

Métodos de Resposta em Frequência

1. Navegando por sistemas de fase (não-)mínima
2. Retardo no tempo – time-delay
3. Erro em estado estacionário – Estimativas via diagrama de Bode
4. Exemplos de traçado do diagrama de Bode

Sistemas de Fase Mínima

▷ Considere duas funções de transferência $G_1(s)$ e $G_2(s)$. Suponha que os polos de $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sejam exatamente iguais, e os zeros de $G_2(s)$ sejam “iguais” aos de $G_1(s)$, porém os zeros de $G_2(s)$ são refletidos para o semi-plano direito. Note que as duas FT têm o mesmo módulo, i.e., $|G_1(s)| = |G_2(s)|$, pois o módulo é invariante a mudança de sinais já que:

$$|G(s)|_{s=j\omega} = \sqrt{\{\operatorname{Re}[G(j\omega)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[G(j\omega)]\}^2} > 0$$

▷ Porém, quando se compara a variação de fase dos dois sistemas, observa-se que a variação de fase daquele com todos os zeros no semi-plano esquerdo é sempre menor (com ω variando de zero a ∞). Portanto, a FT com todos os seus zeros no semi-plano esquerdo é dita de fase mínima

▷ FT com um ou mais zeros no semi-plano direito é dita de fase não-mínima

Sistemas de Fase Mínima

Uma FT é dita de fase mínima se todos os seus zeros estão no semi-plano esquerdo do plano-s. Caso contrário, se algum zero estiver no semi-plano direito é chamada de FT de fase não-mínima

Nota Pode-se fazer análise semelhante, em termos de fase, se a FT conter algum polo instável (no semi-plano direito). O módulo não se altera, mas a variação da fase (com ω variando de zero a ∞) se modifica

Sistemas de Fase Não-Mínima

Exemplo Considere dois sistemas cujas Funções de Transferência são

$$G_1(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1}, \quad G_2(j\omega) = \frac{-1 + j\omega T}{1 + j\omega T_1} = \frac{(-1)(1 - j\omega T)}{1 + j\omega T_1}$$

▷ As duas FT têm o mesmo módulo, porém características de fase diferentes

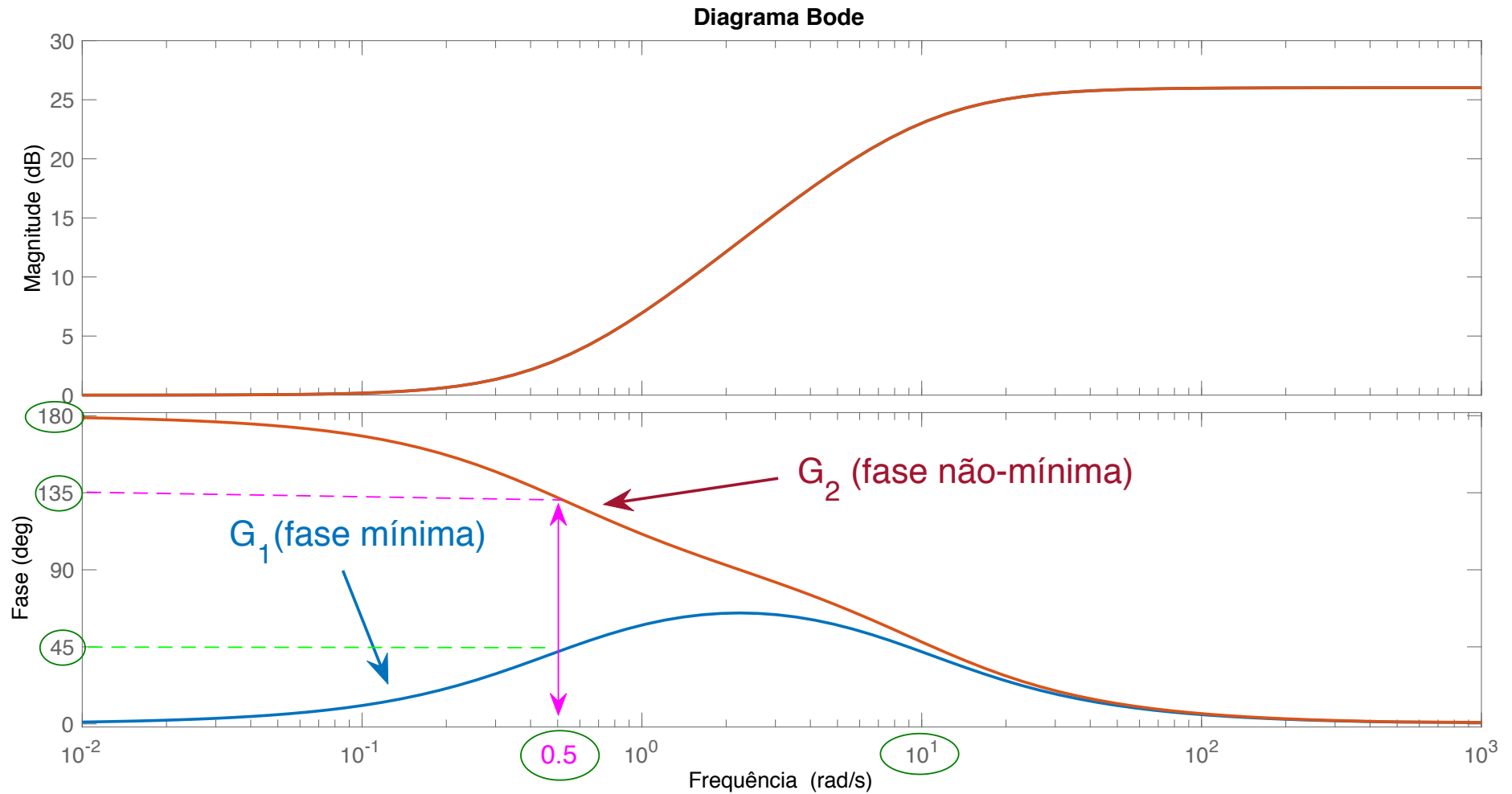
▷ Note que: $\angle G_1(j\omega) = \tan^{-1}(\omega T) - \tan^{-1}(\omega T_1)$

$$\angle G_2(j\omega) = \underbrace{180^0}_{=\pi} + \tan^{-1}(-\omega T) - \tan^{-1}(\omega T_1)$$

