot{x}_1 \\ u = x_2 + i_C R = x_2 + \dot{x}_2 \\ \\ \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

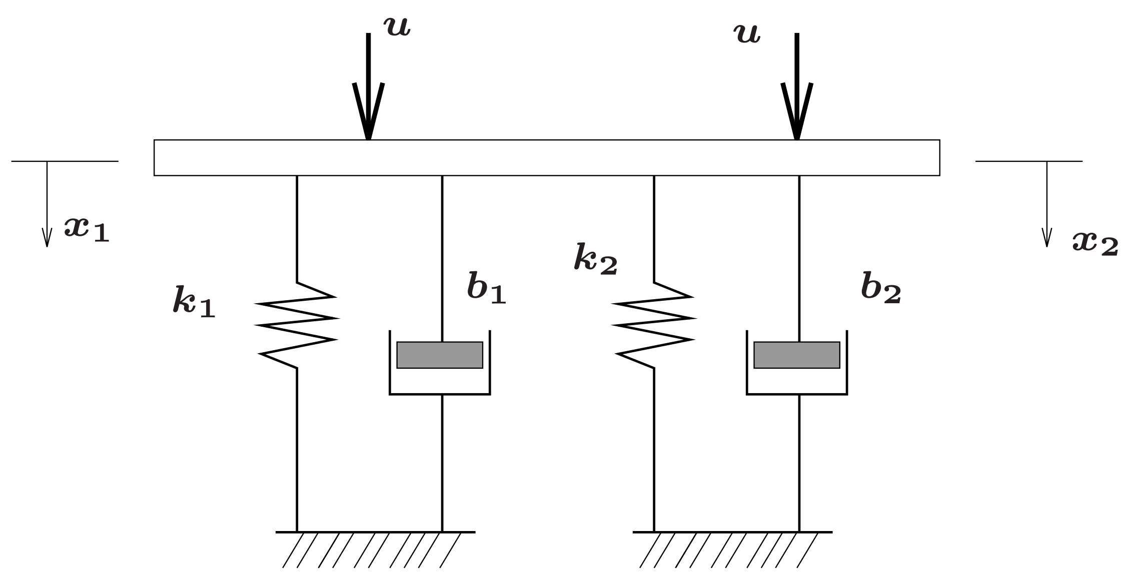
▷ É fácil notar que a partir da entrada $u(t)$, pode-se alterar $x_1(t)$ ou $x_2(t)$ (um ou outro) tal que atinjam qualquer estado arbitrário

▷ No entanto, não é possível levar x_1 e x_2 (ambos) a qualquer estado arbitrário. Por exemplo, se $x_1(0) = x_2(0) = 0$, independentemente da entrada $u(t)$ que for aplicada tem-se $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \geq 0$

▷ O circuito é não controlável

Controlabilidade – Sistemas LIT

Exemplo E se for mais complicado?



- ▷ Controlável ou não controlável?
- ▷ É preciso uma forma sistemática de verificação

Controlabilidade – Sistemas LIT

Teorema As afirmações a seguir são equivalentes:

1. O par (A,B) é controlável

2. A matriz $n \times n$

$$W_c(t) \triangleq \int_0^t e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} BB' e^{A'(t-\tau)} d\tau$$

é não singular $\forall\ t > 0$

3. A matriz de controlabilidade $n \times np$

$$\mathcal{C} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right]$$

tem rank n (posto completo de linhas)

Controlabilidade – Sistemas LIT

4. Para todo λ autovalor de A (e, consequentemente, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$), a matriz complexa $n \times (n+p)$

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda \mathbf{I} - A & B \end{array}\right]$$

tem rank n (posto completo de linhas)

5. Se todos os autovalores de A têm parte real negativa, a única solução de

$$AW_c + W_c A' = -BB'$$

é definida positiva. Essa solução é denominada Gramiano de controlabilidade e pode ser expressa da forma:

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} d\tau$$

Controlabilidade – Sistemas LIT

Demonstração (1) $\Leftrightarrow$ (2). Primeiro a equivalência entre as duas formas integrais que aparecem em (2) pode ser demonstrada fazendo-se a mudança de variável $\bar{\tau} = t - \tau$. O integrando garante que a matriz $W_c(t)$ é sempre semidefinida positiva; será definida positiva se, e somente se, for não singular

$\rightsquigarrow$ Questão: se $W_c(t)$ for não singular, então (A,B) é controlável? A checar...

Note que a resposta no instante t_1 é dada por

$$x(t_1) = e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Para qualquer $x(0) = x_0$ e qualquer $x(t_1) = x_1$, especificamente a entrada

$$u(t) = -B'e^{A'(t_1-t)}W_c^{-1}(t_1)\left[e^{At_1}x_0 - x_1\right]$$

transfere o estado de x_0 para x_1 no tempo t_1? Isto é, se $W_c(t_1)$ é não singular então (A,B) é controlável?

