Estabilidade no Domínio da Frequência

1. Motivação
2. Mapas de contorno no Plano-s
3. Teorema de Cauchy
4. **Critério de Estabilidade de Nyquist**
5. Dois exemplos

Estabilidade no Domínio da Frequência

▷ Pode-se analisar e determinar a estabilidade (relativa) de um sistema realimentado e o projeto de controle usando técnicas como, por exemplo:

- Routh-Hurwitz ou Lugar das Raízes

Por que então estudar outra técnica de análise de estabilidade?

▷ O Critério de Nyquist é a forma mais adequada para analisar **especificações de desempenho**, **estabilidade relativa** e **robusta** no domínio da frequência

Em que se baseia o critério de Nyquist? A ideia consiste em fazer o mapeamento de um contorno orientado pré-definido em um dado plano em outro plano, permitindo localizar a posição de pontos singulares via Teorema de Cauchy

Estabilidade no Domínio da Frequência

▷ Note que para determinar a estabilidade relativa de um sistema em malha fechada, deve-se avaliar a EC do sistema: $F(s) = 1 + KG_c(s)G(s) = 0$, sendo que $G(s)$ denota a planta e $KG_c(s)$ o controlador, ambos descritos na forma ganho, polo e zero, i.e.:

$$G(s) = \frac{\prod_i (s + z_i^p)}{\prod_j (s + p_j^p)}\,,\ \ KG_c(s) = K\frac{\prod_\ell (s + z_\ell^c)}{\prod_\kappa (s + p_\kappa^c)}$$

Portanto, ao substituí-los, a Equação Característica pode ser reescrita como:

$$F(s) = \frac{\prod_\kappa (s + p_\kappa^c)\prod_j (s + p_j^p) + K\prod_\ell (s + z_\ell^c)\prod_i (s + z_i^p)}{\prod_\kappa (s + p_\kappa^c)\prod_j (s + p_j^p)} = 0$$

▷ Nota-se que para garantir estabilidade deve-se verificar se **todos os zeros da EC** estão alocados no semi-plano esquerdo aberto. **Por que os zeros de $F(s)$?** São os polos em malha fechada de $T(s) = KG_c(s)G(s)/(1 + KG_c(s)G(s))$!

Mapeamento de Contornos no Plano-s

Antes de tratarmos o critério de estabilidade em si, vamos entender como se procede com mapeamentos de contornos no plano-s

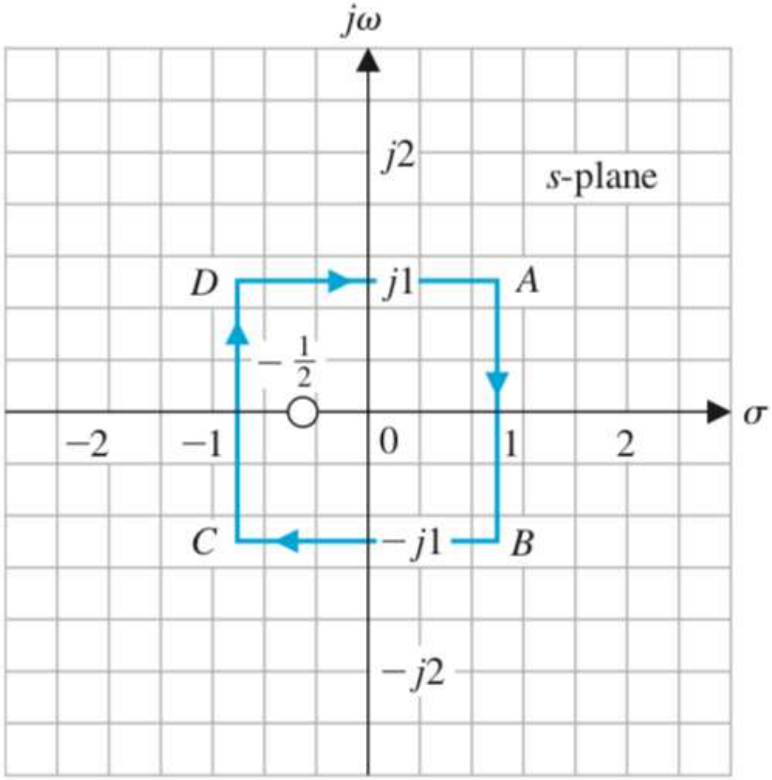
A estratégia de mapeamento consiste em usar uma transformação, no caso a própria função dada pela Equação Característica $F(s)$, **que mapeará um contorno orientado, pré-definido e traçado no plano-s**, **em um outro plano**. Como "s" é uma variável complexa, isto é, $s = \sigma + j\omega$, a função $F(s)$ é também complexa, tal que pode-se definir:

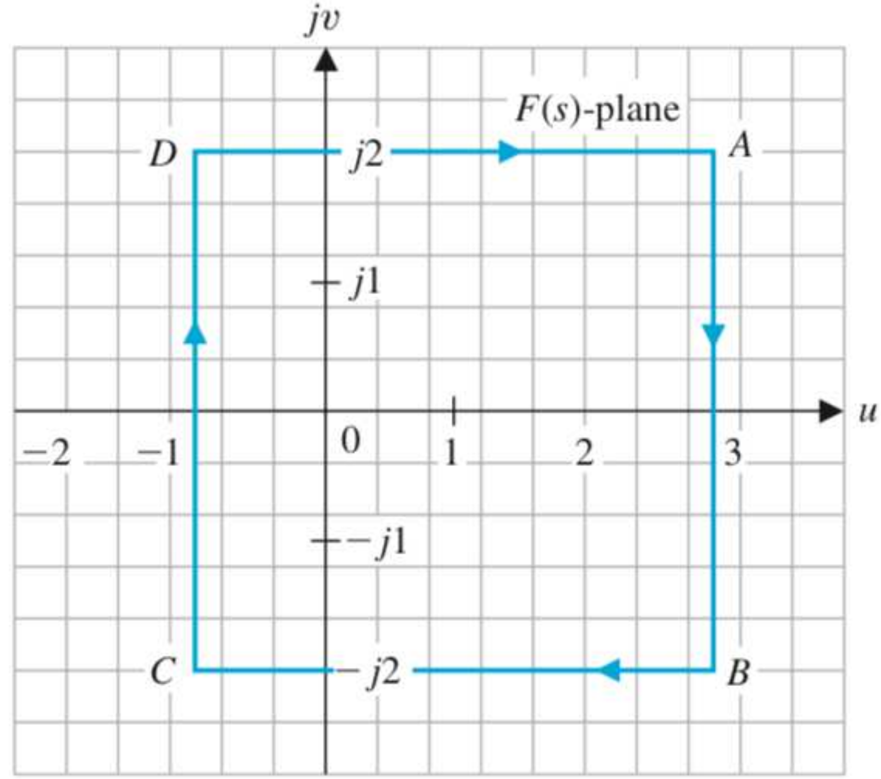
$$F(s) = u + jv$$

O "novo" plano complexo (o plano onde será mapeado o contorno original) pode ser representado nas coordenadas u e v e **é denominado, por conveniência, plano-$F(s)$**. O plano-s original está nas coordenadas σ e ω

