Estabilidade para Sistemas LVT

1. Estabilidade de Sistemas Variantes no Tempo
2. Estabilidade da Resposta à Entrada Nula

Estabilidade de Sistemas Variantes no Tempo

Considere um sistema SISO LVT descrito por $y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,\tau)u(\tau)d\tau$

▷ O sistema é BIBO estável se toda entrada limitada causa uma saída limitada

▷ O sistema é BIBO estável se, e somente se, existir uma constante M tal que

$$\int_{t_0}^{t} \mid g(t,\tau) \mid \, d\tau \leq M < \infty, \quad \forall\, t, t_0, \text{ com } t \geq t_0$$

▶ Caso multivariável: $y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau$

A condição para BIBO estabilidade é que cada elemento de $G(t,\tau)$ satisfaça a relação acima. Essa condição pode ser expressa em termos de normas

Estabilidade de Sistemas Variantes no Tempo

Reformulando... A condição necessária e suficiente para que um sistema multivariável seja BIBO estável é que exista uma constante M tal que

$$\int_{t_0}^{t} \|G(t,\tau)\| \, d\tau \leq M < \infty$$

para todo t, t_0 com $t \geq t_0$ ($\| \cdot \|$ denota uma norma qualquer)

Considerando uma descrição por equações de estado

$$\begin{cases} \dot{x} & = & A(t)x + B(t)u \\ y & = & C(t)x + D(t)u \end{cases}$$

tem-se que a matriz resposta ao impulso é dada por

$$G(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

Estabilidade de Sistemas Variantes no Tempo

e a resposta ao estado inicial nulo é

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

Portanto, a resposta ao estado inicial nulo da equação dinâmica é BIBO estável se, e somente se, existirem constantes M_1 e M_2 tais que

$$\|D(t)\| \leq M_1 < \infty$$

$$\int_{t_0}^{t} \|C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)\|d\tau \leq M_2 < \infty$$

para todo t, t_0 com $t \geq t_0$

Estabilidade da Resposta à Entrada Nula

▷ A resposta à entrada nula ou para a equação autônoma LVT: $\dot{x} = A(t)x$, é marginalmente estável se toda condição inicial finita provoca uma resposta limitada. Como a solução é governada por

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$$

tem-se que a resposta à entrada nula é marginalmente estável se, e somente se, existir uma constante M tal que

$$\|\Phi(t,t_0)\| \leq M < \infty \quad \text{para todo } t_0 \text{ e } t \geq t_0$$

▷ A equação $\dot{x} = A(t)x$ assintoticamente estável se a resposta a toda condição inicial finita for limitada e tender a zero quando $t \to \infty$, isto é:

$$\|\Phi(t,t_0)\| \to 0 \quad \text{para} \quad t \to \infty$$

Estabilidade da Resposta à Entrada Nula

▷ No caso invariante no tempo, $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável se todos os autovalores de A têm parte real negativa. Isso não é verdade no caso variante no tempo. Por exemplo, considere (Problema 4.16, pg. 120, Chen):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

Note que o polinômio característico é: $\Delta(\lambda) = (\lambda + 1)^2$, com autovalores dados por -1 e -1 (parte real negativa). No entanto, a resposta $x(t)$ depende, exclusivamente, da matriz de transição de estados dada por:

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0.5(e^{t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Observe que o bloco $(1,2)$ cresce indefinidamente, então o sistema não é estável

Estabilidade da Resposta à Entrada Nula

▷ Todas as propriedades de estabilidade de um sistema invariante no tempo se preservam sob transformações de equivalência ✓

▷ No caso variante no tempo, a BIBO estabilidade se preserva pois a matriz resposta ao impulso não se altera com uma transformação de equivalência ✓

▷ Como, entretanto, é possível transformar $\dot{x} = A(t)x$ em $\dot{\bar{x}} = A_0\bar{x}$, com A_0 constante (Teorema 4.3, pag. 112, Chen), a estabilidade marginal e assintótica não se preservam sob qualquer transformação de equivalência

Teorema As estabilidades marginal e assintótica de $\dot{x} = A(t)x$ se preservam sob qualquer transformação de Lyapunov equivalente