Controlabilidade – Sistemas LIT

Para checar se a entrada $u(t)$ transfere o estado de x_0 para x_1 no tempo t_1, basta substituir $u(t)$ em $x(t_1)$, isto é:

$$
\begin{aligned}
x(t_1) &= e^{At_1}x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}B \\
&\quad \times \left(-B'e^{A'(t_1-\tau)}W_c^{-1}(t_1)\left[e^{At_1}x_0 - x_1\right]\right)d\tau \\
&= e^{At_1}x(0) - \left(\int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB'e^{A'(t_1-\tau)}d\tau\right) \\
&\quad \times \; W_c^{-1}(t_1)\left[e^{At_1}x_0 - x_1\right] \\
&= e^{At_1}x(0) - W_c(t_1)W_c^{-1}(t_1)\left[e^{At_1}x_0 - x_1\right] \\
&= x_1
\end{aligned}
$$

o que demonstra que se W_c é não singular então (A,B) é controlável

Controlabilidade – Sistemas LIT

Para mostrar o inverso, supõe-se por absurdo que o par (A,B) é controlável mas $W_c(t_1)$ não é definida positiva para algum t_1. Nesse caso, existe $v \neq 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
v'W_c(t_1)v &= \int_0^{t_1} v'e^{A(t_1-\tau)}BB'e^{A'(t_1-\tau)}v d\tau \\
&= \int_0^{t_1} \|B'e^{A'(t_1-\tau)}v\|^2 d\tau \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad B'e^{A'(t_1-\tau)}v \equiv 0 \ \text{ ou } \ v'e^{A(t_1-\tau)}B \equiv 0
$$

para todo $\tau \in [0,t_1]$. No entanto, note que o sistema por hipótese é controlável? Então...

Controlabilidade – Sistemas LIT

Se o sistema é controlável, então existe uma entrada que transfere o estado inicial dado, por exemplo, por $x(0) = e^{-At_1}v$, para o estado final que é, por exemplo, a origem: $x(t_1) = 0$. Utilizando a expressão geral de $x(t)$ para esse caso obtém-se (note que da escolha de $x(0)$ tem-se $v = e^{At}x(0)$):

$$x(t_1) = 0 = v + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Pré-multiplicando por v' obtém-se

$$0 = v'v + \int_0^{t_1} v'e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \|v\|^2 + 0$$

o que contradiz a hipótese $v \neq 0$

Então a equivalência entre (1) $\Leftrightarrow$ (2) está estabelecida

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Como todo elemento de $e^{At}B$ é uma função analítica em t, se

$$W_c(t) \triangleq \int_0^t e^{A\tau}BB'e^{A'\tau}d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)}BB'e^{A'(t-\tau)}d\tau$$

for não singular para algum t então é não singular para todo t. Como as duas formas integrais acima são equivalentes, $W_c(t)$ é não singular se, e somente se, não existe $v \neq 0$ tal que

$$v'e^{At}B = 0 \quad \forall t$$

$\triangleright$ Primeiramente mostra-se que se $W_c(t)$ é não singular, então a matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ tem posto completo de linhas

Controlabilidade – Sistemas LIT

▷ Se $W_c(t)$ é não singular, então a matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ tem posto completo de linhas?

Suponha por contradição que $\mathcal{C}$ não tem posto completo, então existe $v \neq \mathbf{0}$ tal que: $v'\mathcal{C} = \mathbf{0}$ ou, equivalentemente:

$$v'A^kB = \mathbf{0} \qquad \text{para} \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Note que $e^{At}B$ pode ser expressa como uma combinação linear de $\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$ (Teorema 3.5, pag. 64, Chen) e, portanto, então $v'e^{At}B = \mathbf{0}$, o que contradiz a hipótese da não singularidade de $W_c(t)$. Desta forma, (2) ($W_c(t)$ não singular) implica em (3) ($\mathcal{C}$ tem posto completo $= n$)

Controlabilidade – Sistemas LIT

▷ Para mostrar o inverso, supõe-se por contradição que $\mathcal{C}$ **tem posto completo de linhas** mas

$$W_c(t) \triangleq \int_0^t e^{A\tau}BB'e^{A'\tau}d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)}BB'e^{A'(t-\tau)}d\tau$$

é singular. Nesse caso, existe $v \neq 0$ tal que

$$v'e^{At}B = 0 \quad \forall\, t$$

Escolhendo $t = 0$, tem-se $v'B = 0$. Diferenciando e novamente calculando em $t = 0$, tem-se $v'AB = 0$; fazendo essa operação sucessivamente, obtém-se $v'A^kB = 0$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ ou

$$v'\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right] = v'\mathcal{C} = 0$$

o que contradiz a hipótese de que $\mathcal{C}$ tem posto completo de linhas e demonstra a equivalência entre (3) e (2) ($W_c(t)$ é <u>não singular</u>)

Equivalência entre: (3) $\Leftrightarrow$ (4)

