Estabilidade

1. Estabilidade Entrada-Saída – Sistemas LIT a tempo contínuo
2. Estabilidade BIBO – Sistemas LIT a tempo contínuo
3. Estabilidade BIBO de Equações Dinâmicas – Sistemas LIT
4. Estabilidade BIBO – Sistemas LIT a tempo discreto

Estabilidade Entrada-Saída

- Considere o sistema SISO, LIT, causal e relaxado em $t = 0$, descrito por

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$g(t)$: é a resposta ao impulso do sistema, ou seja, a saída do sistema no tempo t para um impulso aplicado na entrada no instante $\tau = 0$

- Uma entrada $u(t)$ é limitada se

$$|\ u(t)\ | \leq u_m < \infty \quad \text{para todo} \quad t \geq 0$$

Definição Um sistema relaxado é BIBO estável (do inlgês *Bounded-Input — Bounded-Output*) se para qualquer entrada limitada a saída também for limitada

Estabilidade Entrada-Saída

Teorema Um sistema SISO, LIT, relaxado, descrito por

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

é BIBO-estável se, e somente se, $g(t)$ for absolutamente integrável no intervalo $[0, \infty)$, i.e.,

$$\int_0^\infty \mid g(t) \mid \; dt \leq M < \infty$$

para alguma constante M

Estabilidade Entrada-Saída

Demonstração $(\longleftarrow)$ Primeiramente mostra-se que se $g(t)$ é absolutamente integrável, então para toda entrada limitada tem-se a saída também limitada. Considere $u(t)$ arbitrária com $|\, u(t)\,| \leq u_m < \infty$ para todo $t \geq 0$. Então:

$$\begin{aligned} |\, y(t)\,| &= \left| \int_0^t g(\tau) u(t-\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t |\, g(\tau)\,| \; |\, u(t-\tau)\,| d\tau \\ &\leq u_m \int_0^t |\, g(\tau)\,|\, d\tau \\ &\leq u_m\, M < \infty \end{aligned}$$

e portanto a saída é limitada

$(\longrightarrow)$ E se $g(t)$ não for absolutamente integrável?

Estabilidade Entrada-Saída

Se $g(t)$ não for absolutamente integrável, então o sistema não é BIBO estável?

Se $g(t)$ não é absolutamente integrável, existe t_1 tal que

$$\int_0^{t_1} |\, g(\tau)\, |\, d\tau \to \infty$$

Escolhendo uma entrada limitada

$$u(t_1 - t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad g(t) \geq 0 \\ -1 & \text{se} \quad g(t) < 0 \end{cases}$$

tem-se, no entanto, uma saída ilimitada

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^{t_1} |\, g(\tau)\, |\, d\tau \to \infty$$

e o sistema não é BIBO estável (necessidade: $g(t)$ ser absolutamente integrável)

Estabilidade Entrada-Saída

Curiosidade Uma função absolutamente integrável pode não ser limitada ou, ainda, pode não tender a 0 quando $t \to \infty$

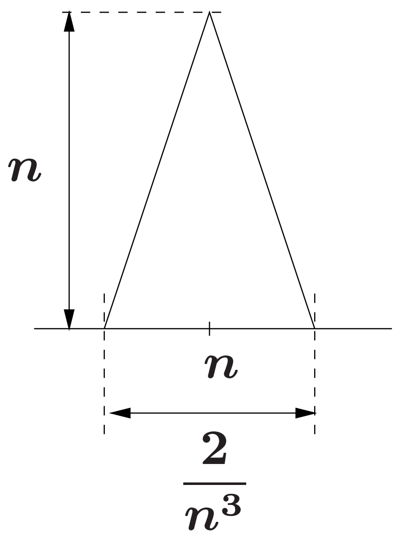
Exemplo Considere a função

$$f(t-n) = \begin{cases} n + (t-n)n^4 & \text{para} \quad n - 1/n^3 \leq t \leq n \\ \\ n - (t-n)n^4 & \text{para} \quad n < t \leq n + 1/n^3 \end{cases}$$

definida para $n = 2, 3, \ldots$

Estabilidade Entrada-Saída

A área sob cada triângulo



é igual a $1/n^2$

A integral do valor absoluto da função é $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

