Estabilidade Interna

1. Pontos de Equilíbrio
2. Análise de Estabilidade Segundo Lyapunov
3. Teorema de Lyapunov – Caso a tempo contínuo
4. Teorema de Lyapunov – Caso a tempo discreto

Aquecendo os motores – Pontos de Equilíbrio?

Pontos de Equilíbrio?

Pontos de Equilíbrio

Note que a BIBO estabilidade é definida para a resposta ao estado inicial nulo. Para se estudar a resposta à entrada nula, considere o sistema autônomo LIT:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

com condição inicial não nula, x_0. A solução é: $x(t) = e^{At}x_0$

▷ Um ponto de equilíbrio é alcançado quando $\dot{x}(t) \equiv \mathbf{0}$

▷ No caso contínuo, todas as derivadas nulas significam que os estados não estão variando no tempo e, portanto, são indicados como estados ou pontos de equilíbrio, x_e

Pontos de Equilíbrio – Estudo de Caso

Retornemos ao exemplo da Aula 1 considerando o sistema não-linear descrito por:

$$\ddot{y}(t) + (1 + y(t))\dot{y}(t) - 2y(t) + 0.5y^3(t) = 0$$

Definindo-se $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$, tem-se o modelo em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_1 - 0.5x_1^3 - (1 + x_1)x_2 \end{bmatrix} = f(x(t))$$

▷ Os pontos de equilíbrio são soluções para $\dot{x}(t) = f(x(t)) = 0$ e, portanto, cada uma deve satisfazer $x_2 = 0$ e $2x_1 - 0.5x_1^3 = 0$

▷ Obtém-se então três soluções: $x_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_{e2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_{e3} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Análise de Estabilidade Segundo Lyapunov

Estabilidade no sentido de Lyapunov Seja $\mathcal{R}(\nu)$ a região que consiste de todos os pontos tais que

$$\|x_0 - x_e\| \leq \nu, \quad \nu > 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = \text{estado inicial}$$

e seja $\mathcal{R}(\varepsilon)$ a região que consiste de todos os pontos tais que

$$\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \varepsilon > \nu \quad \forall t > 0$$

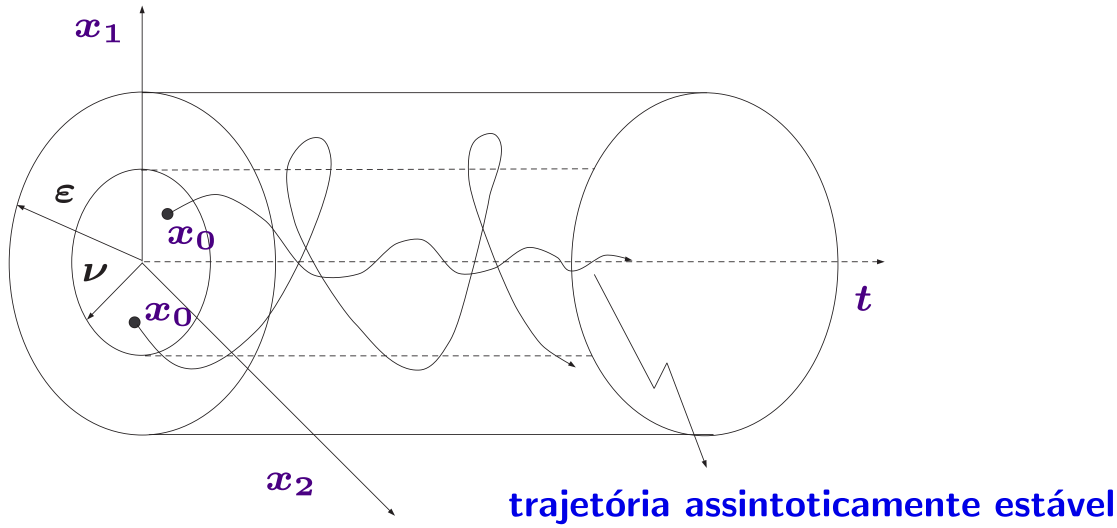
▷ Um estado de equilíbrio x_e do sistema autônomo é dito **estável no sentido de Lyapunov** se, correspondendo a cada $\mathcal{R}(\varepsilon)$ houver um $\mathcal{R}(\nu)$ tal que toda trajetória iniciada em $\mathcal{R}(\nu)$ está confinada em $\mathcal{R}(\epsilon)$ à medida que t cresce