▷ Se $\mathcal{C}$ tem posto completo de linhas, então $\left[\begin{array}{c|c} \lambda \mathbf{I} - A & B \end{array}\right]$ tem posto completo de linhas para todo λ autovalor de A? Se não for assim, então existe um autovalor λ_1 de A e um vetor $q \neq 0$ tais que

$$q \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 \mathbf{I} - A & B \end{array}\right] = 0$$

e portanto $qA = \lambda_1 q$ e $qB = 0$ (implicando que q é um autovetor à esquerda de A). Manipulando, por exemplo:

$$qA^2 = (qA)A = (\lambda_1 q)A = \lambda_1^2 q$$

e assim sucessivamente, obtém-se $qA^k = \lambda_1^k q$ e, portanto:

$$q \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} qB & \lambda_1 qB & \cdots & \lambda_1^{n-1} qB \end{bmatrix} = 0$$

o que contradiz a hipótese de que $\mathcal{C}$ tem posto completo de linhas

Controlabilidade – Sistemas LIT

▷ $\rho(\mathcal{C}) < n \Longrightarrow \rho\left[\begin{array}{c|c} \lambda \mathbf{I} - A & B \end{array}\right] < n$ para algum λ_1 autovalor de A?

Para demonstrá-lo, dois resultados são necessários (e que serão formalmente discutidos mais a frente):

A) A controlabilidade é invariante sob qualquer transformação de equivalência

B) Se $\rho(\mathcal{C}) = n - m$ para algum $m \geq 1$, então existe uma matriz P não singular tal que

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

com $\bar{A}_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Controlabilidade – Sistemas LIT

Seja $\boldsymbol{\lambda_1}$ um autovalor de $\bar{\boldsymbol{A}}_{\bar{c}}$ associado a $\boldsymbol{q_1} \in \mathbb{R}^{1\times m}$ autovetor à esquerda, ou seja, $\boldsymbol{q}_1\bar{\boldsymbol{A}}_{\bar{c}} = \boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{q}_1$. Portanto, $\boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{\lambda}_1\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{A}}_{\bar{c}}) = \mathbf{0}$

Construindo o vetor $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ $\boldsymbol{q} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{q}_1 \end{bmatrix}$, tem-se

$$\boldsymbol{q}\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\lambda}_1\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{A}} & \bar{\boldsymbol{B}} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{q}_1 \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{\lambda}_1\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{A}}_c & -\bar{\boldsymbol{A}}_{12} & \bar{\boldsymbol{B}}_c \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda}_1\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{A}}_{\bar{c}} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \mathbf{0}$$

o que implica que não tem posto completo ou:

$$\rho\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{A}} & \bar{\boldsymbol{B}} \end{array}\right] < \boldsymbol{n} \quad \Longrightarrow \quad \rho\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{array}\right] < \boldsymbol{n}$$

para algum autovalor de $\boldsymbol{A}$ (note que para qualquer outro valor de $\boldsymbol{\lambda}$, a matriz $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I} - \boldsymbol{A}$ é não singular). Com isso, a equivalência (3) $\Leftrightarrow$ (4) está demonstrada

Controlabilidade – Sistemas LIT

Equivalência entre: (2) $\Leftrightarrow$ (5)

▷ Se $\boldsymbol{A}$ é estável, a única solução de $\boldsymbol{AW_c + W_cA' = -BB'}$ pode ser expressa como

$$\boldsymbol{W_c} = \int_0^\infty \boldsymbol{e^{A\tau}BB'e^{A'\tau}d\tau}$$

O Gramiano $\boldsymbol{W_c}$ é sempre semidefinido positivo, e será definido positivo se, e somente se, for não singular

Isto demonstra a equivalência (2) $\Leftrightarrow$(5) ■

Controlabilidade – Sistemas LIT

Exemplo Considere o problema do carro com o pêndulo invertido, descrito (para pequenas variações em torno do ponto de equilíbrio e para valores escolhidos dos parâmetros) por

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Matriz de Controlabilidade: $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$

Controlabilidade – Sistemas LIT

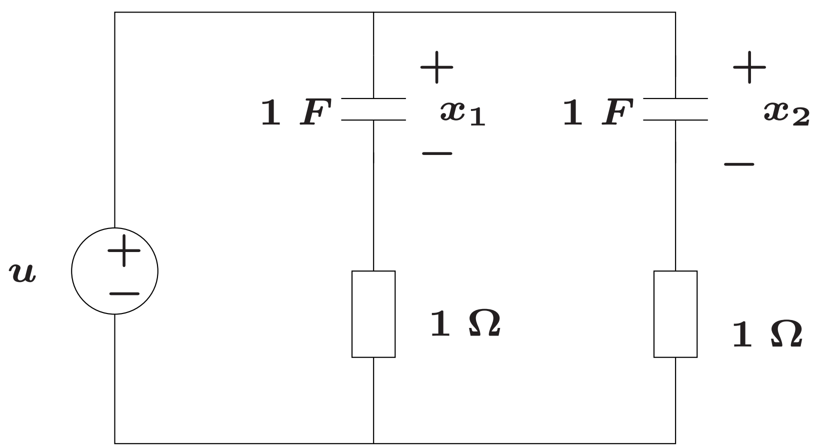
$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{2} & \mathbf{0} & -\mathbf{10} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{0} & -\mathbf{10} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{rank}\ (\mathcal{C}) = 4 \implies \text{Sistema controlável}$$