Fato: $\tan^{-1}(-\omega) = -\tan^{-1} \omega$

▷ Escolha, por exemplo, $T = 2$ (zero em 0.5) e $T_1 = 0.1$ (polo em 10)

Sistemas de Fase Não-Mínima



Sistemas de Fase Não-Mínima

Exemplo Considere as Funções de Transferência abaixo:

$$G_1(s) = 1, \quad G_2(s) = -1, \quad G_3(s) = \frac{s - 1}{s + 1}$$

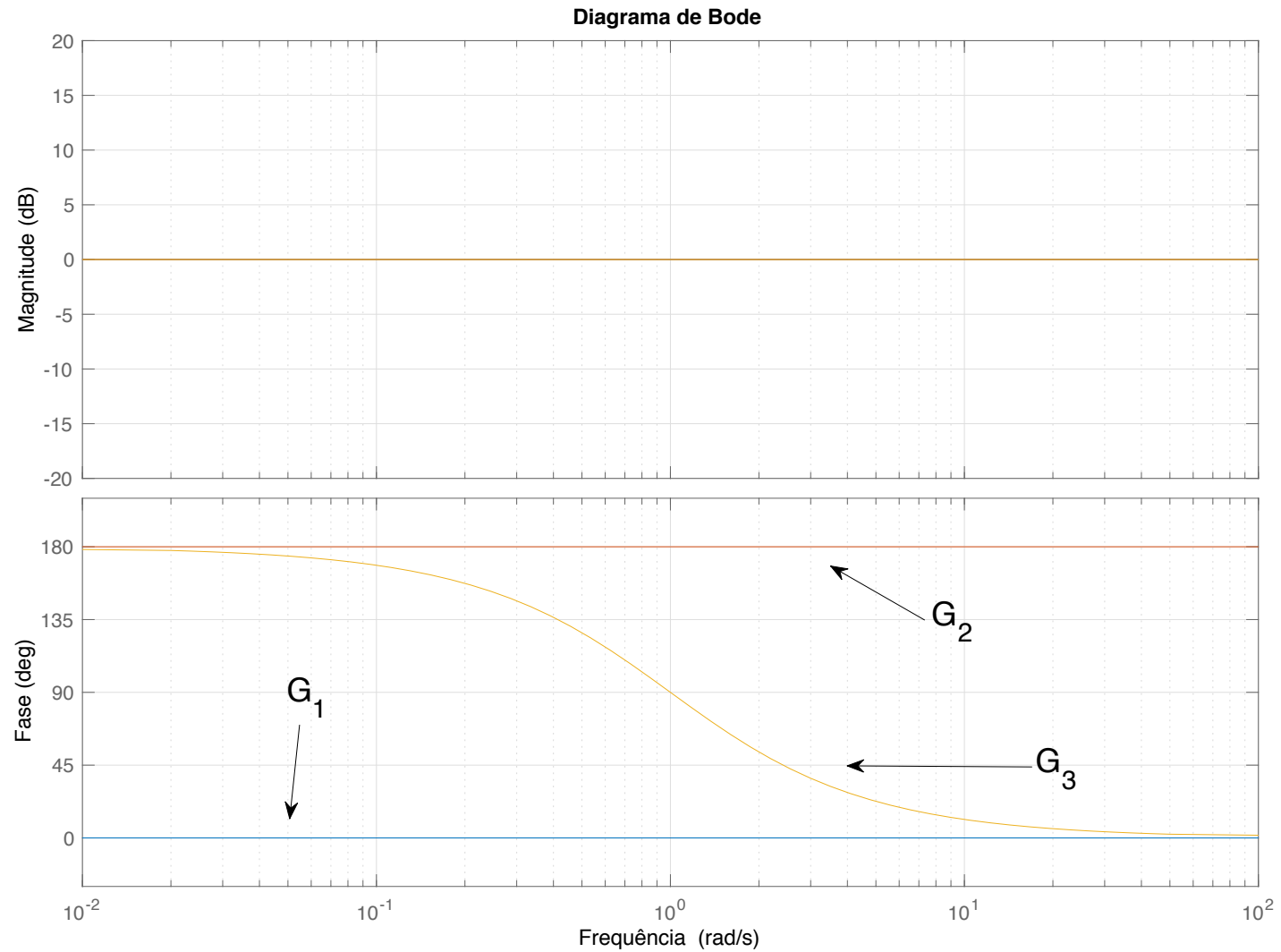
Note que as três FT têm o mesmo módulo:

$$|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)| = |G_3(j\omega)| = 1$$

Porém **são funções de transferência diferentes** e as fases denotam isto:

$$\angle G_1(j\omega) = 0^0, \quad \angle G_2(j\omega) = \underbrace{180^0}_{=\pi}, \quad \angle G_3(j\omega) = \underbrace{180^0}_{=\pi} - 2 \tan^{-1} \omega$$