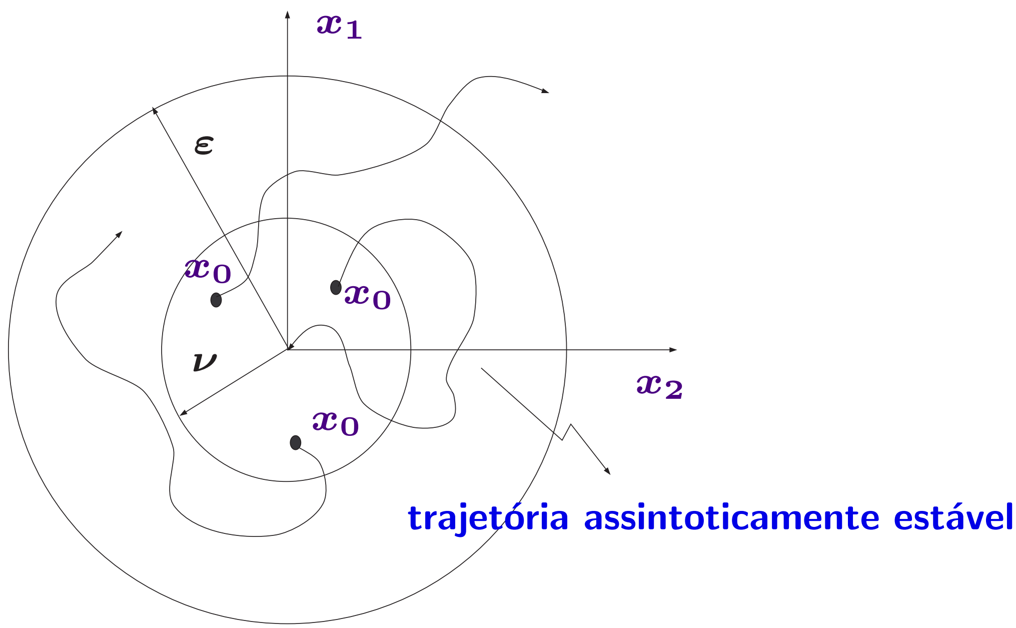
Análise de Estabilidade Segundo Lyapunov

Estabilidade Assintótica Um estado de equilíbrio x_e do sistema autônomo é dito ser **assintoticamente estável** se for estável no sentido de Lyapunov, e se toda solução começando em $\mathcal{R}(\nu)$ converge para x_e, sem deixar $\mathcal{R}(\varepsilon)$ a medida que t aumenta

Instabilidade Um estado de equilíbrio do sistema autônomo é dito ser instável se, para algum escalar $\varepsilon > 0$, e todo escalar $\nu > 0$, há sempre um estado x_0 em $\mathcal{R}(\nu)$ tal que a trajetória iniciando neste estado deixa a região $\mathcal{R}(\varepsilon)$

Ilustração das definições





Estabilidade Interna

Note que a definição de estabilidade (para sistemas linearizados) pode ser operacionalizada da forma:

Teorema A equação $\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ é marginalmente estável se, e somente se, todos os autovalores de $\boldsymbol{A}$ têm parte real igual a zero ou negativa e aqueles que têm parte real igual a zero são raízes de multiplicidade $\mathbf{1}$ do polinômio mínimo de $\boldsymbol{A}$

Teorema A equação $\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ é assintoticamente estável se, e somente se, todos os autovalores de $\boldsymbol{A}$ têm parte real negativa

Nota Antes de entendermos como se constrói os resultados acima, retornamos ao estudo de caso na página 4 para avaliarmos os pontos (ou estados) de equilíbrio

Retornando ao Estudo de Caso – Pág. 4

▷ Relembrando: A matriz Jacobiana é dada da forma:

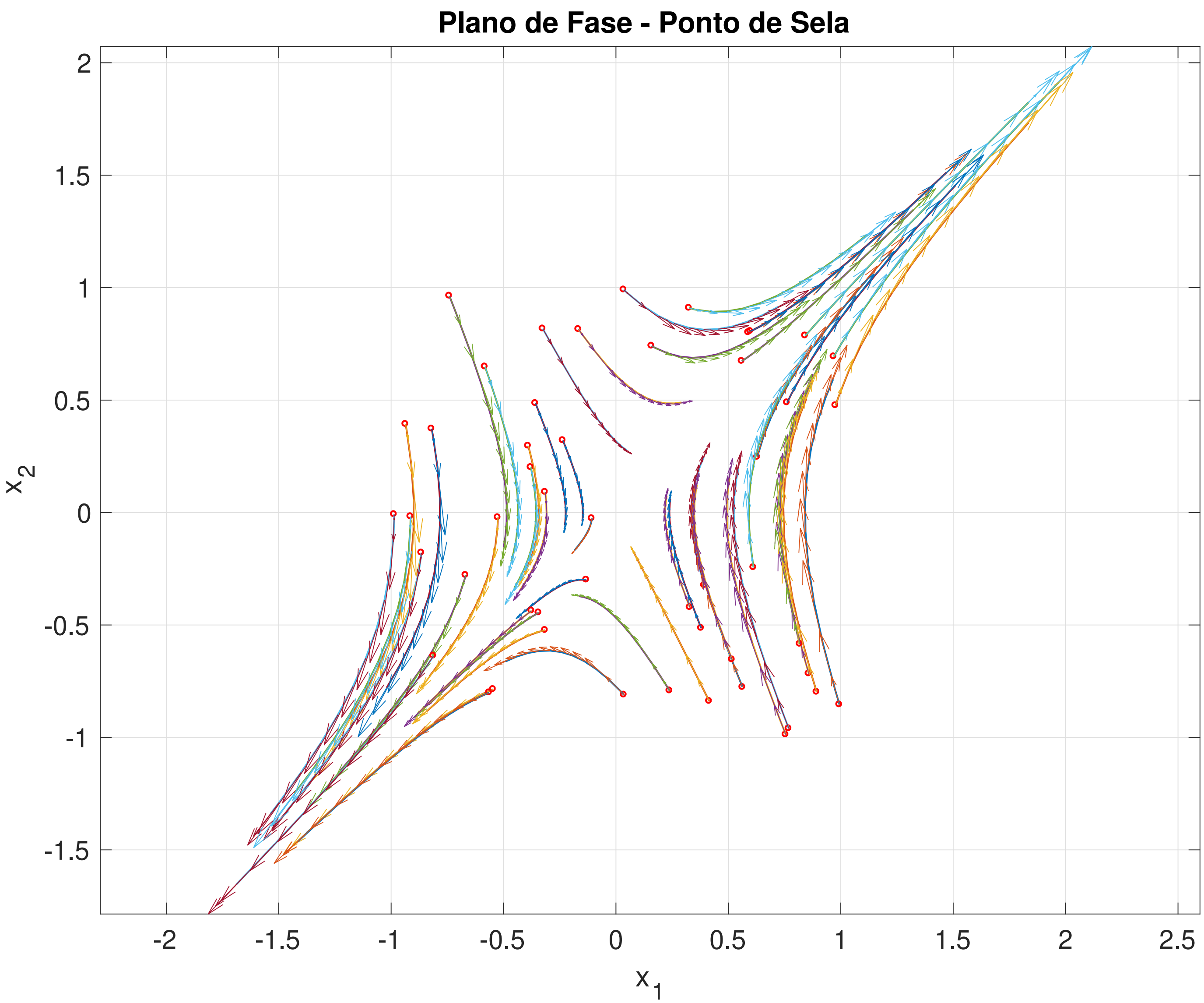
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 - \frac{3x_1^2}{2} - x_2 & -(1 + x_1) \end{bmatrix}$$