$\rightsquigarrow$ Note que a função é absolutamente integrável, porém não é limitada e nem tende a zero quando $t \to \infty$

Estabilidade Entrada-Saída

Teorema Considere $G(s)$ a transformada de Laplace de $g(t)$, isto é:

$$G(s) = \int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Se um sistema com resposta ao impulso $g(t)$ é BIBO estável, então quando $t \to \infty$:

1. A resposta a uma entrada $u(t) = a$, para $t \geq 0$, tende para $G(0)a$
2. A resposta a uma entrada $u(t) = \sin(\omega_0 t)$, para $t \geq 0$, tende a

$$|\ G(j\omega_0)\ |\ \ \sin(\omega_0 t + \theta) \quad ; \quad \theta \triangleq \angle G(j\omega_0)$$

Estabilidade Entrada-Saída

▷ Item 1) Se $u(t) = a$, $\forall t \geq 0$, então:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\
&= a\int_0^t g(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

o que implica que quando $t \to \infty$

$$
\begin{aligned}
y(t) &\to a\int_0^\infty g(\tau)d\tau \\
&= a\ G(0) \qquad \text{(Laplace com } s = 0\text{: } G(0) = \int_0^\infty g(\tau)e^{-0\tau}d\tau\text{)}
\end{aligned}
$$

Estabilidade Entrada-Saída

▷ Item 2) Se $u(t) = \sin(\omega_0 t)$:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t g(\tau)\sin\left[\omega_0(t-\tau)\right] d\tau \\
&= \int_0^t g(\tau)\left[\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 \tau) - \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 \tau)\right] d\tau \\
&= \sin(\omega_0 t)\int_0^t g(\tau)\cos(\omega_0 \tau) d\tau - \cos(\omega_0 t)\int_0^t g(\tau)\sin(\omega_0 \tau) d\tau
\end{aligned}
$$

Quando $t \to \infty$

$$
y(t) \to \sin(\omega_0 t)\int_0^\infty g(\tau)\cos(\omega_0 \tau) d\tau - \cos(\omega_0 t)\int_0^\infty g(\tau)\sin(\omega_0 \tau) d\tau
$$

Estabilidade Entrada-Saída

Reescrevendo em Laplace: $e^{-s\tau} = e^{-j\omega\tau}$, e usando Euler , tem-se:

$$G(j\omega) = \int_0^\infty g(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_0^\infty g(\tau)[\cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)]d\tau$$

Como assume-se implicitamente que $g(t)$ (resposta ao impulso) é real, tem-se

$$\text{Re}\{G(j\omega)\} = \int_0^\infty g(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau\,,\ \text{Im}\{G(j\omega)\} = -\int_0^\infty g(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau$$

Substituindo na expressão para $y(t)$ anterior, tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &\rightarrow \sin(\omega_0 t)\text{Re}\{G(j\omega_0)\} + \cos(\omega_0 t)\text{Im}\{G(j\omega_0)\} \\ y(t) &\rightarrow \mid G(j\omega_0) \mid \sin(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$

$$\theta \triangleq \angle G(j\omega_0) = \tan^{-1}\left[\text{Im}\ G(j\omega_0)/\text{Re}\ G(j\omega_0)\right]$$

Estabilidade Entrada-Saída

Teorema Um sistema SISO com função de transferência racional própria $G(s)$ é BIBO estável se e somente se todos os polos de $G(s)$ têm parte real negativa ou, equivalentemente, estão no semi-plano esquerdo do plano complexo

- Note que se $G(s)$ tem um polo p_i com multiplicidade m_i, a expansão em frações parciais de $G(s)$ tem fatores

$$\frac{1}{s - p_i}\,;\quad \frac{1}{(s - p_i)^2}\,;\quad \cdots\,;\quad \frac{1}{(s - p_i)^{m_i}}$$

e portanto a transformada inversa de Laplace contém os fatores

$$e^{p_i t}\,;\quad t e^{p_i t}\,;\quad \ldots\,;\quad t^{m_i - 1} e^{p_i t}$$

Como pode ser verificado, cada um desses termos é absolutamente integrável se, e somente se, p_i tem parte real negativa