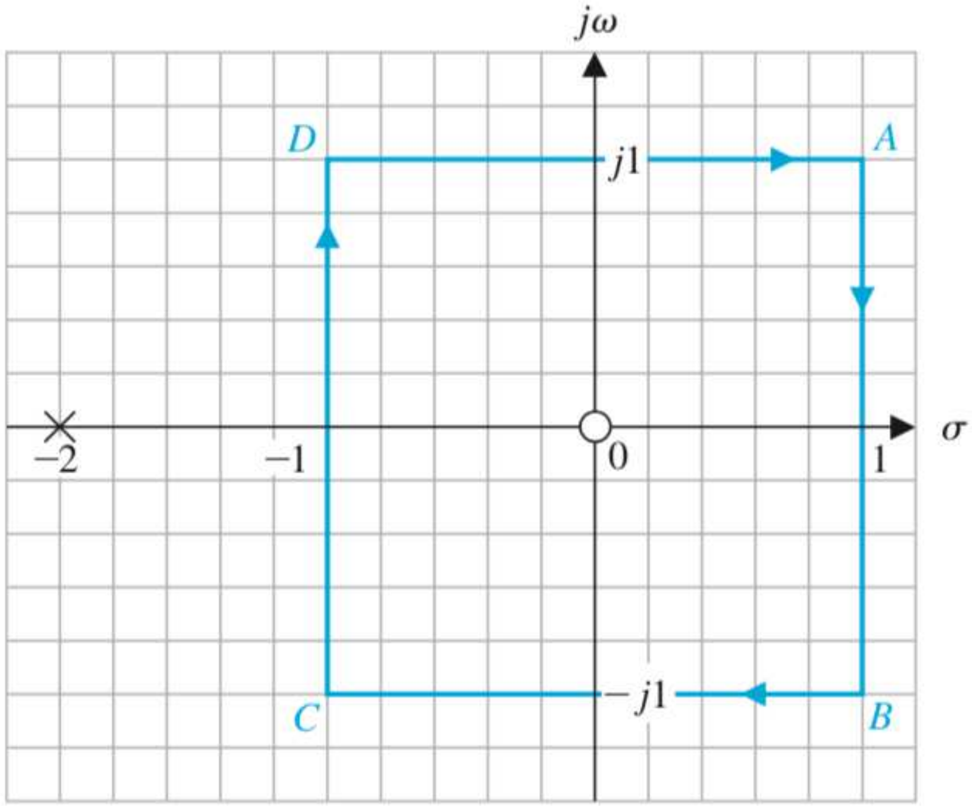
Mapeamento de Contornos no Plano-s no Plano-$F(s)$

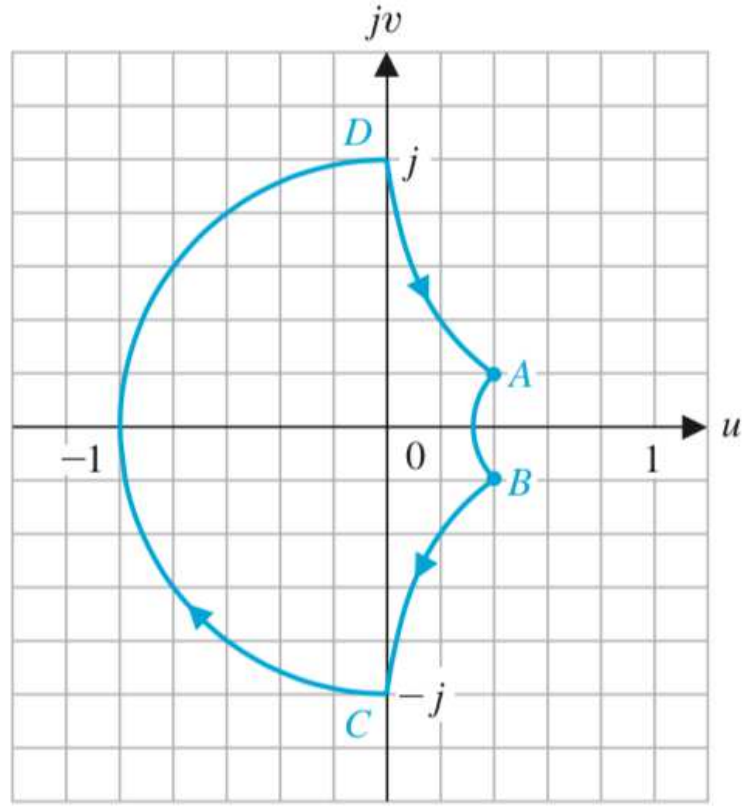
Para o contorno no plano-s (lado esquerdo), usando e.g.: $F(s) = 2s + 1$ como mapeamento, obtém-se o contorno no plano-$F(s)$ (lado direito)





Para o mesmo contorno no plano-s anterior, usando como mapeamento: $F(s) = s/(s+2)$, obtém-se um outro contorno no plano-$F(s)$





Teorema de Cauchy

Se *um contorno* **no plano-s (denominado Γ_S)** *envolve* **Z zeros** *e* **P polos** *da função* $F(s)$ *e, além disso, não cruza nenhum polo ou zero de* $F(s)$ *e a* **orientação do contorno é no sentido horário**; **Então** *o novo contorno* **no plano-$F(s)$ (denominado Γ_F)** *envolve a origem no* **plano-$F(s)$**

$$\boxed{\mathsf{N} = \mathsf{Z} - \mathsf{P} \quad \textbf{vezes}}$$

no sentido horário.

▷ Portanto, para os dois exemplos apresentados nas pag. 5 e 6, **os novos contornos gerados irão envolver a origem no plano-$F(s)$ uma única vez**:

$$\mathsf{N} = \mathsf{Z} - \mathsf{P} = 1 - 0 = 1$$

Além disso, o envolvimento da origem no plano-$F(s)$ é no sentido horário

Critério de Nyquist no Domínio-s

O critério de Nyquist procura determinar se **existe algum zero** da EC:

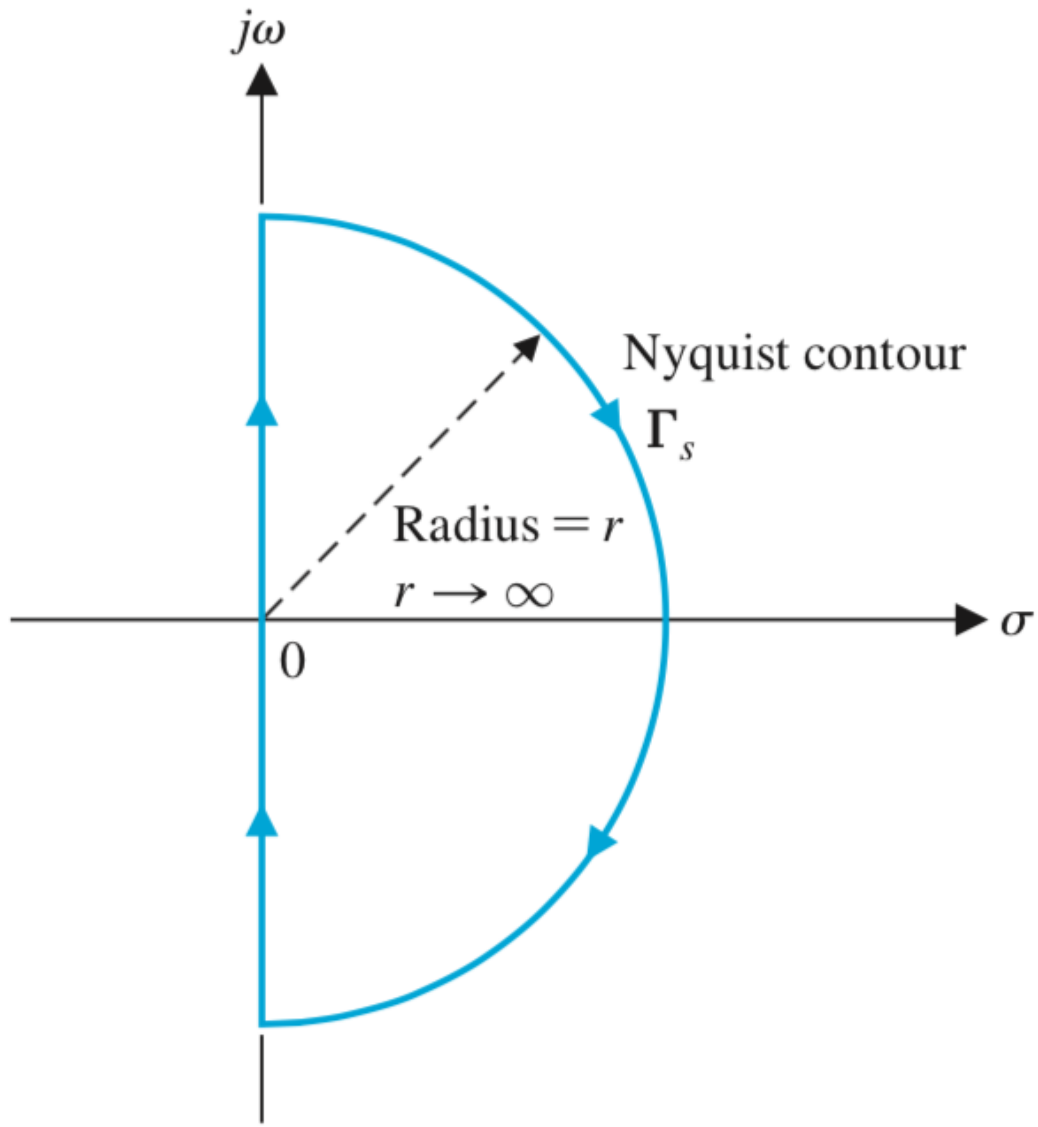
$$F(s) = 1 + KG_c(s)G(s) = 0$$

no **semi-plano direito fechado** (de fato, **analisando se o sistema em malha fechada terá polos no semi-plano direito**, significando que seria **instável**)

⇝ **Pergunta**: qual contorno no plano-s seria uma boa escolha para o critério?
Sugestão: **um contorno Γ_S que envolve todo o semi-plano direito fechado**

⇝ Portanto, **a instabilidade seria caracterizada ao se determinar o excesso de zeros em relação aos polos da Equação Característica (EC) que estão no semi-plano direito**, para tanto mapea-se $KG_c(s)G(s)$ para todo 's' ao longo do contorno Γ_S que envolve todo o semi-plano direito fechado

Contorno no Plano-s: Γ_S adequado?



Critério de Estabilidade de Nyquist

▷ Portanto, **a ideia é mapear o contorno Γ_S que envolve todo o semi-plano direito em um novo contorno no plano-$F(s)$ usando a EC: $F(s)$**

▷ Após traçar o contorno $\mathbf{\Gamma_F}$ no plano-$\boldsymbol{F(s)}$, determina-se o número de cercos da origem que é dado por **N**. Pode-se então obter o número de zeros (instáveis) de $\boldsymbol{F(s)}$ no contorno original $\mathbf{\Gamma_S}$ que, pelo Teorema de Chauchy, basta fazer:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} + \mathbf{P}$$

Se, por exemplo, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, então o número de raízes instáveis **Z** é igual a **N**. Se o novo contorno $\mathbf{\Gamma_F}$ no plano-$\boldsymbol{F(s)}$ não envolve a origem, então $\mathbf{Z} = \mathbf{N} = \mathbf{0}$ e, portanto, o sistema em malha fechada é estável. Caso contrário, é instável

Nota Para facilitar, normalmente a análise é feita usando apenas o ganho em malha $KG_c(s)G(s)$ (que é equivalente ao estudo que fizemos para o Lugar das Raízes!). Então é mais **conveniente** usar:

$$F'(s) = F(s) - 1 = KG_c(s)G(s) = 0$$

Desta forma o mapeamento do contorno Γ_S no novo contorno no plano-$F'(s)$, será feito via a função $F'(s)$ (que é o padrão usado no MATLAB©). Assim:

- Número de cercos da origem (no sentido horário) do contorno $\Gamma_{F(s)}$ no plano-$F(s)$, corresponde exatamente ao número de cercos (no sentido horário) do **ponto (-1,0)** do contorno $\Gamma_{F'(s)}$ no plano-$F'(s)$

Critério de Estabilidade de Nyquist

⇝ O critério de Nyquist pode ser enunciado da seguinte forma:

> *"Suponha que o número de polos do ganho em malha $KG_c(s)G(s)$ no semi-plano direito no plano-s é nulo (i.e., $\mathsf{P} = 0$).* **Um sistema realimentado é estável se, e somente se, o novo contorno $\Gamma_{F'(s)}$ no plano-$F'(s)$ não envolve o ponto $(-1{,}0)$***"*

No entanto, quando o número de polos do ganho em malha $KG_c(s)G(s)$ no semi-plano direito do plano-s é diferente de zero, tem-se o critério de Nyquist:

> *"Um sistema realimentado é estável se, e somente se, para o contorno $\Gamma_{F'(s)}$ no plano-$F'(s)$* **o número de cercos no sentido anti-horário do ponto $(-1{,}0)$ é igual ao número de polos de $KG_c(s)G(s)$ no semi-plano direito no plano-s***"*

Implica que $\mathsf{N} = -\mathsf{P}$ e, portanto, $\mathsf{Z} = \mathsf{N} + \mathsf{P} = -\mathsf{P} + \mathsf{P} = 0$ (estável)

Resumidamente – Critério de Nyquist

Dado o ganho em malha $KG_c(s)G(s)$, verifique primeiro a localização no plano-s dos polos de $KG_c(s)G(s)$

$\rightsquigarrow$ **Se todos os polos de $KG_c(s)G(s)$ estão no semi-plano esquerdo** tem-se **P** $= 0$. Então pode-se ter duas situações considerando **Z** $=$ **N** $+$ **P**

- O diagrama de Nyquist no plano-$F'(s)$ não envolve o ponto $(-1{,}0)$ e, portanto, **N** $= 0$. Assim, **Z** $= 0$ e não há zeros no semi-plano direito implicando que o sistema em malha fechada é estável
- O diagrama de Nyquist envolve o ponto $(-1{,}0)$ e, portanto, **N** $\neq 0$. Assim, **Z** $\neq 0$ o que implica que há zeros no semi-plano direito e, consequentemente, o sistema em malha fechada é instável

Resumidamente – Critério de Nyquist

$\rightsquigarrow$ **Se o ganho em malha $KG_c(s)G(s)$ tem algum polo no semi-plano direito** então **P** $\neq \mathbf{0}$. Pode-se ter três situações considerando **Z** $=$ **N** $+$ **P**

- O diagrama de Nyquist no plano-$F'(s)$ não envolve o ponto $(-1{,}0)$ e, portanto, **N** $= 0$. Assim, **Z** $=$ **P** $\neq \mathbf{0}$, indicando que há zeros no semi-plano direito e implicando que o sistema em malha fechada é instável

- O diagrama de Nyquist envolve o ponto $(-1{,}0)$ e, portanto, **N** $\neq \mathbf{0}$.
  - $\hookrightarrow$ **Se envolve $(-1{,}0)$ no sentido anti-horário e o número de cercos é N $= -$P**, então **Z** $= \mathbf{0}$ e o sistema em malha fechada é estável
  - $\hookrightarrow$ **Se envolve $(-1{,}0)$ no sentido horário**, então não há possibilidade de cancelamento entre **N** e **P**. Neste caso **Z** $=$ **N** $+$ **P** $\neq \mathbf{0}$ e o sistema em malha fechada é instável

Critério de Estabilidade de Nyquist

Exemplo Considere um sistema com ganho em malha

$$L(s) = \frac{100}{(s+1)(s/10+1)} = \frac{100}{(j\omega+1)(j\omega/10+1)}$$

Para esboçar o diagrama de Nyquist, faça ω variar de $\mathbf{0}$ a ∞ tal que:

ω	0	10^{-2}	0.76	2	3.2	10	10^{3}	∞
$\lvert GH \rvert$	100	100	79.2	43.8	25	7.1	10^{-5}	0
$\underline{/GH}$	0^{0}	-1^{0}	-42^{0}	-75^{0}	-90^{0}	-129^{0}	-179^{0}	-180^{0}

É estável pelo critério de Nyquist? veja o traçado a seguir...