Sistemas de Fase Não-Mínima – Bode



Sistemas de Fase Não-Mínima – Resposta Temporal

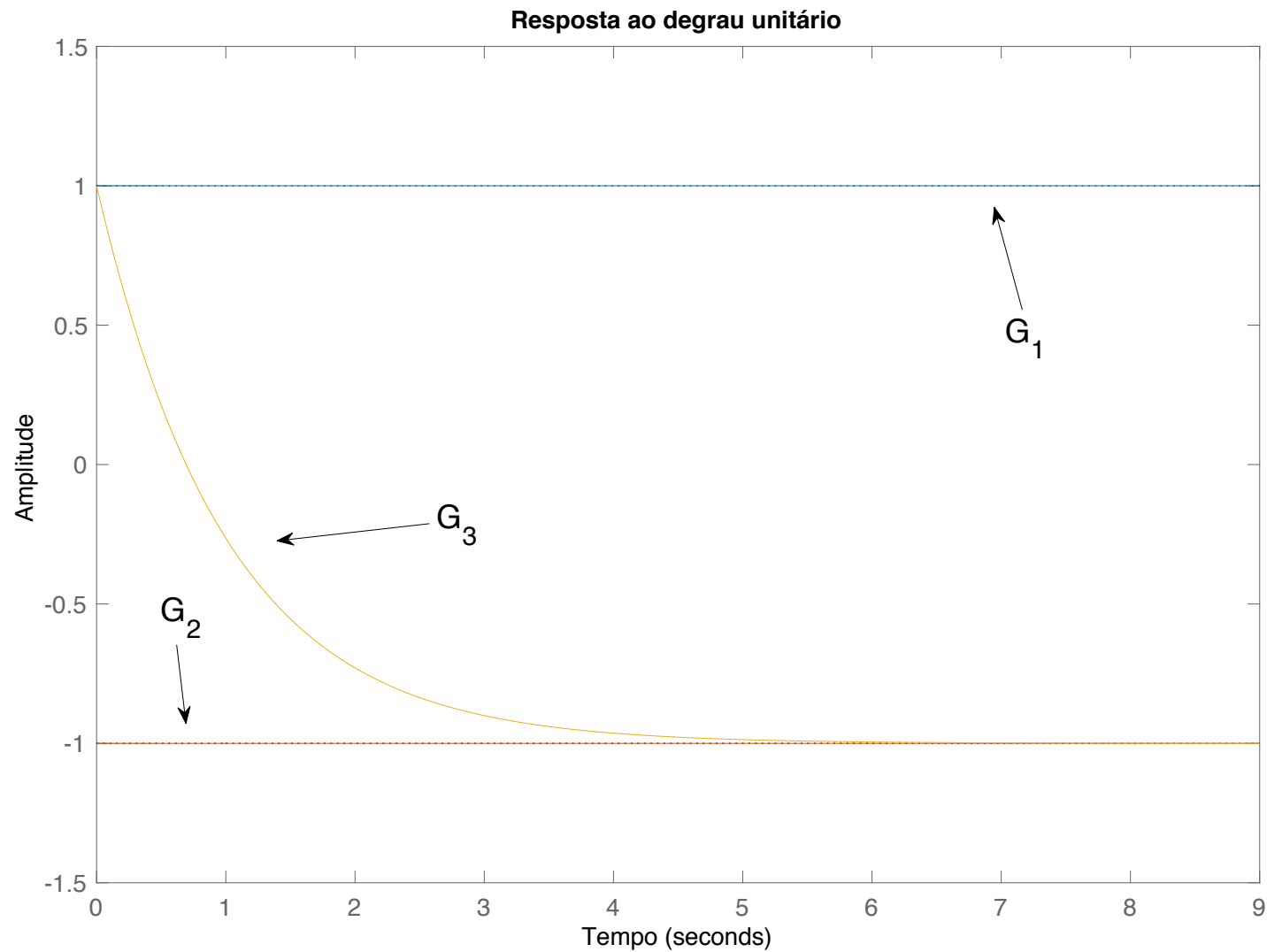
Exemplo Considere as mesmas FT anteriores: $G_1(s) = 1$ (fase mínima), $G_2(s) = -1$ (fase não-mínima) e $G_3(s) = \frac{s-1}{s+1}$ (fase não-mínima). Ao aplicar uma entrada degrau unitário $u(t) = 1(t)$ o que ocorre?

- ▷ Note que a resposta do sistema G_1 é também um degrau unitário na mesma direção da entrada degrau, ou: $y(t) = 1(t)$
- ▷ Já a resposta do sistema G_2 é um degrau unitário, porém na direção oposta da entrada degrau, em outras palavras: $y(t) = -1(t)$
- ▷ Para G_3 , a resposta ao degrau é: $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-1}{s(s+1)} \right\} = (2e^{-t} - 1) 1(t)$.

Para $t = 0$, $y(0) = 2 - 1 = 1$ e, quando t cresce, a resposta tende a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G_3(s) = -1$$

Sistemas de Fase Não-Mínima – Resposta Temporal



Retardo no Tempo – Time Delay

Retardo puro de tempo - ou atraso puro de tempo - é caracterizado no domínio de Laplace por uma **função transcendente**: e^{-sT}

▷ Note que a magnitude é sempre igual a '1', pois

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega T}| = |\cos \omega T - j\text{sen } \omega T| = 1$$

Portanto, a magnitude é **0dB** para todo ω !

▷ No entanto, o ângulo de fase do retardo puro de tempo é:

$$\underline{\angle G(j\omega)} = -\omega T$$

Retardo no Tempo – Time Delay

Exemplo Obtenha o diagrama de Bode para um sistema de 1a. ordem com retardo puro em tempo (é um modelo que pode representar vários processos):

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T} G_p(j\omega) = e^{-j\omega T} \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

▷ Magnitude: $20 \log |G(j\omega)| = \underbrace{20 \log |e^{-j\omega T}|}_{= \text{odB}} + 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right|$

▷ Ângulo de fase: $\angle G(j\omega) = \underbrace{\angle e^{-j\omega T}}_{= -\omega T} - \tan^{-1} \omega\tau$

▷ Portanto, o retardo no tempo irá gerar decréscimo em fase de $-\omega T$, à medida que ω varia entre 0 e ∞

Retardo no Tempo – Time Delay

► Pode-se usar o MATLAB[©] para avaliar o efeito da resposta em frequência de um sistema de 1a. ordem com retardo puro em tempo (e.g. $T = 2s$), fazendo:

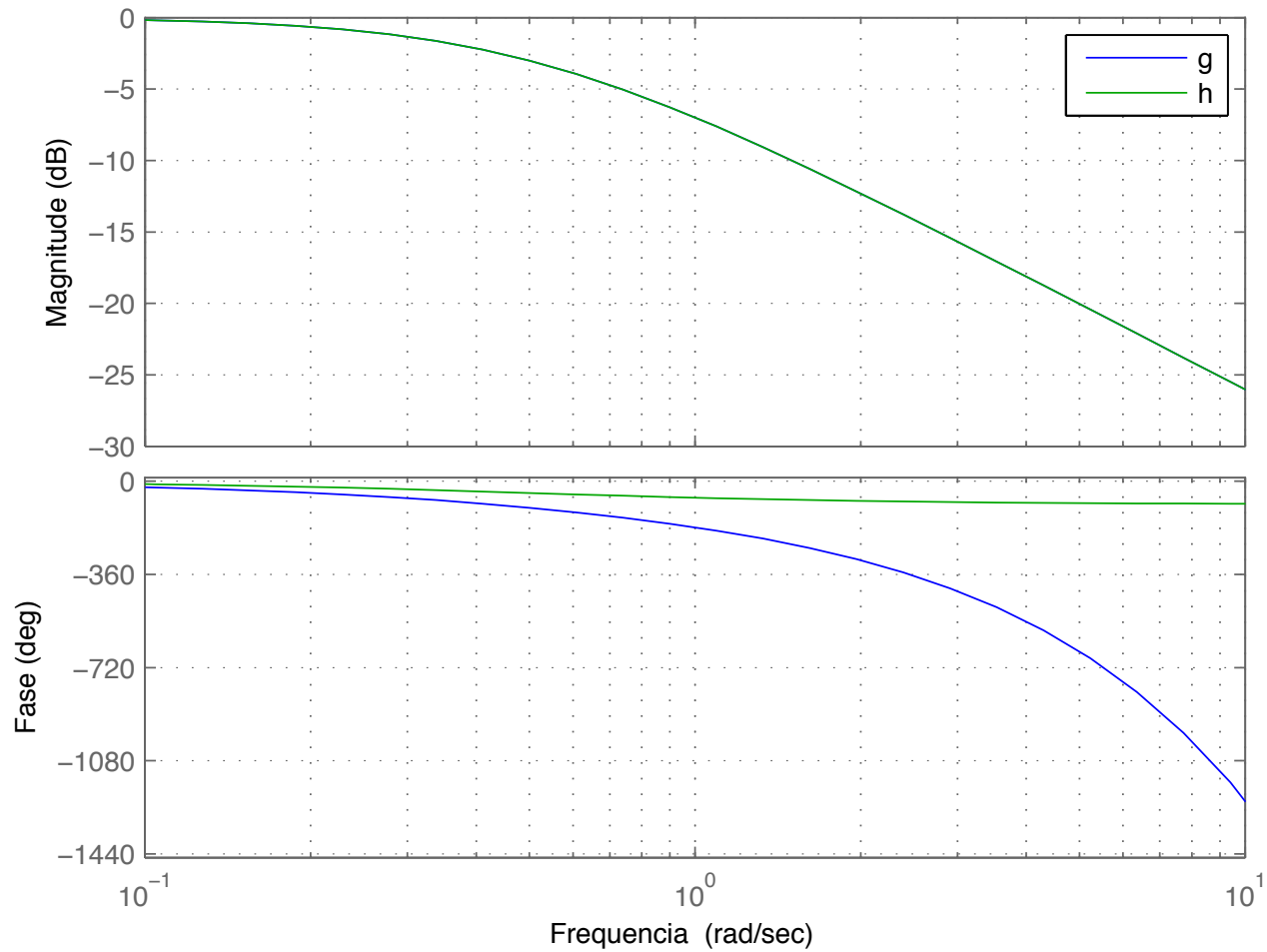
```
h=tf(1,[2 1])           % h = 1/(2s + 1) - FT sem retardo
g=tf(1,[2 1],'iodelay',2) % g = exp(-2s) * h - FT com retardo
bode(h), hold on, bode(g)
```

Note que para frequências específicas dadas, considerando que o retardo é, e.g., $T = 2s$, pode-se calcular o atraso (defasagem) em fase de $-\omega T$:

frequência ω (rad/s)	Atraso em Fase ($(-\omega T * 180^\circ / \pi)$)
1	-114°
2	-229°
10	-1145°

Retardo no Tempo – Bode

DIAGRAMA DE BODE



Retardo no Tempo – Aproximações

Aproximação de $e^{-j\omega T}$ em torno de $s = 0$, em série de Maclaurin:

$$e^{-sT} = 1 - sT + \frac{(sT)^2}{2!} + \frac{(sT)^3}{3!} + \frac{(sT)^4}{4!} + \frac{(sT)^5}{5!} + \dots$$

Note que uma simples aproximação de primeira ordem do retardo no tempo pode ser suficientemente boa para várias aplicações reais:

$$e^{-sT} \approx 1 - sT \quad (\text{com zero em } s = \frac{1}{T})$$

Ou simplesmente:

$$e^{-sT} = \frac{1}{e^{sT}} \approx \frac{1}{1 + sT} \quad (\text{com polo em } s = -\frac{1}{T})$$

Retardo no Tempo – Aproximações

Aproximação de Padé (veja seção 9.7 no livro texto, 13a. edição)

Aproximação de primeira ordem:

$$e^{-sT} \approx \frac{-\frac{T}{2}s + 1}{\frac{T}{2}s + 1} \quad (\text{com zero em } s = \frac{2}{T} \text{ e polo em } s = -\frac{2}{T})$$

Aproximações de ordem maiores (vale a pena usar ordem maiores?):

$$e^{-sT} \approx \frac{T^2 s^2 - 6Ts + 12}{T^2 s^2 + 6Ts + 12}$$

$$e^{-sT} \approx \frac{-T^3 s^3 + 12T^2 s^2 - 60Ts + 120}{T^3 s^3 + 12T^2 s^2 + 60Ts + 120}$$

▷ Grosso modo, ao usar a aproximação de Padé, tem-se um exemplo de sistema de fase não-mínima já que o truncamento de e^{-sT} para ordem 'n', usando padé (vá de MATLAB[©]), gera 'n' zeros no semi plano-direito...

Erro em Estado Estacionário em Bode

Note que para frequências muito baixas ($\omega \rightarrow 0$), a FT em malha aberta pode ser aproximada pela composição de um ganho e contribuições de integradores e zeros na origem, da forma: $KG(j\omega) \approx \mathcal{G} \cdot (j\omega)^n$

Por exemplo, para sistemas do Tipo 0, $n = 0$ (não tem integrador), pelo Teorema do Valor Final o erro em estado estacionário é ($R(s) = 1/s$):

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + KG(s)} R(s) = \frac{1}{1 + KG(j0)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Então, quanto maior K_p , menor será o erro em estado estacionário. Desta forma é fácil notar que $K_p = \mathcal{G} = KG(j0)$ (para $\omega \rightarrow 0$). E tem-se uma estimativa de K_p diretamente de Bode, fazendo uma leitura em baixas frequências

► Portanto é razoável supor que **quanto maior o valor da magnitude sobre a assíntota em baixas frequências da FT do ganho em malha aberta, menor deve ser o erro em estado estacionário para o sistema em malha fechada**

Erro em Estado Estacionário em Bode

▷ Para sistemas do Tipo 1, isto é, sistemas com 1 integrador, a assíntota em baixas frequências tem inclinação de -1 (-20dB/dec), indicando que $n = -1$ e tem-se: $KG(s) \approx \mathcal{G} \cdot (j\omega)^{-1}$

▷ Note que pelo Teorema do Valor Final, o erro em estado estacionário é:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} sKG(s)} = \frac{1}{1 + K_v}$$

Em outras palavras: $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKG(s) = \lim_{j\omega \rightarrow 0} \cancel{(j\omega)} \mathcal{G} \cancel{(j\omega)^{-1}} = \mathcal{G}$

▷ Portanto, pode-se ler a magnitude em qualquer frequência sobre a assíntota em baixas frequências e calcular K_v . Porém, há outras alternativas também...