Estabilidade da Resposta à Entrada Nula

▷ Como $P(t)$ e $\dot{P}(t)$ são contínuas e $P(t)$ é não singular para todo t, então $\bar{x} = P(t)x$ é uma transformação algébrica. Se, além disso, $P(t)$ e $P^{-1}(t)$ são limitadas para todo t, $\bar{x} = P(t)x$ é uma transformação de Lyapunov. Note que as matrizes fundamentais de $\dot{x} = A(t)x$ e $\dot{\bar{x}} = \bar{A}(t)\bar{x}$ se relacionam por

$$\bar{\chi}(t) = P(t)\chi(t)$$

e, portanto:

$$\bar{\Phi}(t,\tau) = \bar{\chi}(t)\bar{\chi}^{-1}(\tau) = P(t)\chi(t)\chi^{-1}(\tau)P^{-1}(\tau) = P(t)\Phi(t,\tau)P^{-1}(\tau)$$

Como $P(t)$ e $P^{-1}(t)$ são limitadas, se $\|\Phi(t,\tau)\|$ é limitada, então $\|\bar{\Phi}(t,\tau)\|$ também será limitada; se $\|\Phi(t,\tau)\| \to 0$ quando $t \to \infty$, então o mesmo ocorre com $\|\bar{\Phi}(t,\tau)\| \to 0$ quando $t \to \infty$

Estabilidade da Resposta à Entrada Nula

▷ Em sistemas invariantes no tempo, a estabilidade assintótica da resposta à entrada nula implica na BIBO estabilidade da resposta ao estado inicial nulo ✓

▷ Não necessariamente isso é verdade para sistemas variantes no tempo

Note que a estabilidade assintótica ocorre se $\|\Phi(t,\tau)\| \to 0$, quando $t \to \infty$, $\forall\, t$, t_0 com $t \geq t_0$, e a BIBO estabilidade ocorre se

$$\int_{t_0}^{t} \|C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)\| d\tau < \infty, \ \ \forall\, t, t_0 \ \text{ com } t \geq t_0$$

No entanto, uma função que tende a zero pode não ser absolutamente integrável

▷ Se $\|\Phi(t,\tau)\|$ tende a zero rapidamente e se $B(t)$ e $C(t)$ são limitadas, a estabilidade assintótica implica na BIBO estabilidade ✓

Problema 5.23, pag. 142, Chen Cheque a estabilidade do sistema autônomo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -e^{-3t} & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad \text{, para } t_0 \geq 0$$

Note que $\dot{x}_1(t) = -x_1(t)$ e, então, $x_1(t) = e^{\int_0^t -1dt} x_1(0) = e^{-t} x_1(0)$

Já $\dot{x}_2(t) = -e^{-3t} x_1(t) = -e^{-4t} x_1(0)$, que integrando gera:

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{x}_2(t)dt &= -\int_0^t e^{-4t} x_1(0)dt \\ x_2(t) - x_2(0) &= -\left.\frac{-1}{4} e^{-4t}\right|_0^t x_1(0) \\ x_2(t) &= \frac{1}{4} e^{-4t} x_1(0) - \frac{1}{4} x_1(0) + x_2(0) \end{aligned}$$

Estabilidade da Resposta à Entrada Nula

Por exemplo, para $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 0$ tem-se:

$$\chi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ \frac{1}{4}\left(e^{-4t} - 1\right) \end{bmatrix}$$

e para $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 1$ tem-se:

$$\chi_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

portanto, uma matriz fundamental é:

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{4}\left(e^{-4t} - 1\right) & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \chi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ \frac{1}{4}\left(e^{t} - e^{-3t}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

Estabilidade da Resposta à Entrada Nula

A matriz de transição é dada por:

$$\begin{aligned}\Phi(t,t_0) = \chi(t)\chi^{-1}(t_0) &= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ \frac{1}{4}\left(e^{-4t}-1\right) + \frac{1}{4}\left(e^{t_0}-e^{-3t_0}\right) & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ \frac{1}{4}\left(e^{-(4t+t_0)}-e^{-3t_0}\right) & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Note que para $t_0 \geq 0$ e $\forall t \geq t_0$ todos os elementos de $\Phi(t,t_0)$ são limitados. Indicando que o sistema é no mínimo marginalmente estável. Pergunta: o sistema é assintoticamente estável, i.e., $\|\Phi(t,t_0)\| \to 0$, quando $t \to \infty$? É fácil notar que esta condição não é satisfeita já que, por exemplo, mesmo se $t_0 = 0$, o termo $(2,2)$ é sempre constante e igual a 1

Exercício

Problema 5.21, pag. 142, Chen Considere a equação variante no tempo

$$\dot{x} = 2tx + u, \qquad y = e^{-t^2}x$$

Cheque se é BIBO estável, marginalmente estável ou assintoticamente estável?

- ▷ Cômpute a "matriz" de transição $\Phi(t, t_0)$ (note que é escalar...)
- ▷ Cômpute a resposta ao impulso $g(t, \tau)$
- ▷ Aplique os testes...