▷ Linearizando ao redor do ponto de equilíbrio $x_{e1} = [0 \ \ 0]'$, tem-se:

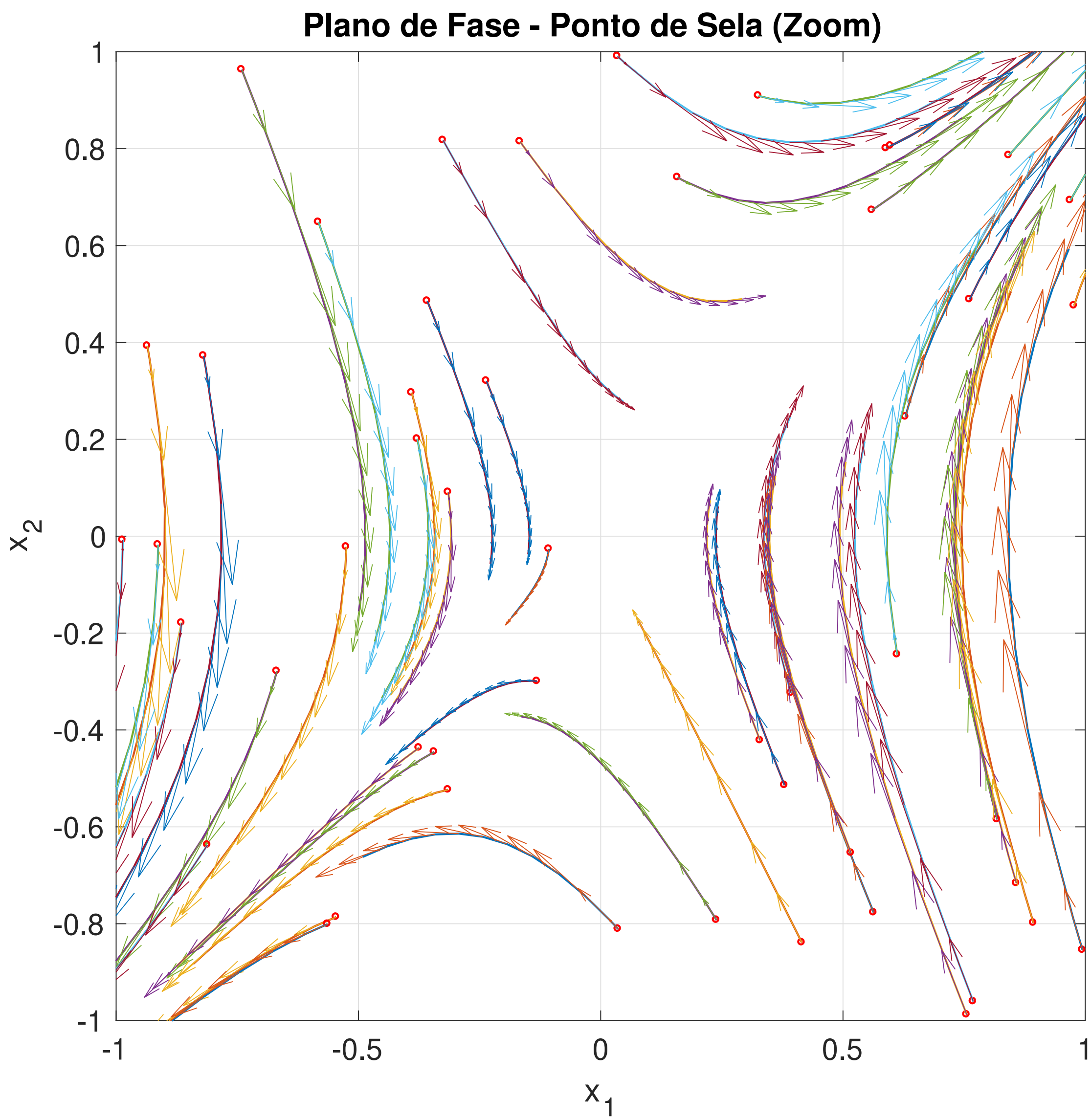
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x_{e1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

que tem autovalores em $+1$ e -2 e, portanto, x_{e1} é um ponto de sela. O plano de fase é ilustrado a seguir