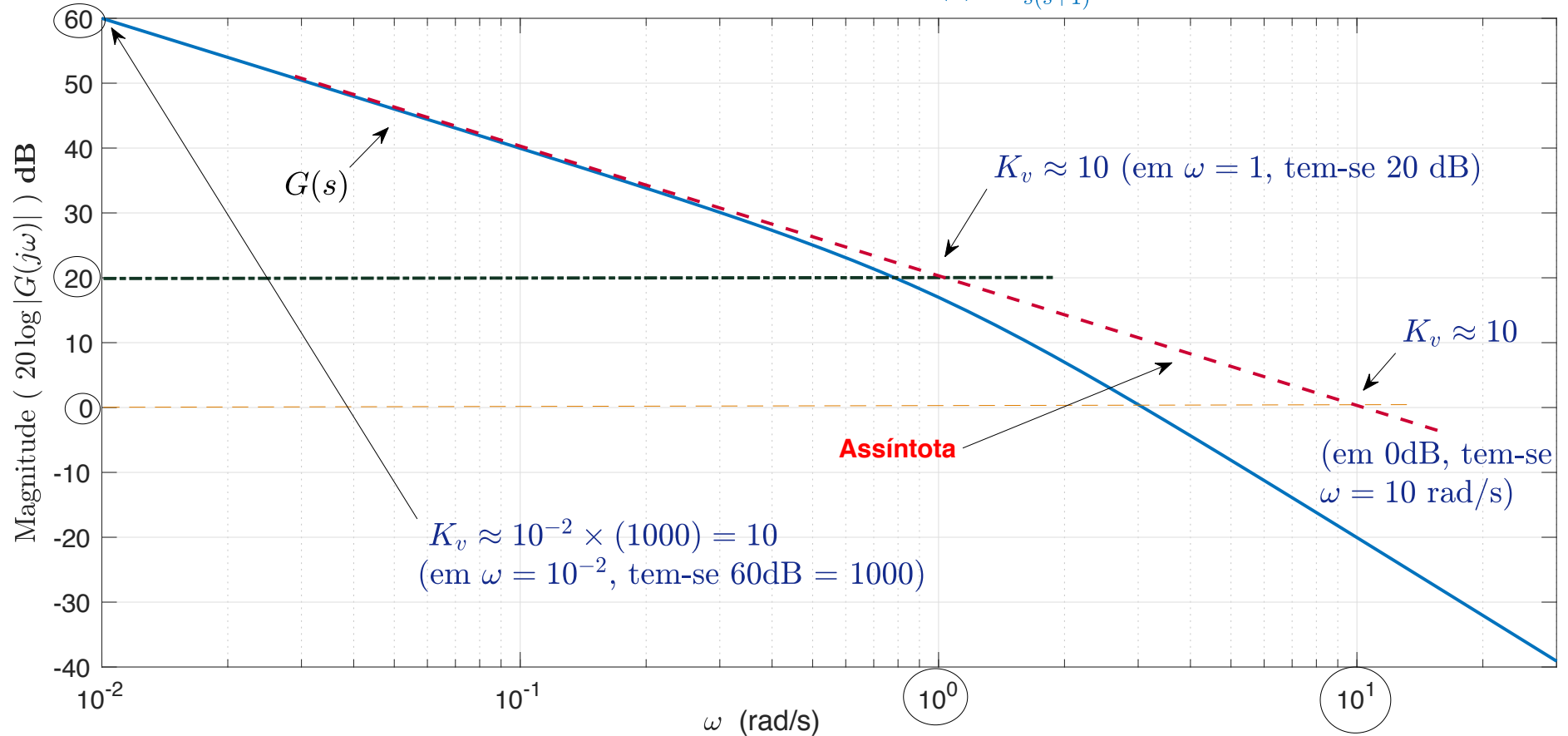
Erro em Estado Estacionário em Bode

- ▶ Uma alternativa para se determinar o valor K_v para um sistema do Tipo 1, é simplesmente ler a magnitude do **prolongamento da assíntota em baixas frequências** diretamente em $\omega = 1$ rad/s. Isto é possível pois como $K_v = \mathcal{G}$, então no **diagrama de magnitude de Bode**, em $\omega = 1$ rad/s, $K_v = |\mathcal{G}/\omega|$, em outras palavras: $K_v = |KG(j1)|$
- ▶ É provável que seja necessário estender a assíntota em baixas frequências até $\omega = 1$ rad/s para ler o ganho
- ▶ Alternativamente, ainda para sistemas do Tipo 1, a intersecção do prolongamento da assíntota em baixas frequências no segmento onde a **magnitude iguala o valor 1 (ou 0dB)**, tem-se a frequência que numericamente se iguala a K_v . Supondo que $\tilde{\omega}$ seja esta frequência de intersecção em 0dB, então:

$$|KG(j\tilde{\omega})| = \left| \frac{\mathcal{G}}{j\tilde{\omega}} \right| = 1 \implies \mathcal{G} = \tilde{\omega} \implies K_v = \tilde{\omega}$$

Exemplo – Erro em Estado Estacionário em Bode

Diagrama de Bode para $G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$



Em palavras, do diagrama de Bode anterior

▷ A leitura da magnitude do prolongamento da assíntota em baixas frequências quando $\omega = 1$ rad/s no diagrama de Bode é **20dB**. Portanto, da relação

$$20 \log |G(j\omega)| = 20\text{dB}, \text{ tem-se que } |G(j\omega)| = 10^{\frac{20}{20}} = 10$$