Matlab `C=ctrb(A,B)` retorna a matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ e o comando `gram` retorna o Gramiano de controlabilidade. Um código:

```
A=[0 1 0 0;0 0 -1 0;0 0 0 1;0 0 5 0]; B=[0 1 0 -2]';
if rank(ctrb(A,B)) == size(A,1)
 disp('Sistema Controlável')
 else ('Sistema não Controlável')
end
```

Controlabilidade – Sistemas LIT

Retornando ao exemplo

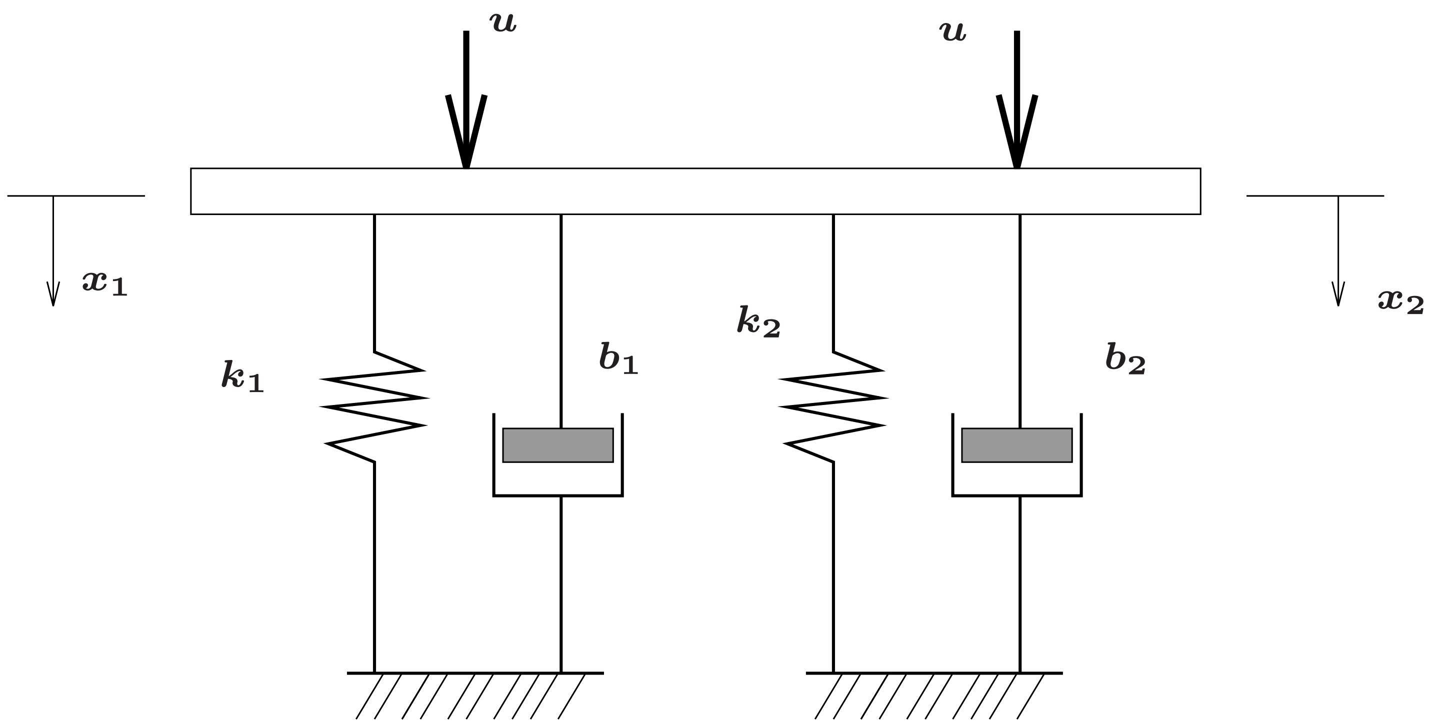


$$\begin{cases} u = x_1 + i_C R = x_1 + \dot{x}_1 \\ u = x_2 + i_C R = x_2 + \dot{x}_2 \\ \\ \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(\mathcal{C}) = 1 \ldots$$

- É não controlável

Exemplo



Newton: $k_1 x_1 + b_1 \dot{x}_1 = u \quad ; \quad k_2 x_2 + b_2 \dot{x}_2 = u$

Controlabilidade – Sistemas LIT

Então:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1/b_1 & 0 \\ 0 & -k_2/b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/b_1 \\ 1/b_2 \end{bmatrix} u$$

com

$$x_1(0) = x_{10} \;, x_2(0) = x_{20}$$

e

$$\rho\left(\left[\begin{array}{c|c} B & AB \end{array}\right]\right) = \rho\left(\left[\begin{array}{c|c} 1/b_1 & -k_1/b_1^2 \\ 1/b_2 & -k_2/b_2^2 \end{array}\right]\right) = n = 2 \;\; \text{se} \;\; k_1 b_2 \neq k_2 b_1$$