Pontos de Equilíbrio – Ponto de Sela



Pontos de Equilíbrio – Ponto de Sela



Retornando ao Estudo de Caso – Pág. 4

▷ Linearizando ao redor do ponto de equilíbrio

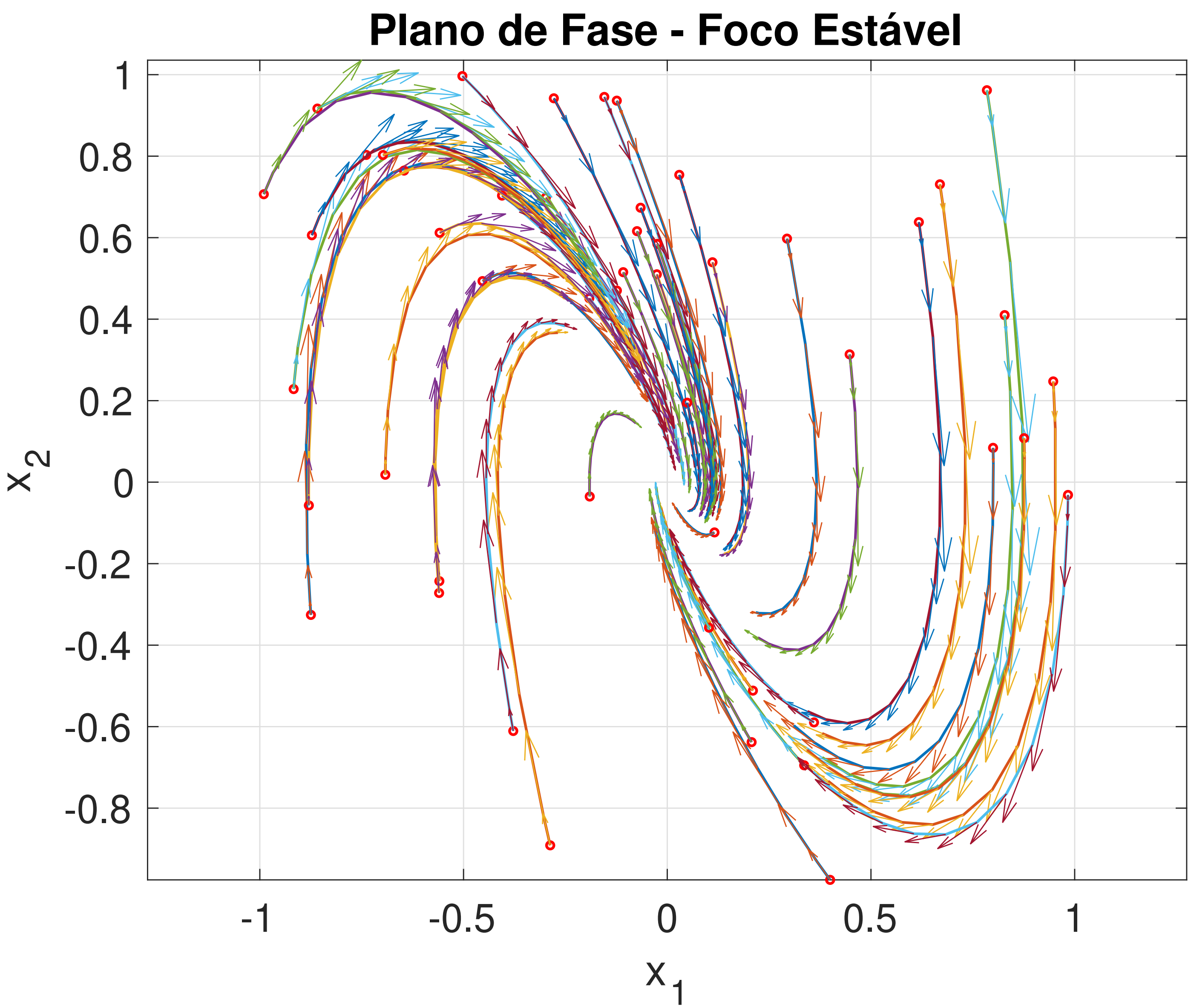
$$\boldsymbol{x_{e2}} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

a matriz Jacobiana é tal que:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right]_{\boldsymbol{x_{e2}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$$

que tem autovalores em $\mathbf{-1.5 \pm \boldsymbol{j}1.3229}$ e, portanto, o ponto $\boldsymbol{x_{e2}}$ é um foco estável. Vide figura a seguir