Isto é, a constante de velocidade é dada por $K_v \approx 10$

▷ A extensão da assíntota em baixas frequências cruza a magnitude 1 (ou 0dB) em $\omega \approx 10$ rad/s. Indicando, portanto, que $K_v \approx 10$

▷ Note ainda que escolhendo uma frequência suficientemente pequena, e.g., $\omega = 10^{-2}$ rad/s, lê-se do diagrama de Bode que a magnitude é **60dB**. Portanto:

$$K_v = \omega |G(j\omega)| \approx 10^{-2} \times 10^{60/20} = 10^{-2} \times 1000 = 10$$

Especificações de Desempenho no Domínio da Frequência

- ▷ É possível relacionar especificações de desempenho no domínio do tempo (e.g., *overshoot* (M_p), tempo de acomodação) com especificações no domínio da frequência (e.g., M_ω , faixa de passagem (ω_B), frequência de ressonância (ω_r))?
- ▷ Sabemos que de um sistema de 2a. ordem, o máximo (pico) da resposta em frequência é dado por M_ω e ocorre na frequência de ressonância ω_r
- ▷ A faixa de passagem ω_B (ou largura de banda), por outro lado, corresponde à frequência em que a resposta do sistema em malha fechada tem ganho -3dB (e está relacionada à velocidade de resposta do sistema)
- ▷ Note também que a faixa de passagem ω_B está relacionada, de forma aproximada, à frequência natural do sistema, como ilustrado na figura a seguir (sistema de 2a. ordem)

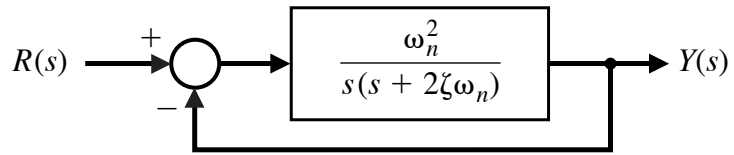


Figure 8.24 A second-order closed-loop system

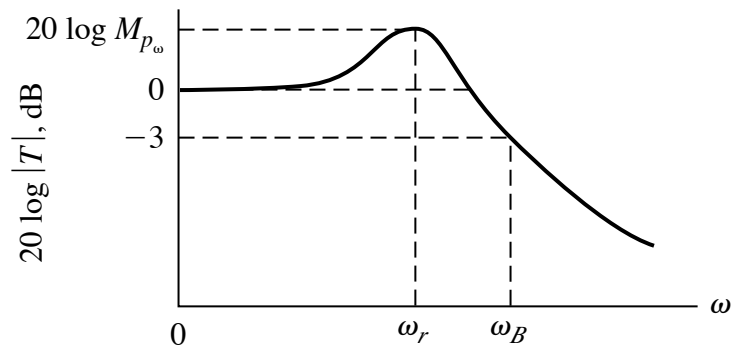


Figure 8.25 Magnitude characteristic of the second-order system

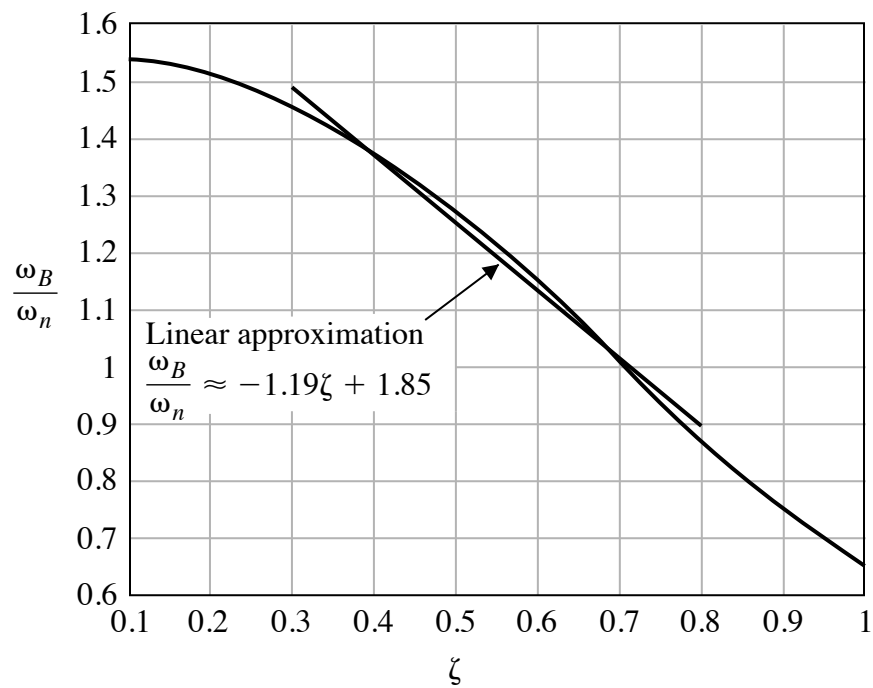


Figure 8.26 Normalized band-width, ω_B/ω_n , versus ζ for a second-order system (Eq. 8.46)

Especificações de Desempenho no Domínio da Frequência

▷ Como a resposta do sistema de 2a. ordem a um degrau unitário é:

$$y(t) = 1 + B e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_n t + \theta)$$

quanto maior o valor de ω_n , mantendo ζ constante, mais rapidamente a resposta se aproximará do valor estacionário. Portanto, especificações no domínio da frequência poderiam ser:

1. Ganho na frequência de ressonância relativamente pequeno: e.g., $M_\omega < 1$, o que implica em um fator de amortecimento “harmônico” $\zeta \approx 0.707$ (e portanto poderia se ter *overshoot* baixo)
 2. Faixa de passagem ω_B grande, tal que a constante de tempo do sistema $\tau = 1/\zeta \omega_n$ seja suficientemente pequena (o que implica em t_a reduzido)
- ▷ Note que estas relações são válidas se a resposta do sistema for dominada por um par de polos complexos (se assemelha a um sistema de 2a. ordem)