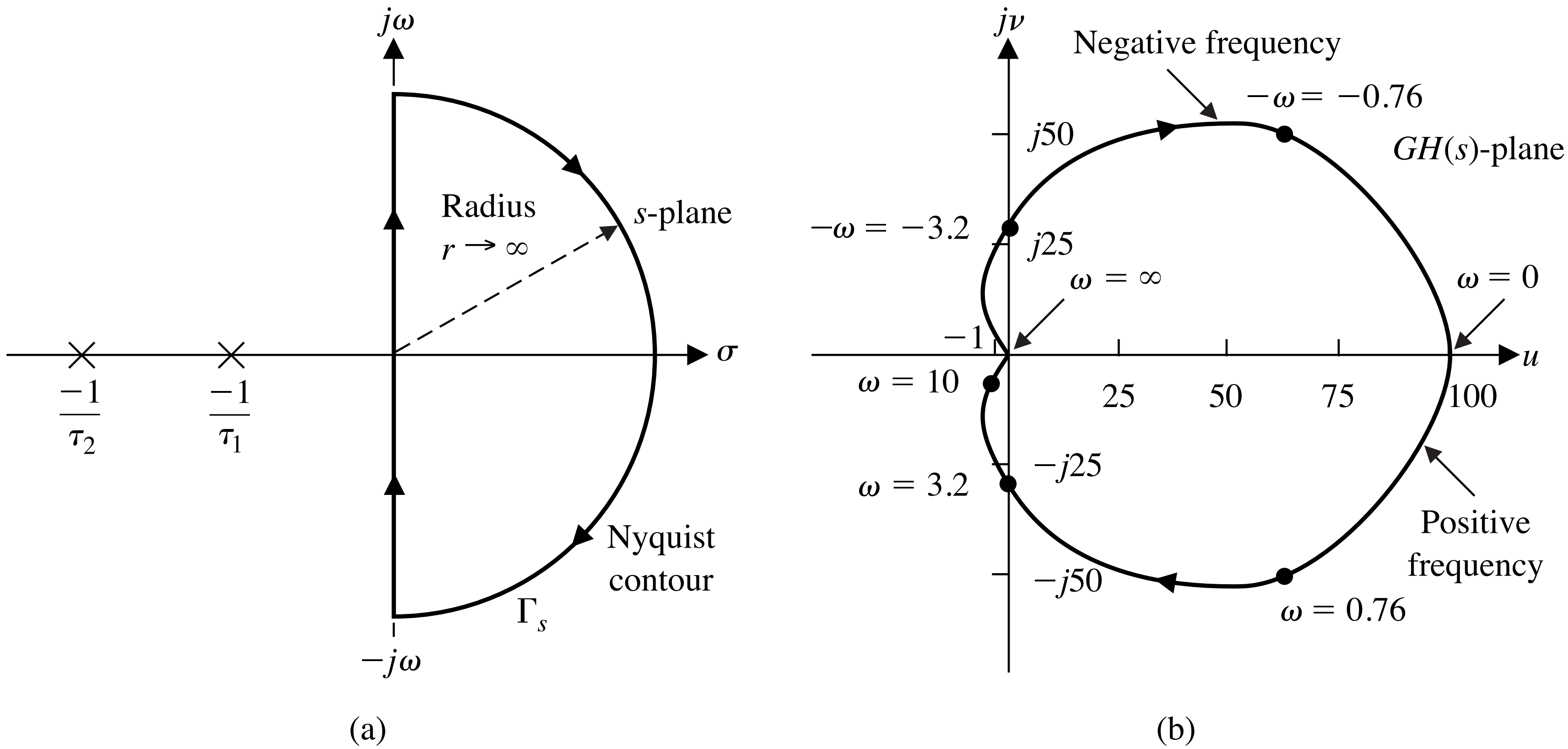


Figure 9.9 Nyquist contour and mapping for $GH(s) = 100/(s + 1)(s/10 + 1)$

Exemplo Considere o ganho em malha dado por:

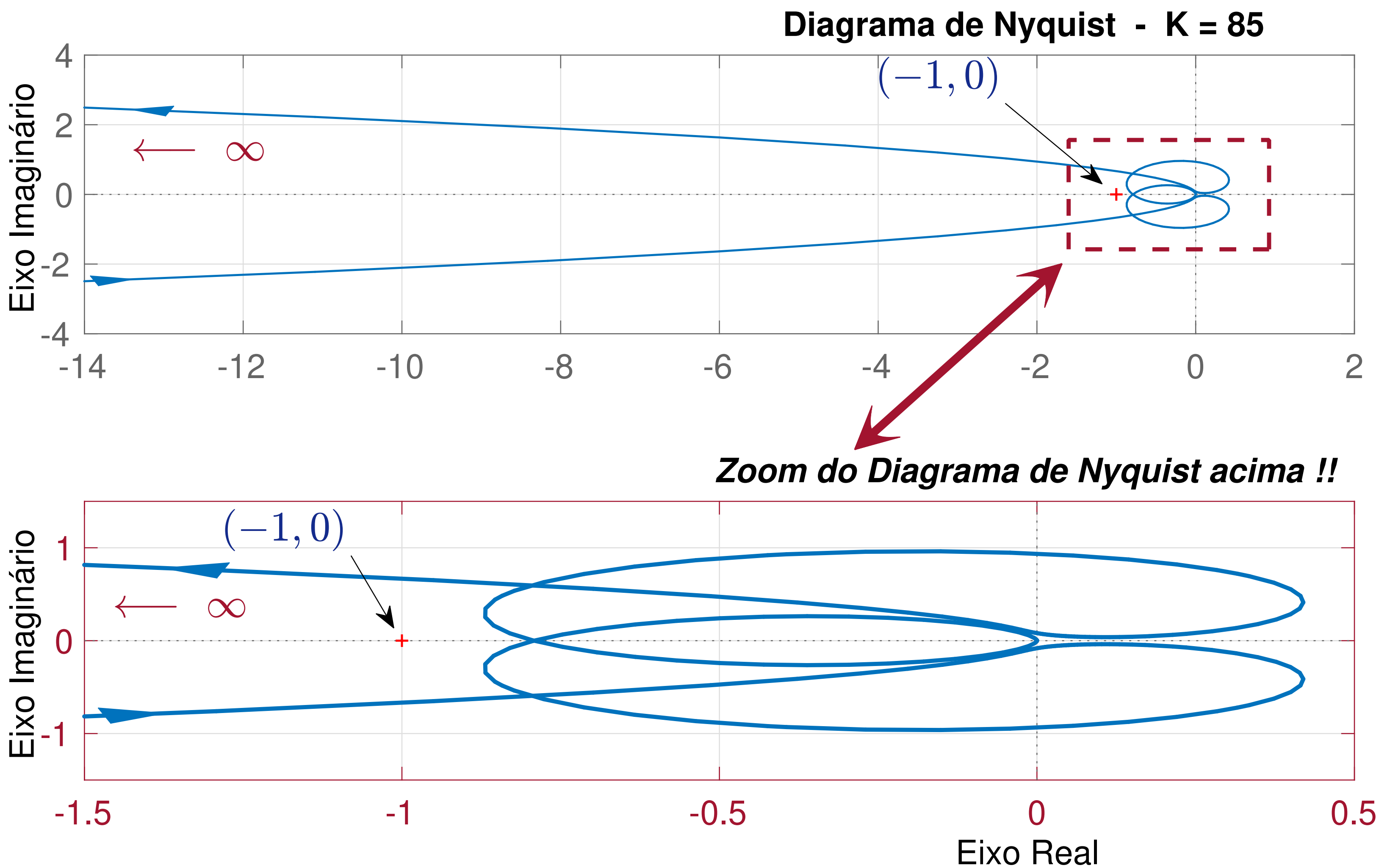
$$KG_c(s)G(s) = K \times \frac{(s+1)(s^2+2s+43.25)}{s^2(s^2+2s+82)(s^2+2s+101)}$$

▷ Há dois integradores ($s_{1,2} = 0$) e quatro polos em: $s_{5,6} = -1 \pm j9$ e $s_{3,4} = -1 \pm j10$. Note que nenhum dos polos do ganho em malha estão no semi-plano direito, portanto, $\mathsf{P} = 0$!