Pontos de Equilíbrio – Foco Estável



Retornando ao Estudo de Caso – Pág. 4

▷ Linearizando ao redor do ponto de equilíbrio

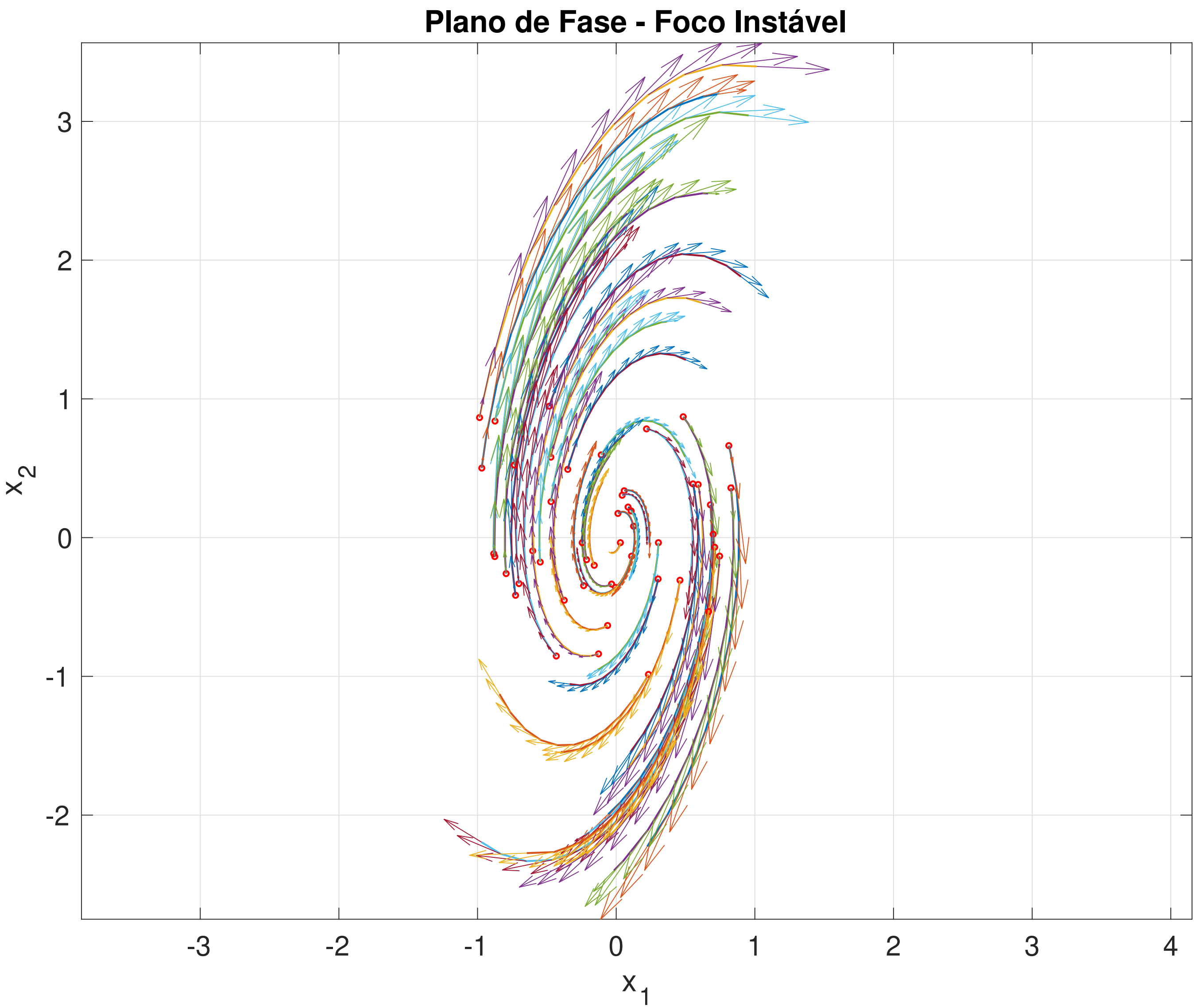
$$\boldsymbol{x_{e3}} = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

a matriz Jacobiana é tal que:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right]_{\boldsymbol{x_{e3}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

com autovalores em $\mathbf{0.5 \pm \boldsymbol{j}1.9365}$ e, portanto, o ponto $\boldsymbol{x_{e3}}$ é um foco instável. Vide figura a seguir

Pontos de Equilíbrio – Foco Instável



Estabilidade Interna & Transformações de Similaridade

Para entendermos a origem dos Teoremas apresentados anteriormente na página 8, relembrem-se que:

▷ As transformações de equivalência não afetam a estabilidade de uma equação de estado... Definindo $\bar{x} = Px$, com P não singular, $\dot{x} = Ax$ é equivalente a

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} = PAP^{-1}\bar{x}$$

▷ Como P é não singular, se x é limitado, então $\bar{x}$ também o é; se x tende a zero quando $t \to \infty$, o mesmo ocorre com $\bar{x}$

▷ A estabilidade de A pode ser estudada através de $\bar{A}$

Estabilidade Interna

A solução de $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x}$ para $\bar{x}(0)$ é dada por $\bar{x}(t) = e^{\bar{A}t}\bar{x}(0)$. Se $\bar{A}$ está na forma de Jordan, pode-se mostrar que:

▷ Se um autovalor tem parte real negativa, cada elemento do bloco de Jordan associado é limitado e tende a zero quando $t \to \infty$

▷ Se um autovalor tem parte real igual a zero e nenhum bloco de Jordan de ordem 2 ou maior, então o elemento correspondente é constante ou senoidal para todo t e portanto limitado

▷ Se um autovalor tem parte real positiva, cada elemento do bloco de Jordan associado cresce indefinidamente; se um autovalor tem parte real igual a zero e algum bloco de Jordan de ordem 2 ou maior, então pelo menos um elemento cresce indefinidamente