Por exemplo, o sistema é não controlável se $k_1 = k_2$ e $b_1 = b_2$ (tem ”simetria”)

Exemplificando: Considere $k_1 = k_2 = 1$, $b_1 = 2$ e $b_2 = 1$. E considere as condições iniciais dadas por $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = -1$. Encontre $u(t)$ que leva a plataforma para a posição de repouso $(x_1(t) = x_2(t) = 0)$ em $t = 2$s

▷ Calculando $W_c(2)$:

$$\begin{aligned}
W_c(2) &= \int_0^2 \begin{bmatrix} e^{-0.5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \int_0^2 \begin{bmatrix} e^{-0.5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \int_0^2 \begin{bmatrix} e^{-0.5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25e^{-0.5\tau} & 0.5e^{-\tau} \\ 0.5e^{-0.5\tau} & e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau
\end{aligned}$$

Controlabilidade – Sistemas LIT

$$
\begin{aligned}
W_c(2) &= \int_0^{2} \begin{bmatrix} 0.25e^{-\tau} & 0.5e^{-1.5\tau} \\ 0.5e^{-1.5\tau} & e^{-2\tau} \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} -0.25e^{-2} + 0.25 & -\frac{e^{-3}}{3} + \frac{1}{3} \\ -\frac{e^{-3}}{3} + \frac{1}{3} & -0.5e^{-4} + 0.5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.2162 & 0.3167 \\ 0.3167 & 0.4908 \end{bmatrix} > 0
\end{aligned}
$$

Então $u(t)$ que transfere a plataforma para o repouso em $t_1 = 2$s é

$$
u(t) = -B'e^{A'(t_1-t)} W_c^{-1}(t_1) \left[e^{At_1} x_0 - x_1 \right]
$$

Controlabilidade – Sistemas LIT

$$\begin{aligned} u(t) &= -B'e^{A'(t_1-t)}W_c^{-1}(t_1)\left[e^{At_1}x_0 - x_1\right] \\ &= -\left[\begin{array}{cc} 0.5 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} e^{-0.5(2-t)} & 0 \\ 0 & e^{-(2-t)} \end{array}\right] W_c^{-1}(2)\left[\begin{array}{c} 10 \\ -1 \end{array}\right] \\ &= -58.82e^{0.5t} + 27.96e^{t} \;\;,\;\; t \in [0{,}2] \end{aligned}$$

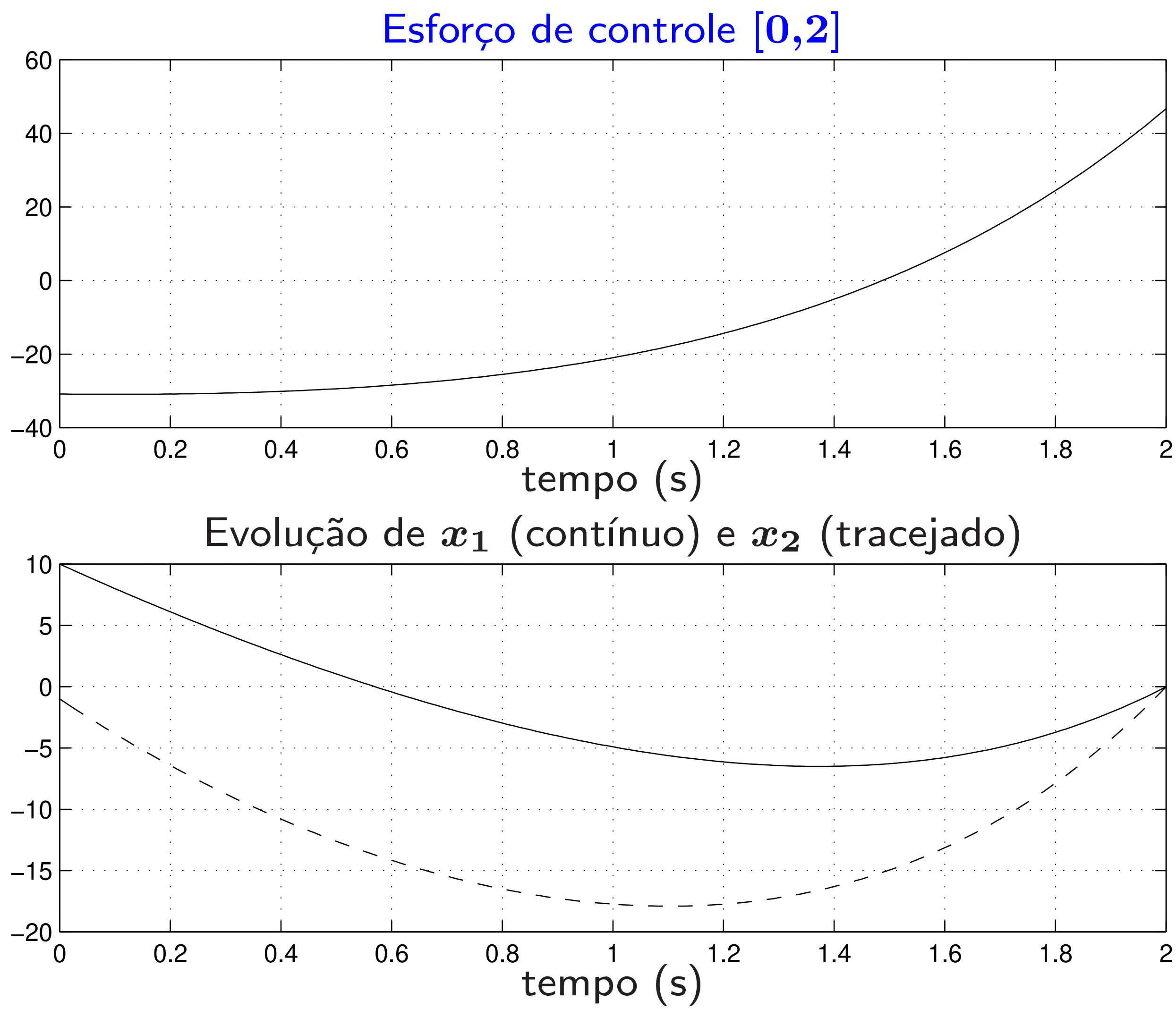
▷ O esforço de controle aumenta com a diminuição do tempo de deslocamento de um estado para outro