Projeto Sequencial: Leitura de um Drive

▷ Na modelagem realizada anteriormente, não se considerou que a haste que liga a cabeça de leitura com o braço movido pelo motor fosse flexível. No entanto, se considerarmos que é flexível, haverá um coeficiente de elasticidade e a haste de ligação pode ser modelada como uma mola com constante de elasticidade k . Neste caso, tem-se dois corpos interconectados (cabeça de leitura e o braço) sendo que m é a massa da cabeça de leitura, b é o atrito viscoso, $u(t)$ é a força exercida pelo braço (movido pelo motor) sobre a haste que, por sua vez, move a cabeça de leitura. Então pode-se escrever uma FT adicional, de 2a. ordem, para modelar esta interconexão da forma:

$$G_3(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + (2\zeta/\omega_n)s + (s/\omega_n)^2}$$

com amortecimento $\zeta = 0.3$ e frequência natural $\omega_n = 18850$ rad/s (ou $f_n = 3$ kHz), conforme ilustrado na figura a seguir

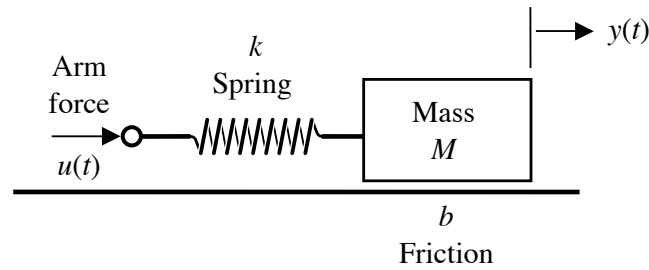


Figure 8.41 Spring, mass, friction model of flexure and head

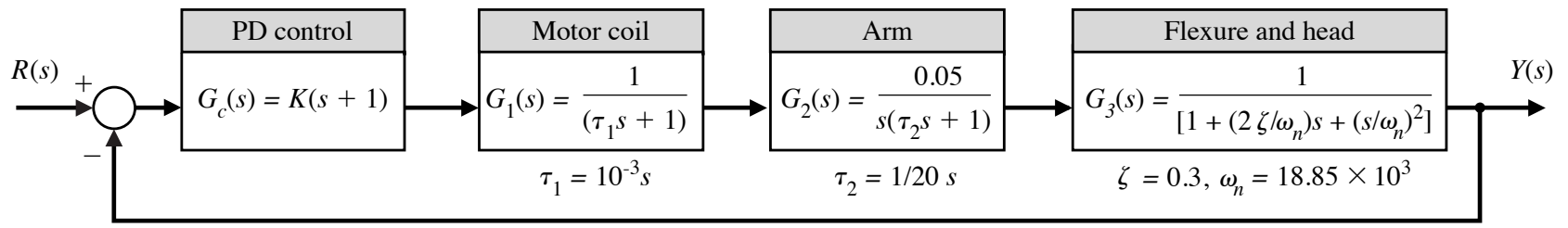


Figure 8.42 Disk drive head position control, including effect of flexure head mount

Projeto Sequencial: Leitura de um Drive

- ▷ Note que a FT em malha fechada é de 5a. ordem
- ▷ A estrutura adotada para o controlador é um PD = $K(s + 1)$
- ▷ Esboçando o diagrama de Bode correspondente à malha aberta, na próxima página, verifica-se que o diagrama possui um ganho de 10dB acima da linha da assíntota em $\omega = \omega_n$
- ▷ Objetivo específico: evitar excitar o efeito da ressonância em ω_n