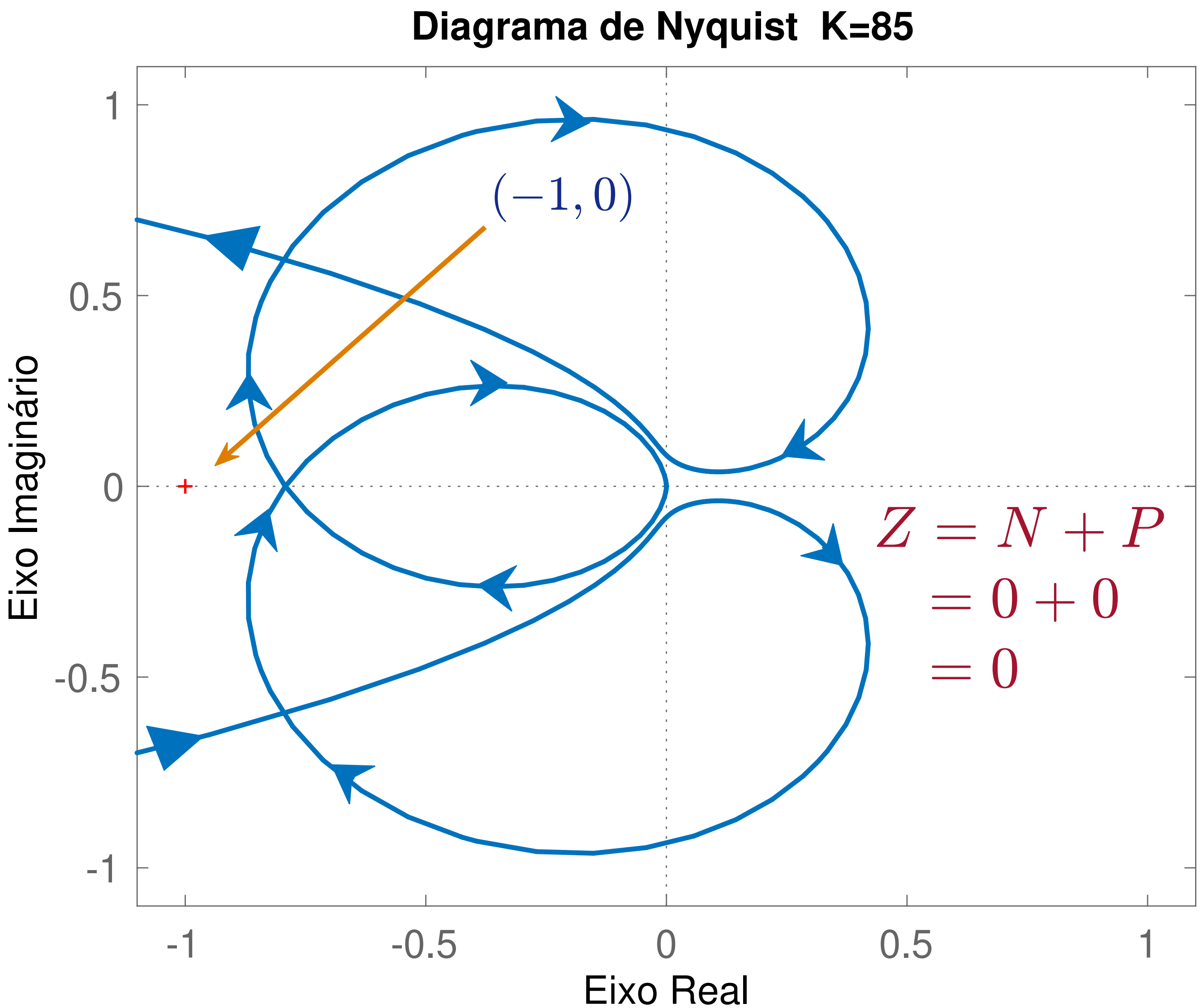
▷ A pergunta a ser respondida é: há zeros no semi-plano direito (que neste caso são polos em malha fechada)? Basta checar se $\mathsf{Z} = \mathsf{N} + \mathsf{P} = \mathsf{N} + 0 \neq 0$. Em outras palavras, o contorno cruza ou envolve o ponto -1 tal que $\mathsf{N} \neq 0$? Note que se $\mathsf{Z} = 0$, então implica em estabilidade, caso contrário instabilidade

▷ A ideia neste exemplo é escolher valores específicos de K e avaliar os traçados dos contornos $\Gamma_{F'}$ no plano-F' no diagrama de Nyquist obtidos