▷ Se alguma restrição for imposta sobre u, então pode não ser possível transferir o sistema num intervalo de tempo arbitrariamente pequeno

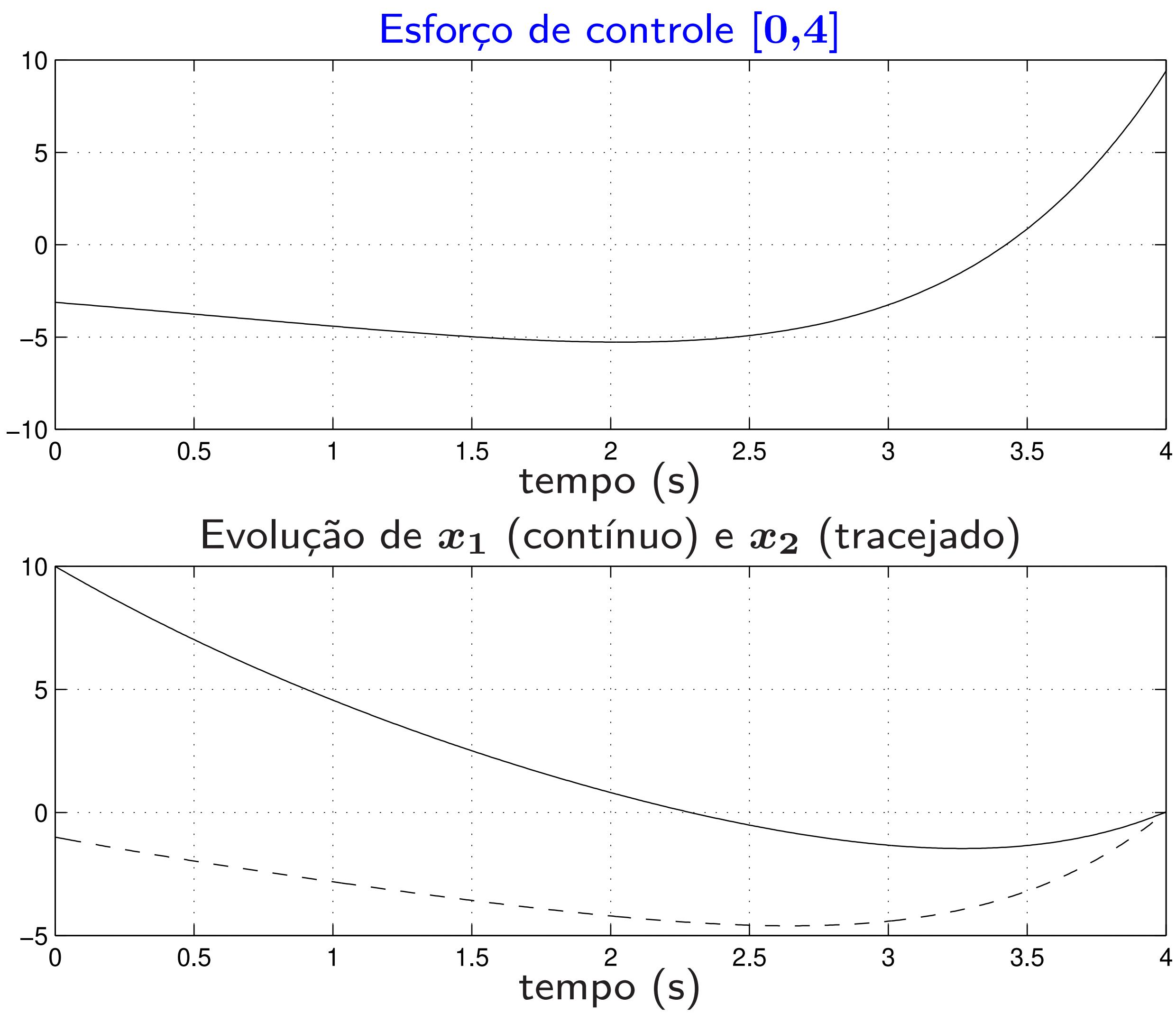
▷ Por exemplo, para $t_1 = 4$s tem-se uma entrada "menos agressiva":