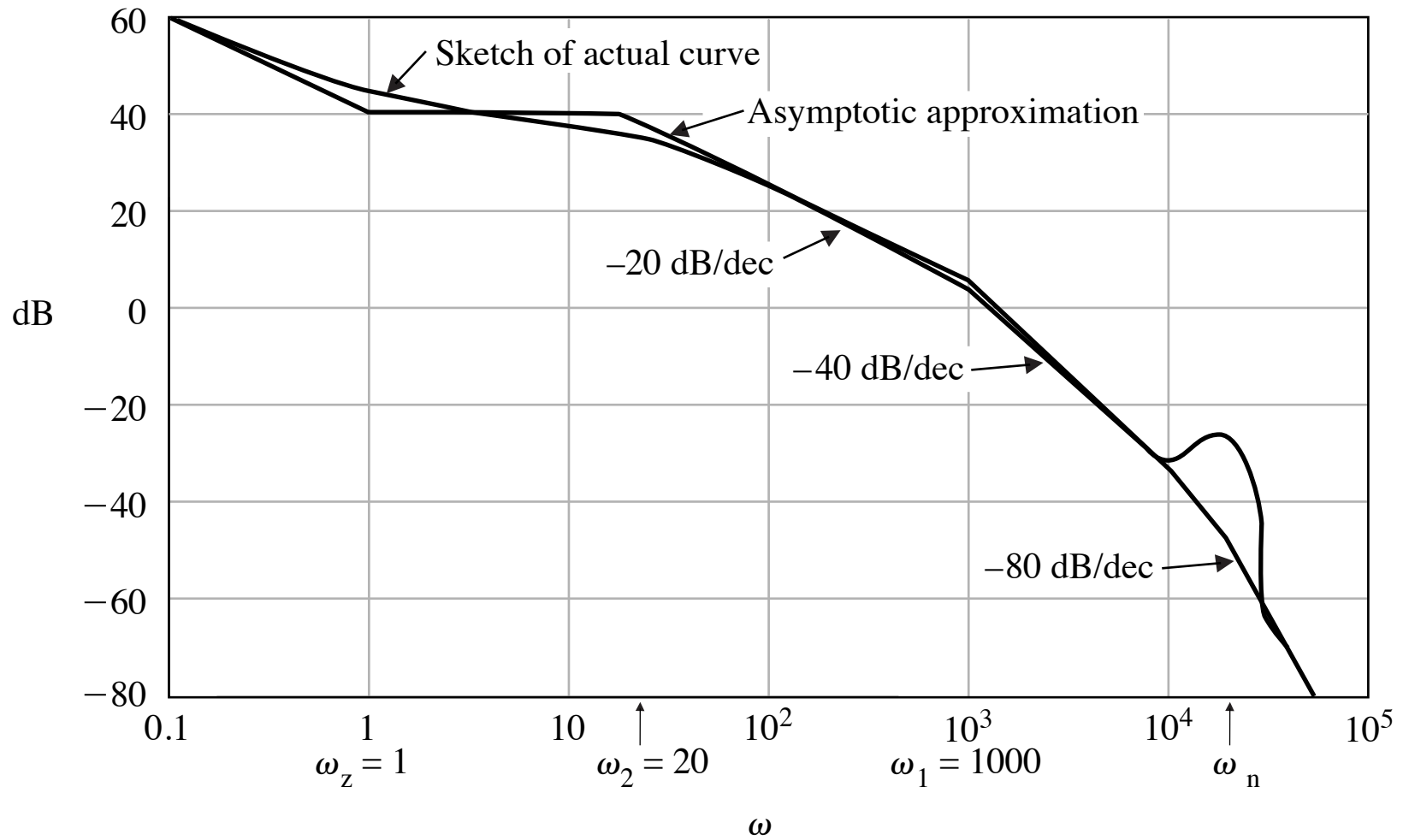
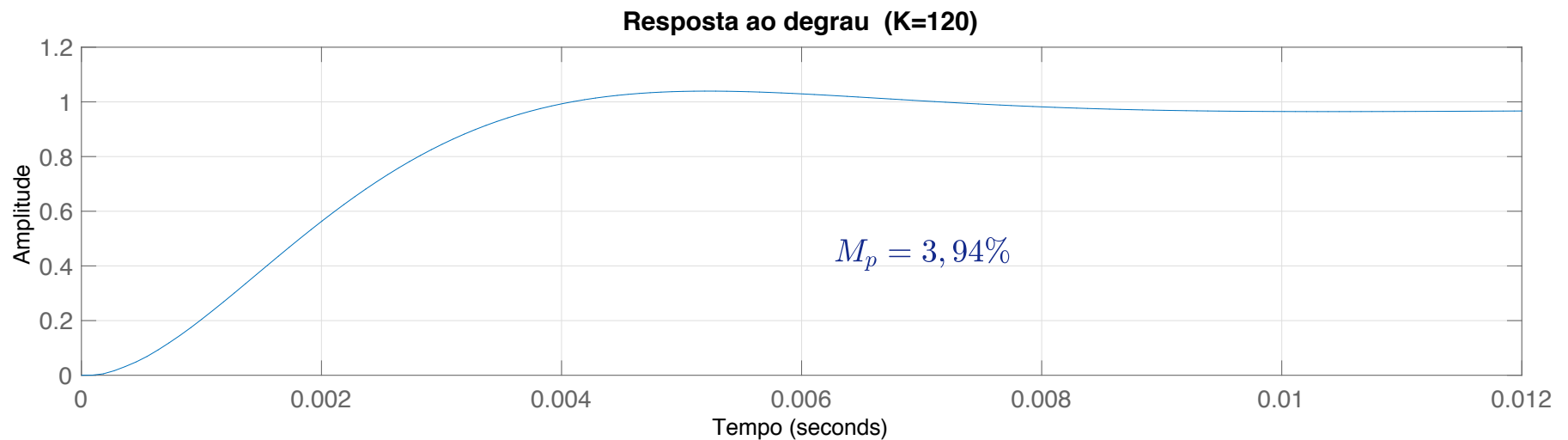
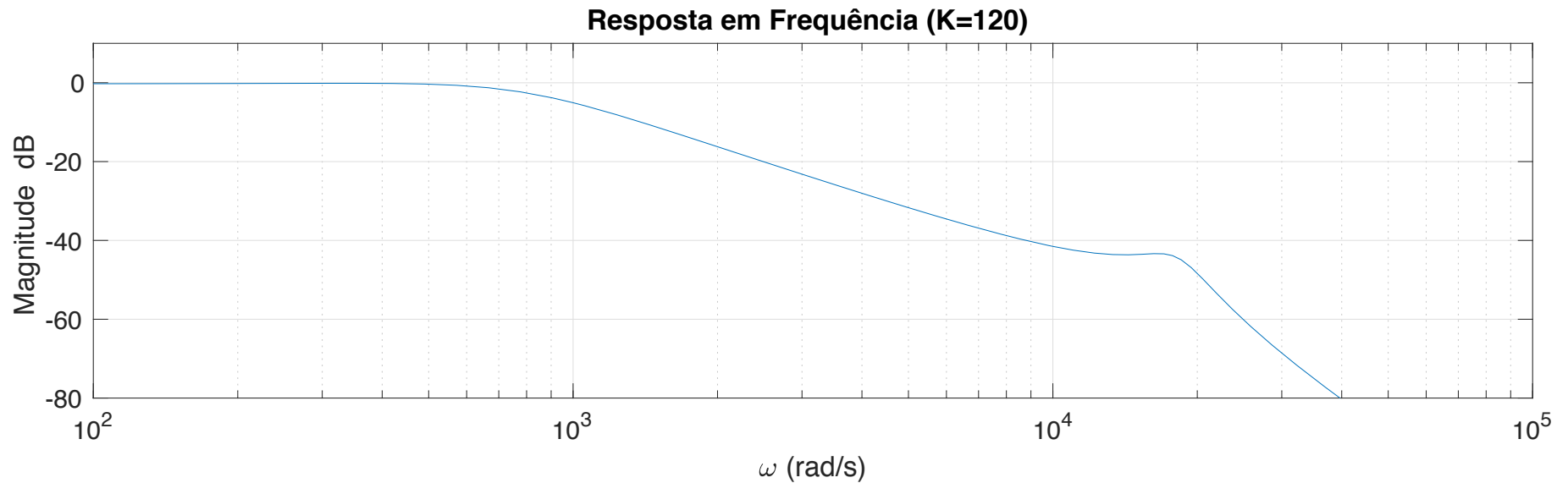


Figure 8.43 Sketch of the Bode diagram magnitude for the system of Fig. 8.42

Projeto Sequencial: Leitura de um Drive

- ▷ As especificações para o projeto são
 - Sobre-elevação (*overshoot*): $M_p \leq 5\%$
 - Tempo de acomodação: $t_a \leq 250\text{ms}$
- ▷ Selecionando $K = 120$, garante-se as restrições de tempo de acomodação e sobre-elevação (vide próxima figura)
- ▷ Por outro lado, selecionando $K = 600$, o valor de sobre-elevação aumenta consideravelmente (vide próxima figura). Neste caso, **como a faixa de passagem aumentou** em relação ao projeto para $K = 120$, provavelmente tem-se uma contribuição maior de uma parcela oriunda da ressonância em ω_n

Projeto Sequencial: Leitura de um Drive ($K = 120$)



Projeto Sequencial: Leitura de um Drive ($K = 600$)