Traçado do Diagrama de Nyquist p/ $K = 85$

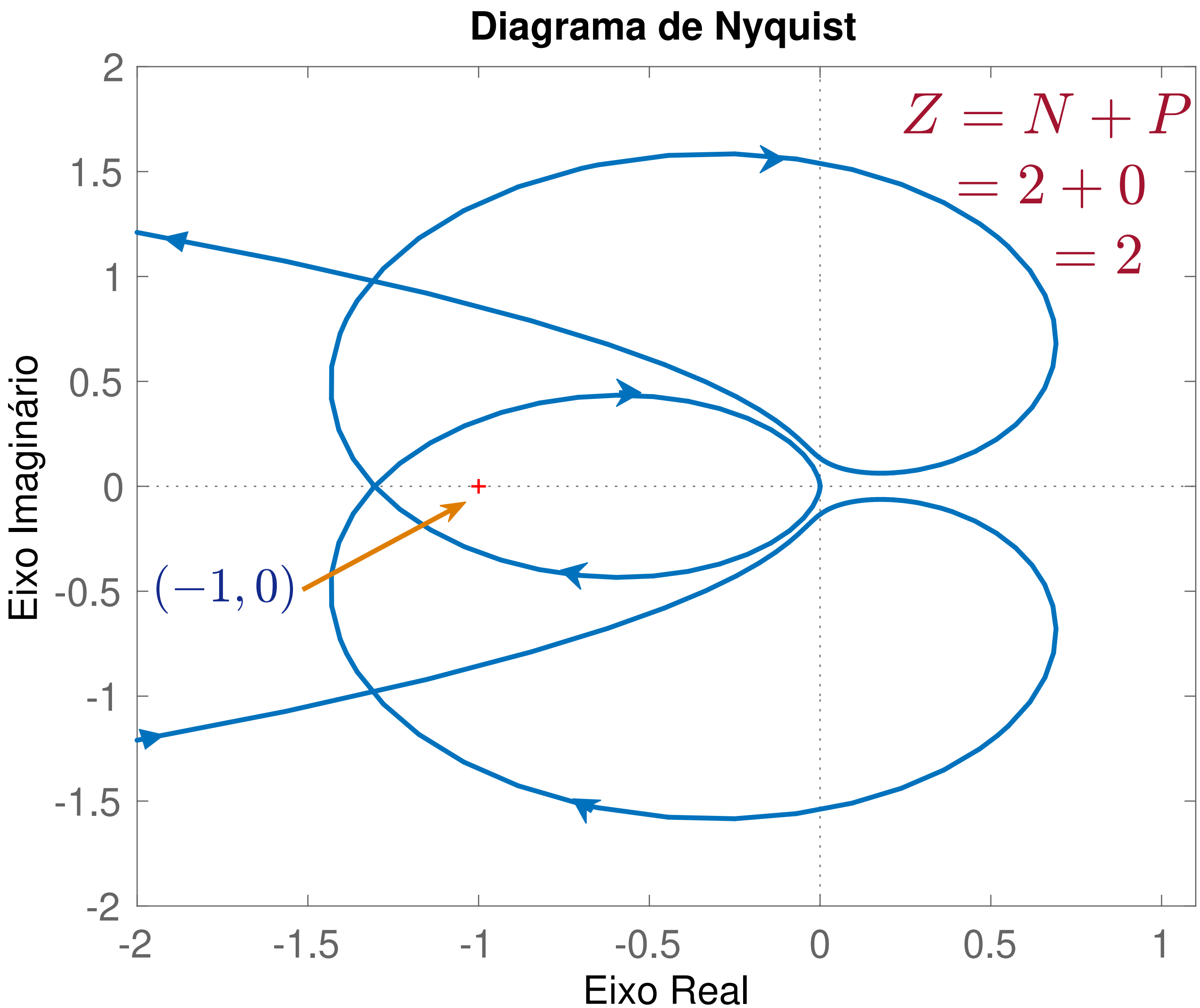


Traçado do Diagrama de Nyquist p/ $K = 85$

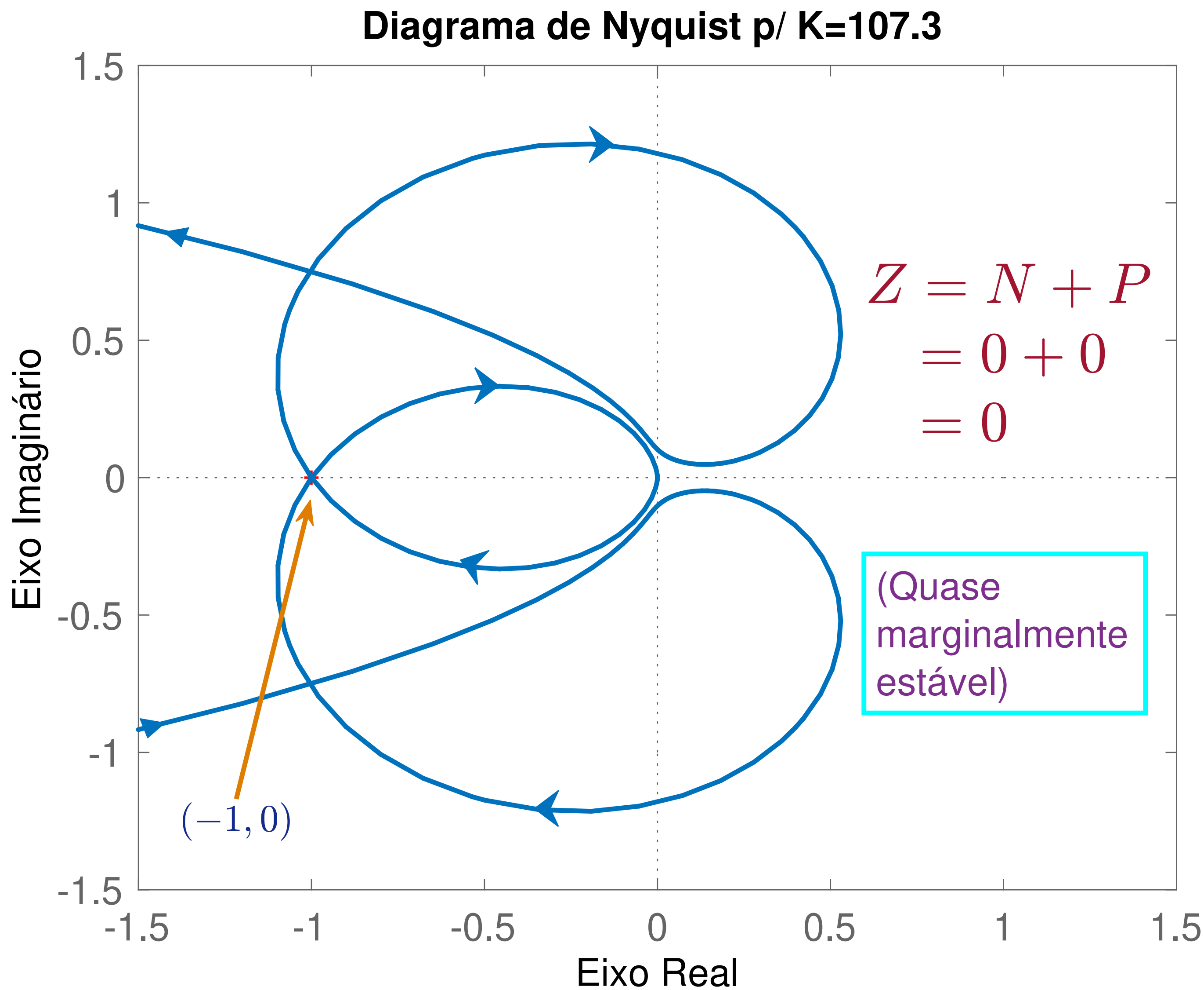


$$
\begin{aligned}
Z &= N + P \\
&= 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

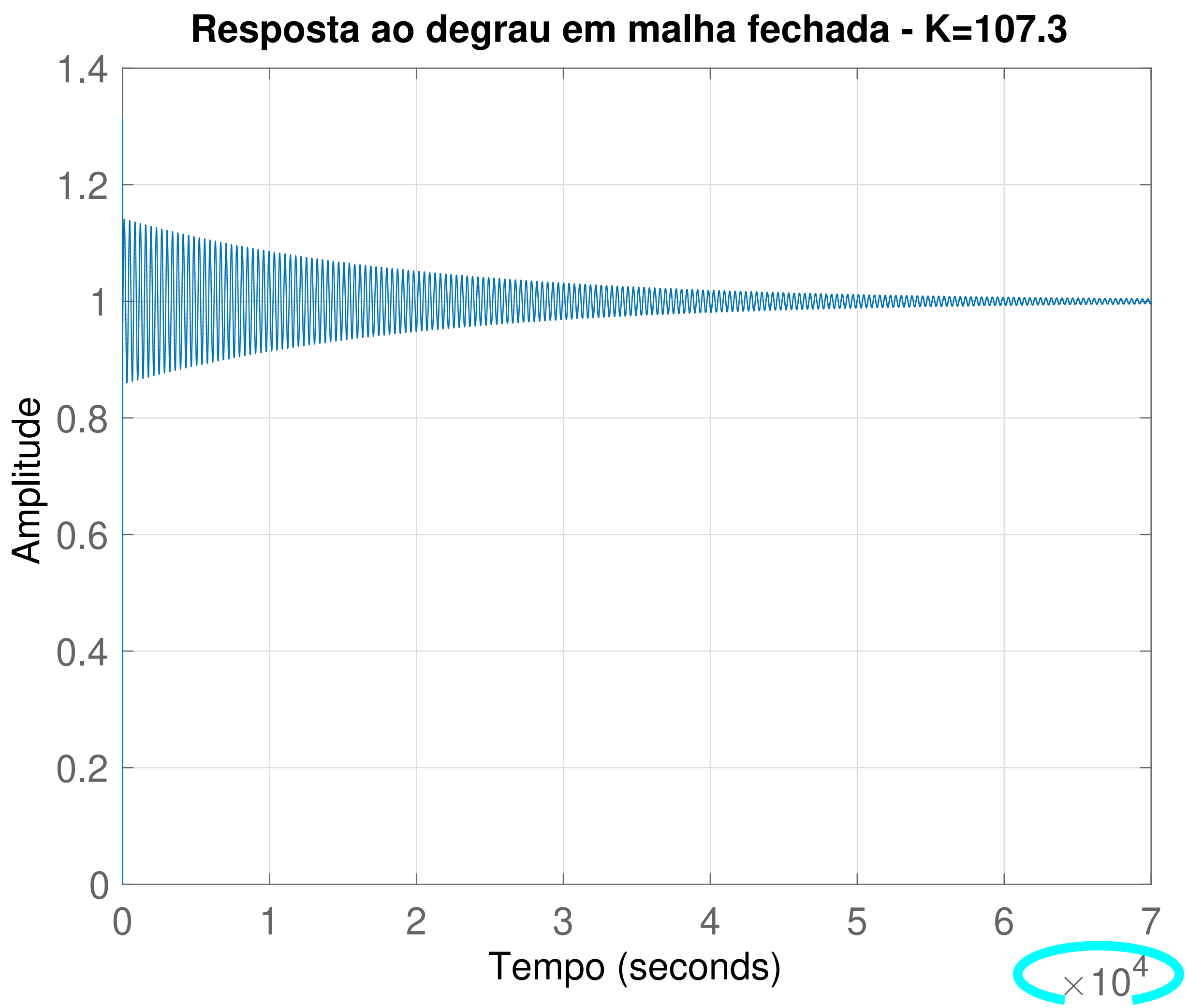
Faça $K = 140$ – Diagrama de Nyquist? Instável...