▷ Para ser assintoticamente estável, todo elemento tem que tender a zero quando $t \to \infty$ e, assim, nenhum autovalor com parte real 0 ou positiva é permitido

Exemplo $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$. Veja que $\Delta(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1)$

▷ Lembre-se que o polinômio mínimo de A é definido como o polinômio mônico $\psi(\lambda)$ de menor grau tal que $\psi(A) = 0$

▷ Note que `A*(A+eye(3))` é uma matriz nula. Portanto o polinômio mínimo é dado por $\psi(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)$ e então $\lambda = 0$ é uma raiz simples (multiplicidade 1) do polinômio mínimo. Os autovalores da matriz A são 0, 0 e -1 e a equação é marginalmente estável

Estabilidade Interna

Por outro lado, para o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

veja que `A*(A+eye(3))` não é uma matriz nula. No entanto `A^2*(A+eye(3))` é um matriz nula, i.e., $\psi(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1)$ é o polinômio mínimo e $\lambda = 0$ não é uma raiz simples do polinômio mínimo, portanto o sistema não é marginalmente estável (de fato, é instável)

Estabilidade Interna

▷ Como já discutido, todo polo da matriz de transferência

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

é também um autovalor de $\boldsymbol{A}$. Assim, a estabilidade assintótica implica na BIBO estabilidade

▷ Porém a BIBO estabilidade não implica, em geral, na estabilidade assintótica

▷ O interesse, no geral, é por sistemas que apresentem estabilidade assintótica ou BIBO estabilidade (eventualmente com condições adicionais). Para osciladores, pode-se considerar questões associadas a estabilidade marginal

Estabilidade Interna de Sistemas Discretos

Para o sistema a tempo discreto autônomo $x(k+1) = Ax(k)$, a solução para $x(0) = x_0$ é dada por $x(k) = A^k x_0$

▷ O sistema é marginalmente estável ou estável no sentido de Lyapunov se toda condição inicial finita x_0 implicar em uma resposta limitada. É assintoticamente estável se, além disso, a resposta tende a zero quando $k \to \infty$

Teorema A equação $x(k+1) = Ax(k)$ é marginalmente estável se, e somente se, todos os autovalores de A têm magnitudes menores ou iguais a 1 e aqueles que tiverem magnitudes iguais a 1 forem raízes simples do polinômio mínimo de A

Teorema A equação $x(k+1) = Ax(k)$ é assintoticamente estável se, e somente se, todos os autovalores de A têm magnitudes menores do que 1

▷ As transformações equivalentes não afetam a estabilidade do sistema, e as formas de Jordan podem ser usadas no estudo da estabilidade. A estabilidade assintótica implica em BIBO estabilidade mas o contrário não é verdadeiro

Teorema de Lyapunov

Todos os autovalores de $\boldsymbol{A}$ têm parte real negativa se, e somente se, para qualquer matriz simétrica definida positiva $\boldsymbol{N}$ (ie, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}' > \boldsymbol{0}$) a equação de Lyapunov

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{N}$$

tem uma única solução simétrica $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{M}$ é definida positiva (ie, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' > \boldsymbol{0}$)

MATLAB relembrando: `M=lyap(A,N)`. Um script simples:

```
A=rand(3), N=eye(3), M=lyap(A,N)
if all(real(eig(M)))>0
 display('M>0, Sistema estável')
 else display('Sistema instável')
end
```

Teorema de Lyapunov

Demonstração ($\longrightarrow$) (Necessidade) A equação de Lyapunov é um caso especial da equação de Sylvester. Como $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A}'$ têm os mesmos autovalores, se $\boldsymbol{A}$ for assintoticamente estável (autovalores com parte real negativa), então não existem dois autovalores tais que

$$\boldsymbol{\lambda_i + \lambda_j = 0}$$

e portanto a equação de Lyapunov é não singular e possui uma única solução $\boldsymbol{M}$ (como concluimos do estudo da equação de Sylvester). Define-se

$$\boldsymbol{M = \int_0^\infty e^{A't} N e^{At} dt}$$

Substituindo na equação de Lyapunov...

Teorema de Lyapunov

obtém-se:

$$
\begin{aligned}
A'M + MA &= \int_0^\infty A' e^{A't} N e^{At} dt + \int_0^\infty e^{A't} N e^{At} A dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A't} N e^{At}\right) dt \\
&= e^{A't} N e^{At}\Big|_{t=0}^{\infty} \\
&= \mathbf{0} - N = -N
\end{aligned}
$$

pois $e^{At} = \mathbf{0}$ para $t \to \infty$ se A tem autovalores com parte real negativa. Assim demonstra-se que M dada acima é solução da equação. Ademais, note que se N for simétrica, M também será simétrica

Teorema de Lyapunov

Como $\boldsymbol{N}$ é não singular, pode-se fatorá-la na forma $\boldsymbol{N} = \tilde{\boldsymbol{N}}'\tilde{\boldsymbol{N}}$ com $\tilde{\boldsymbol{N}}$ não singular. Portanto,

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} = \int_0^\infty \boldsymbol{x}'e^{\boldsymbol{A}'t}\tilde{\boldsymbol{N}}'\tilde{\boldsymbol{N}}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}dt = \int_0^\infty \|\tilde{\boldsymbol{N}}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}\|_2^2\,dt$$

que é definida positiva para qualquer $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ($\tilde{\boldsymbol{N}}$ e $e^{\boldsymbol{A}t}$ são não singulares). Demonstrando assim que $\boldsymbol{M}$ é definida positiva