$$u(t) = -3.81e^{0.5t} + 0.688e^{t} \;\;,\;\; t \in [0{,}4]$$

MATLAB – Simulando com `lsim`

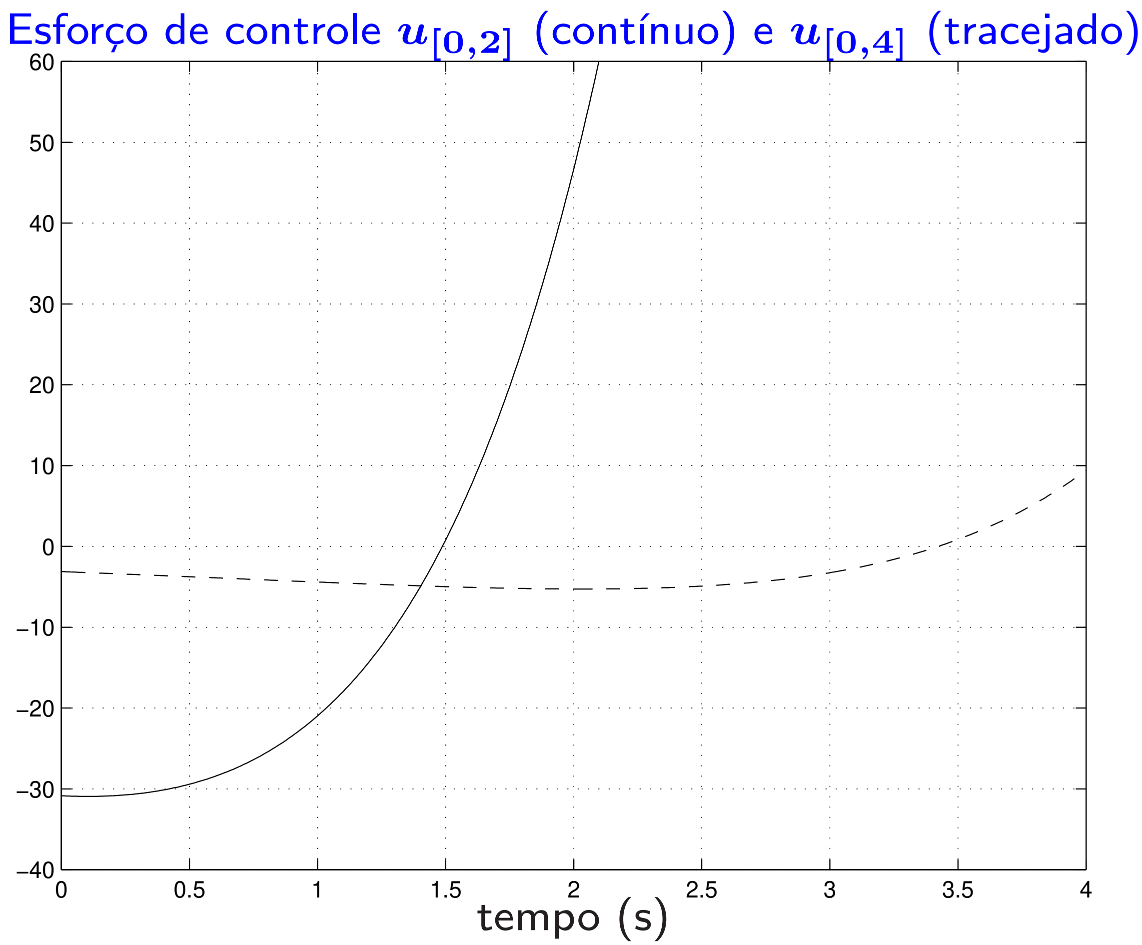


MATLAB – Simulando com `lsim`



MATLAB – Simulando com `lsim`

▷ Comparando os esforços de controle



Controlabilidade – Sistemas LIT

▷ A entrada $u(t)$ como definida

$$u(t) = -B'e^{A'(t_1-t)]}W_c^{-1}(t_1)[e^{At_1}x_0 - x_1]$$

é chamada de **controle de mínima energia** pois para qualquer outro $\bar{u}(t)$ que realiza a mesma tarefa tem-se

$$\int_0^{t_1} \bar{u}'(t)\bar{u}(t)dt \geq \int_0^{t_1} u'(t)u(t)dt$$

Índices de Controlabilidade

Considere $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ com $\boldsymbol{B}$ de posto completo de colunas (se não for o caso, alguma coluna redundante pode ser eliminada)

▷ Se $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ for controlável, a matriz de controlabilidade $\mathcal{C}$ tem posto n e, consequentemente, n colunas linearmente independentes (de um total de np colunas)