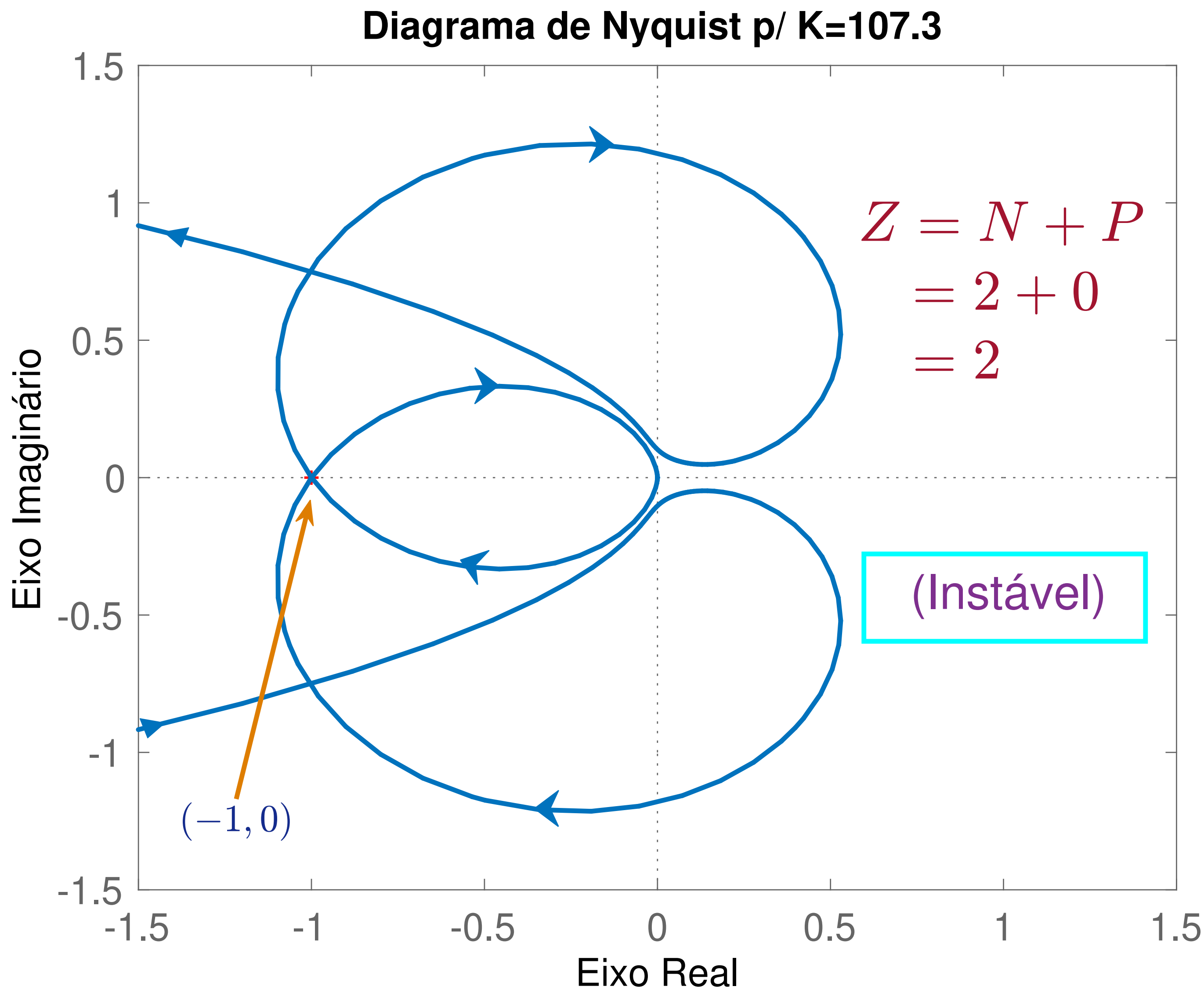
Faça $K = 107.3$ – Quase marginalmente estável...



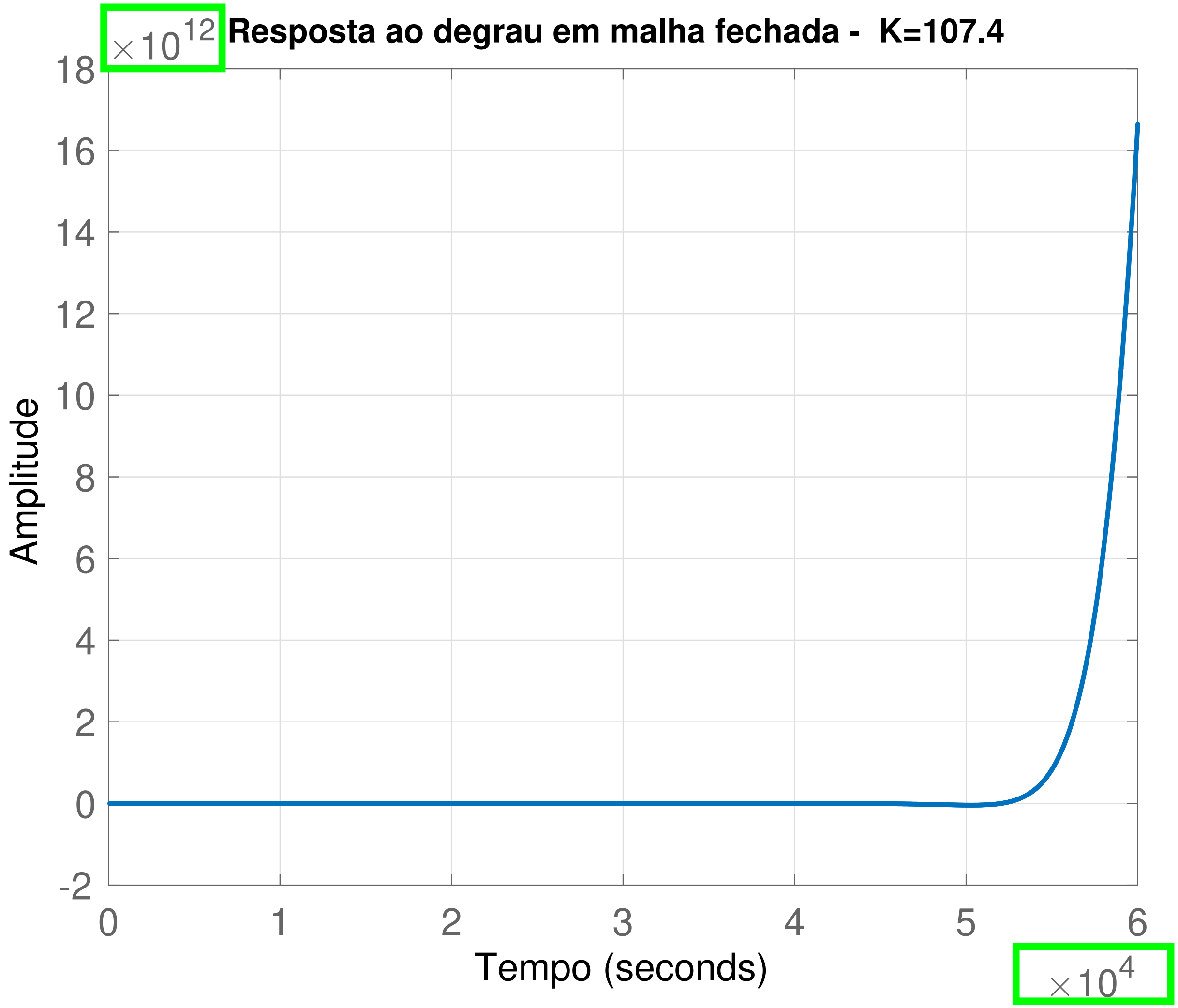
Resposta ao degrau para $K = 107.3$



Faça $K = 107.4$ – Instável...