Estabilidade Entrada-Saída

Teorema Um sistema MIMO com matriz resposta ao impulso dada por

$$G(t) = [g_{ij}(t)]$$

é BIBO estável se, e somente se, todo $g_{ij}(t)$ for absolutamente integrável em $[0, \infty)$

Teorema Um sistema MIMO com matriz de transferência própria dada por:

$$G(s) = [G_{ij}(s)]$$

é BIBO estável se, e somente se, todo polo de $G_{ij}(s)$ tiver parte real negativa

Estabilidade BIBO de Equações Dinâmicas

Considere o sistema LIT

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad x(0) = 0 \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

com matriz de transferência descrita por:

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

A resposta ao estado nulo é BIBO estável se, e somente se, todo polo de $G(s)$ tiver parte real negativa (isto é, se todos os polos dos elementos $G_{ij}(s)$ da matriz de transferência tiverem parte real negativa)

▷ Como $G(s) = \dfrac{1}{\det(s\mathbf{I} - A)} C[\text{Adj }(s\mathbf{I} - A)]B + D$ então todo polo de $G(s)$ é também um autovalor de A. Assim, se todo autovalor de A tem parte real negativa, então o sistema é BIBO estável

Estabilidade BIBO de Equações Dinâmicas

Nota Nem todo autovalor de $\boldsymbol{A}$ é polo de $\boldsymbol{G(s)}$ (pode haver cancelamentos)

$\rightsquigarrow$ Portanto, $\boldsymbol{A}$ pode ter autovalores nulos ou com parte real positiva e ainda assim o sistema pode ser BIBO estável

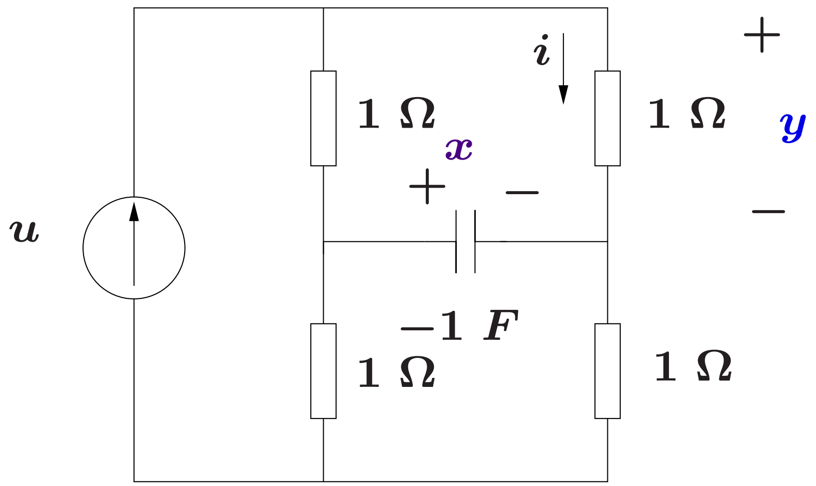
Exemplo Para:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$\mathcal{L} \;\rightarrow\; G(s) = \frac{1}{s+1} \;\rightarrow\; \mathcal{L}^{-1} \;\rightarrow\; g(t) = e^{-t} \quad \text{(é BIBO estável)}$$

Estabilidade BIBO de Equações Dinâmicas

Exemplo Considere o circuito (com $v_C = x$ e $i_{v_C} = \dot{x}$ – polaridade trocada)



$\Rightarrow$

Tensão na malha superior:

$(-i \times 1) + x + [(u - i) \times 1] = 0$

$\hookrightarrow$ ou $i = \frac{1}{2}(x + u) = y$

Tensão na malha inferior:

$x + (i - \dot{x}) \times 1 - (u - i + \dot{x}) \times 1 = 0$

$\hookrightarrow$ ou $2\dot{x} = 2i + x - u = 2x$

$\rightsquigarrow$ Eq. de estado: $\dot{x} = x + 0 = Ax + Bu$; $y = 0.5x + 0.5u = Cx + Du$

$\rightsquigarrow$ Função de transferência: $G(s) = 0.5(s-1)^{-1}0 + 0.5 = 0.5$

$\rightsquigarrow$ $\lambda(A) = 1$ não é um polo da FT (a FT é uma constante 0.5)

$\rightsquigarrow$ No entanto o sistema é BIBO estável...