Teorema de Lyapunov

$(\longleftarrow)$ (Suficiência) Agora demostra-se que se N e M são definidas positivas, então A é estável. Considere λ um autovalor de A associado ao autovetor v. Então, $Av = \lambda v$. Pré e pós multiplicando a equação de Lyapunov por v^* e v, respectivamente, tem-se

$$
\begin{aligned}
-v^* N v &= v^* A' M v + v^* M A v \\
&= (\lambda^* + \lambda) v^* M v \\
&= 2\text{Re}\,(\lambda) v^* M v
\end{aligned}
$$

Como $v^* N v$ e $v^* M v$ são reais positivos $\Longrightarrow$ Re $(\lambda) = \frac{-v^* N v}{2 v^* M v} < 0$

Teorema de Lyapunov

Corolário Todos os autovalores de uma matriz $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ têm parte real negativa se, e somente se, para qualquer matriz $\bar{\boldsymbol{N}}$ $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ com $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$ tal que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{N}} \\ \bar{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}-1} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{nm}\times\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \quad \text{(rank completo de colunas)}$$

a equação de Lyapunov $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{A} = -\bar{\boldsymbol{N}}'\bar{\boldsymbol{N}} \triangleq -\boldsymbol{N}$, tem uma única solução simétrica $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{M}$ é definida positiva

▷ Para qualquer $\bar{\boldsymbol{N}}$, a matriz $\boldsymbol{N} = \bar{\boldsymbol{N}}'\bar{\boldsymbol{N}}$ é semidefinida positiva

▷ O teorema e seu corolário são válidos para qualquer escolha de $\boldsymbol{N}$

Teorema de Lyapunov

Teorema Se todos os autovalores de A têm parte real negativa, então a equação de Lyapunov

$$A'M + MA = -N$$

tem uma única solução para todo N dada por

$$M = \int_0^\infty e^{A't} N e^{At} dt$$

Demonstração de Unicidade Suponha que M_1 e M_2 são soluções. Então

$$A'(M_1 - M_2) + (M_1 - M_2)A = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{A't}\left[A'(M_1 - M_2) + (M_1 - M_2)A\right]e^{At} = \frac{d}{dt}\left[e^{A't}(M_1 - M_2)e^{At}\right] = 0$$

Integrando de 0 a ∞...

Teorema de Lyapunov

Integrando de $\mathbf{0}$ a ∞

$$\left[e^{A't}(M_1 - M_2)e^{At} \right] \Bigg|_0^{\infty} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$0 - (M_1 - M_2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$M_1 = M_2 \quad \checkmark$$

$\looparrowright$ Mesmo para A não estável, uma solução única existe se $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, mas não da forma M acima. Se A for singular (pelo menos um autovalor nulo), a equação de Lyapunov é singular e soluções podem ou não existir (dependendo se N está ou não no range da equação)

Teorema de Lyapunov – Caso Discreto

Antes de construir um resultado equivalente para o caso discreto do Teorema de Lyapunov, estuda-se a existência de solução para a Equação de Sylvester discreta (similar o que foi feito para o caso a tempo contínuo):

$$\boldsymbol{M} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$$

sendo $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Como no caso contínuo, pode ser expressa na forma (conjunto de equações lineares)

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{m} = \boldsymbol{c} \quad ; \quad \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{nm \times nm} \; , \; \boldsymbol{m}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{nm \times 1}$$

Seja $\boldsymbol{\eta_k}$ um autovalor de $\boldsymbol{Y}$. Nesse caso,

$$\boldsymbol{\eta_k = 1 - \lambda_i \mu_j} \quad \text{para} \quad \boldsymbol{i = 1{,}2, \ldots, n} \;\; ; \;\; \boldsymbol{j = 1{,}2, \ldots, m}$$

com $\boldsymbol{\lambda_i}$ e $\boldsymbol{\mu_j}$ autovalores de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, respectivamente

Teorema de Lyapunov – Caso Discreto

- Para verificar esse fato, defina $\mathcal{S}(M) \triangleq M - AMB$. A equação pode então ser escrita da forma: $\mathcal{S}(M) = C$, e um escalar η é um autovalor de $\mathcal{S}(M)$ se $\mathcal{S}(M) = \eta M$. Considere u um autovetor à direita de A associado ao autovalor λ_i e v um autovetor à esquerda de B associado ao autovalor μ_j

$$Au = \lambda_i u \quad ; \quad vB = \mu_j v$$

Assim, aplicando $\mathcal{S}$ a matrix $n \times m$ descrita por uv, obtém-se

$$\mathcal{S}(uv) = uv - AuvB = \underbrace{(1 - \lambda_i \mu_j)}_{\eta} uv$$

- Se não existir i e j tais que $\lambda_i \mu_j = 1$, a equação é não singular e para cada C a solução M da Equação de Sylvester é única
- Se $\lambda_i \mu_j = 1$ para algum i e j, para C dado, a solução pode ou não existir