Seja $\boldsymbol{b}_i$ a i-ésima coluna de $\boldsymbol{B}$, e portanto

$$\mathcal{C} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_p & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_p & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}_p \end{array}\right]$$

Note que se $\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{b}_m$ depende das colunas à esquerda em $\mathcal{C}$, então $\boldsymbol{A}^{i+1}\boldsymbol{b}_m$ também depende. Portanto, se uma coluna associada a $\boldsymbol{b}_m$ torna-se linearmente dependente, todas as demais também o serão

Índices de Controlabilidade

▷ Seja μ_m o número de colunas LI associadas a b_m em $\mathcal{C}$. Ou seja, as colunas

$$b_m \ , \quad Ab_m \ , \quad \ldots \ , \quad A^{\mu_m - 1} b_m$$

são LI e $A^{\mu_m + i} b_m$, $i = 0{,}1, 2, \ldots$ são LD. Assim, se $\mathcal{C}$ tem posto n,

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p = n$$

$\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$ são chamados índices de controlabilidade e

$$\mu = \max \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$$

é o índice de controlabilidade de $(A{,}B)$

Índices de Controlabilidade

Equivalentemente, se (A,B) é controlável, o índice de controlabilidade μ é o menor inteiro tal que $\rho(\mathcal{C}_\mu) = \rho\left(\left[\begin{array}{cccc} B & AB & \cdots & A^{\mu-1}B \end{array}\right]\right) = n$

▷ Cálculo de um intervalo para μ

Se todos os índices de controlabilidade são iguais ($\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_p$), $n/p \leq \mu$. Se todos, exceto um, são iguais a 1, $\mu = n - (p-1)$ (maior valor possível)

Seja $\bar{n}$ o grau do polinômio mínimo de A. Então, por definição, existem α_i's tais que

$$A^{\bar{n}} = \alpha_1 A^{\bar{n}-1} + \alpha_2 A^{\bar{n}-2} + \cdots + \alpha_{\bar{n}} \mathbf{I}$$

e $A^{\bar{n}}B$ pode ser escrito como combinação linear de $\{B, AB, \ldots, A^{\bar{n}-1}B\}$. Como conclusão

$$n/p \leq \mu \leq \min\,(\bar{n}, n-p+1) \;\text{ e }\; p = \text{rank}\,(B)$$

Índices de Controlabilidade

Como o grau do polinômio mínimo em geral não é conhecido, e o posto de $\boldsymbol{B}$ pode ser computado facilmente, usa-se o corolário a seguir

Corolário O par $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ com $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\rho(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{p}$ é controlável se, e somente se, a matriz

$$\mathcal{C}_{n-p+1} \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-p}B \end{bmatrix}$$

tiver posto $\boldsymbol{n}$

Índices de Controlabilidade

Exemplo Considere o modelo de satélite (desacoplado) cujas equações linearizadas são dadas por (veja (2.29), pag.24-25, Chen):

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Matriz de controlabilidade $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n \times np}$ é 4×8

Índices de Controlabilidade

Usando o resultado do Corolário anterior tem-se $\rho(B) = p = 2$. Pode-se então verificar a controlabilidade checando o posto da matriz abaixo para $n - p = 2$

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

O posto é 4 o que implica que é controlável

Índices de controlabilidade: $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2$

Índice de controlabilidade do par (A,B): $\mu = 2$

Controlabilidade

Teorema A controlabilidade é invariante sob qualquer transformação de equivalência

Demonstração Considere o par (A,B) e a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right]$$

O par equivalente $(\bar{A},\bar{B})$ com $\bar{A} = PAP^{-1}$ e $\bar{B} = PB$ e P uma matriz não singular qualquer possui a matriz de controlabilidade

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{C}} &= \left[\begin{array}{ccccc} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \bar{A}^2\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cccc} PB & PAP^{-1}PB & \cdots & PA^{n-1}P^{-1}PB \end{array}\right] \\
&= P\left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{array}\right] = P\mathcal{C}
\end{aligned}$$

Como P é não singular, $\rho(\mathcal{C}) = \rho(\bar{\mathcal{C}})$ ■

Controlabilidade

Teorema O conjunto de índices de controlabilidade do par (A,B) é invariante sob qualquer transformação de equivalência e para qualquer re-ordenamento das colunas de B

Demonstração Do teorema anterior, definindo

$$\mathcal{C}_k = \left[\begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \cdots & A^{k-1}B \end{array} \right]$$

tem-se $\rho(\mathcal{C}_k) = \rho(\bar{\mathcal{C}}_k)$ para $k = 1, 2, \ldots$. Qualquer re-arranjamento das colunas pode ser definido como $\hat{B} = BM$ com $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ uma matriz não singular de permutação. Assim,

$$\hat{\mathcal{C}}_k \triangleq \left[\begin{array}{cccc} \hat{B} & A\hat{B} & \cdots & A^{k-1}\hat{B} \end{array} \right] = \mathcal{C}_k \text{ diag } (M, \ldots, M)$$

Como diag $(M, \ldots, M)$ é não singular, $\rho(\hat{\mathcal{C}}_k) = \rho(\mathcal{C}_k)$ ■