Resposta ao degrau para $K = 107.4$ – Instável



Localização dos Polos em malha fechada?

▷ A título de curiosidade, pode-se calcular onde estão localizados os polos em malha fechada para cada um dos valores de ganhos $\boldsymbol{K}$. Lembrando que em malha fechada tem-se (considerando realimentação negativa e unitária):

$$\boldsymbol{T(s) = \frac{K G_c(s) G(s)}{1 + K G_c(s) G(s)}}$$

▷ Para $\boldsymbol{K = 85}$, o critério de Nyquist indicou estabilidade e os polos em malha fechada são: $\boldsymbol{-0.2221 \pm j0.6278}$; $\boldsymbol{-1.6385 \pm j88.6923}$ e $\boldsymbol{-0.1389 \pm j10.2655}$ (todos no semi-plano esquerdo)

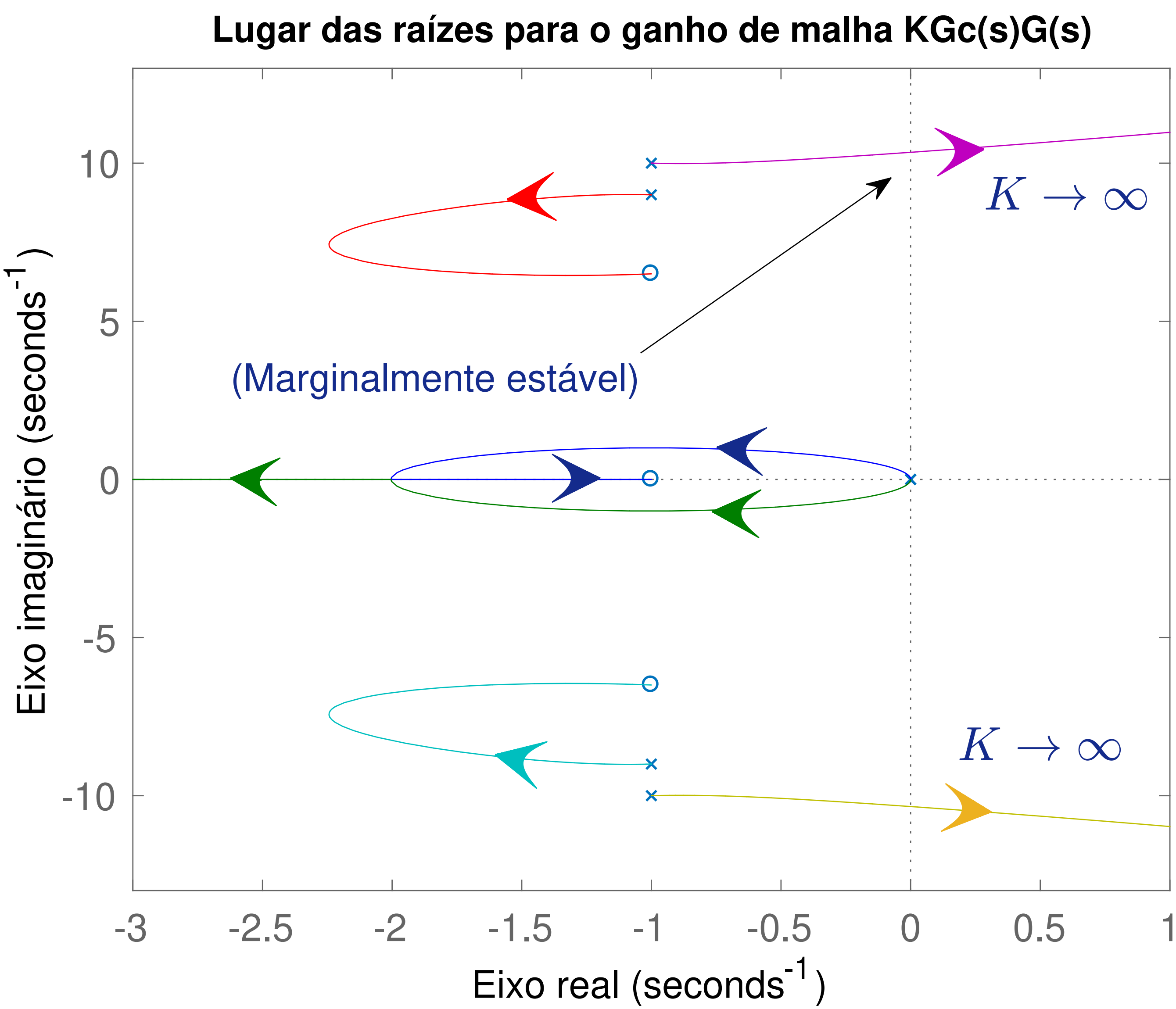
▷ Para $\boldsymbol{K = 140}$, o critério de Nyquist indicou instabilidade e os polos em malha fechada são: $\boldsymbol{-0.3655 \pm j0.7721}$, $\boldsymbol{-1.8160 \pm j8.5242}$ e $\boldsymbol{0.1817 \pm j10.4483}$ (dois polos no semi-plano direito)

Localização dos Polos em malha fechada?

▷ Para $\boldsymbol{K = 107.3}$, o critério de Nyquist indicou estabilidade (de fato, quase marginalmente estável). Os polos em malha fechada são: $\boldsymbol{-0.2803 \pm j0.6935}$, $\boldsymbol{-1.7195 \pm j8.6356}$ e $\boldsymbol{-0.0001 \pm j10.3441}$ (todos no semi-plano esquerdo)

▷ Para $\boldsymbol{K = 107.4}$, o critério de Nyquist indicou instabilidade e os polos em malha fechada são: $\boldsymbol{-0.2805 \pm j0.6938}$, $\boldsymbol{-1.7200 \pm j8.6355}$ e $\boldsymbol{0.0005 \pm j10.3441}$ (dois polos no semi-plano direito)

Curiosidade: Lugar das Raízes para $KG_c(s)G(s)$?



Nyquist & Matlab ?

Traçando diagrama de Nyquist via Matlab para o ganho em malha:

$$KG_c(s)G(s) = K \times \frac{(s+1)(s^2+2s+43.25)}{s^2(s^2+2s+82)(s^2+2s+101)}$$

Linha de comando no Matlab

```
% Construindo o Ganho em Malha (note, sem o valor de K que é variável!):

>> GM = tf(conv([1 1],[1 2 43.25]),conv([1 0 0],conv([1 2 82],[1 2 101])))

GM =

        s^3 + 3 s^2 + 45.25 s + 43.25
  ------------------------------------------
  s^6 + 4 s^5 + 187 s^4 + 366 s^3 + 8282 s^2
```

Nyquist & Matlab ?

```
% Por exemplo, considerando K=85, como ficaria o traçado?
>> K = 85;

% Ganho em malha para K = 85
>> K_Ganho_em_malha = K * GM

K_Ganho_em_malha =

       85 s^3 + 255 s^2 + 3846 s + 3676
  ------------------------------------------
  s^6 + 4 s^5 + 187 s^4 + 366 s^3 + 8282 s^2

% Trace o diagrama de Nyquist do Ganho em Malha para K=85 usando "nyquist"

>> nyquist(K_Ganho_em_malha)
```

Para avaliar detalhes, aplique zoom