Teorema de Lyapunov – Caso Discreto

Teorema $|\lambda(A)| < 1$ se, e somente se, para qualquer $N > 0$ ou para $N = \bar{N}'\bar{N}$, com $\bar{N}$ uma matriz $m \times n$ com $m < n$, tal que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{N}A \\ \vdots \\ \bar{N}A^{n-1} \end{bmatrix}_{nm \times n} = n \quad \text{(rank completo de colunas)}$$

a equação discreta de Lyapunov

$$M - A'MA = N$$

tem uma solução única M e M é definida positiva

Teorema de Lyapunov – Caso Discreto

Linhas gerais de uma demonstração (Necessidade) Para $N > 0$, se todos os autovalores de A (iguais aos de A') têm magnitude menor que 1, então $|\lambda_i \lambda_j| < 1$, $\forall i, j$, e a equação é não singular e uma única solução existe. Faça:

$$M = \sum_{m=0}^{\infty} (A')^m N A^m$$

Como $|\lambda_i| < 1$ para todo i, esta série infinita converge. Substituindo

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A')^m N A^m - A' \left(\sum_{m=0}^{\infty} (A')^m N A^m \right) A =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (A')^m N A^m - \left(\sum_{m=0}^{\infty} (A')^{(m+1)} N A^{(m+1)} \right)$$

define-se $k = m + 1$ e...

Teorema de Lyapunov – Caso Discreto

Re-ordene o somatório

$$\sum_{m=0}^{\infty}(A')^m N A^m - \left(\sum_{k=1}^{\infty}(A')^k N A^k\right) =$$

$$= N + \sum_{m=1}^{\infty}(A')^m N A^m - \sum_{k=1}^{\infty}(A')^k N A^k$$

$$= N$$

Se N for simétrica, M também é simétrica

Teorema de Lyapunov – Caso Discreto

(Suficiência) Considere $\boldsymbol{\lambda}$ um autovalor de $\boldsymbol{A}$ associado ao autovetor $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{Av} = \boldsymbol{\lambda v})$. Assim,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v^* N v} &= \boldsymbol{v^* M v} - \boldsymbol{v^* A' M A v} \\ &= \boldsymbol{v^* M v} - \boldsymbol{\lambda^* v^* M v \lambda} \\ &= (\mathbf{1} - \mid \boldsymbol{\lambda} \mid^{\mathbf{2}}) \boldsymbol{v^* M v} \end{aligned}$$

Como os dois lados da equação são números reais e positivos, conclui-se que $(\mathbf{1} - \mid \boldsymbol{\lambda} \mid^{\mathbf{2}}) > \mathbf{0}$ ou $\mid \boldsymbol{\lambda} \mid^{\mathbf{2}} < \mathbf{1}$. Isso estabelece o resultado para $\boldsymbol{N} > \mathbf{0}$. O caso $\boldsymbol{N} \geq \mathbf{0}$ pode ser demonstrado de maneira similar

Teorema de Lyapunov – Caso Discreto

Teorema Se todos os autovalores de A têm magnitude menor do que 1, então a equação discreta de Lyapunov

$$M - A'MA = N$$

tem uma única solução para todo N dada por

$$M = \sum_{m=0}^{\infty} (A')^m N A^m$$

▷ Se A tem um ou mais autovalores com magnitude maior do que 1, uma solução única ainda existe se $\lambda_i \lambda_j \neq 1$ para todo i, j, mas não pode ser computada pela série acima

Relação entre os Casos Contínuo e Discreto

▷ A condição de estabilidade do caso contínuo requer que todos os autovalores estejam no semi-plano esquerdo aberto do plano complexo s. A correspondente condição no caso discreto é que todos os autovalores estejam contidos no interior do círculo unitário do plano complexo z. Essas condições se relacionam pela transformação bilinear

$$s = \frac{z-1}{z+1} \quad ; \quad z = \frac{1+s}{1-s}$$

que define um mapeamento do semi-plano esquerdo aberto para o interior do círculo unitário e vice-versa

▷ Escrevendo as equações de Lyapunov (o subescrito d designa o caso discreto)

$$A'M + MA = -N \quad ; \quad M_d - A_d' M_d A_d = N_d$$

Relação entre os Casos Contínuo e Discreto

Usando a transformação bilinear

$$A = (A_d + \mathsf{I})^{-1}(A_d - \mathsf{I}) \quad ; \quad A_d = (\mathsf{I} + A)(\mathsf{I} - A)^{-1}$$

Substituindo A_d na Lyapunov discreta, obtém-se

$$M_d - \left[(\mathsf{I} + A)(\mathsf{I} - A)^{-1}\right]' M_d \left[(\mathsf{I} + A)(\mathsf{I} - A)^{-1}\right] = N_d$$

multiplicando a esquerda por $(\mathsf{I} - A')$ e a direita por $(\mathsf{I} - A)$ obtém-se:

$$(\mathsf{I} - A')\, M_d\, (\mathsf{I} - A) - (\mathsf{I} + A')M_d(\mathsf{I} + A) = (\mathsf{I} - A')\, N_d\, (\mathsf{I} - A)$$

$$A'M_d + M_dA = -0.5(\mathsf{I} - A')N_d(\mathsf{I} - A)$$

que, comparada com a equação de Lyapunov do caso contínuo, fornece

$$A = (A_d + \mathsf{I})^{-1}(A_d - \mathsf{I}) \;\; ; \;\; M = M_d \;\; ; \;\; N = 0.5(\mathsf{I} - A')N_d(\mathsf{I} - A)$$

MATLAB `dlyap` (leia o “help”!)