Sistemas Discretos

Considere o sistema discreto SISO descrito por

$$y(k) = \sum_{m=0}^{k} g(k-m)u(m) = \sum_{m=0}^{k} g(m)u(k-m)$$

sendo $g(k)$ a resposta ao impulso ou, equivalentemente, a saída para uma sequência impulsiva aplicada em $k = 0$

Uma sequência $u(k)$ é limitada se $u(k)$ não cresce (ou decresce) indefinidamente, ou seja, se existe uma constante u_m tal que

$$|\, u(k)\, | \leq u_m < \infty \quad \text{para } k = 0,1,2,\ldots$$

Um sistema é BIBO estável se toda sequência limitada aplicada na entrada gerar uma sequência limitada na saída

Teorema Um sistema discreto SISO é BIBO-estável se, e somente se, $g(k)$ for absolutamente somável no intervalo $[0, \infty)$, ie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mid g(k) \mid \leq M < \infty$$

sendo M uma constante

Sistemas Discretos

Teorema Considere $G(z)$ a transformada Z de $g(k)$, isto é

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g(m) z^{-m}$$

Se um sistema discreto SISO com resposta ao impulso $g(k)$ é BIBO estável, então quando $k \to \infty$:

1. A resposta a uma entrada $u(k) = a$, para $k \geq 0$, tende a $G(1)a$
2. A resposta a uma entrada $u(k) = \sin(\omega_0 k)$, para $k \geq 0$, tende a

$$|\, G[e^{j\omega_0}] \,| \;\; \sin(\omega_0 t + \theta) \quad ; \quad \theta \triangleq \angle G[e^{j\omega_0}]$$

Teorema Um sistema discreto SISO com função de transferência racional própria $G(z)$ é BIBO estável se, e somente se, todos os polos de $G(z)$ têm magnitude menor do que 1 ou, equivalentemente, estão no interior do círculo unitário do plano complexo z

- Se $G(z)$ tem um polo p_i com multiplicidade m_i, a expansão em frações parciais de $G(z)$ contém fatores

$$\frac{1}{z-p_i}\ ;\ \ \frac{1}{(z-p_i)^2}\ ;\ \ \cdots\ ;\ \ \frac{1}{(z-p_i)^{m_i}}$$

e portanto a transformada inversa Z contém os fatores

$$p_i^k\ ;\ \ kp_i^k\ ;\ \ \ldots\ ;\ \ k^{m_i-1}p_i^k$$

Como pode ser verificado, cada um desses termos é absolutamente somável se e somente se p_i tem magnitude menor do que 1

Sistemas Discretos

▷ No caso contínuo, uma função absolutamente integrável não necessariamente é limitada e nem tende a zero quando $t \to \infty$

▷ Para sistemas discretos, se $g(k)$ é absolutamente somável, então $g(k)$ é limitada e tende a zero quando $k \to \infty$. No entanto, o contrário pode não ser verdadeiro

Exemplo Considere um sistema discreto invariante no tempo com a resposta ao impulso dada pela sequência $g(k) = 1/k$, para $k = 1, 2, \ldots$ e $g(0) = 0$. Note que calculando a soma:

$$S \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} | g(k) | = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$$

obtém-se...

Sistemas Discretos

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots \end{aligned}$$

Para cada termo dentro de parênteses, a soma é sempre maior que $1/2$ e, portanto:

$$S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty$$

$\therefore$ o sistema não é BIBO estável

No entanto, esta sequência de resposta ao impulso é limitada e tende a zero quando $k \to \infty$

Sistemas Discretos

Teorema Um sistema discreto MIMO com matriz resposta ao impulso $G(k) = [g_{ij}(k)]$ é BIBO estável se, e somente se, todo $g_{ij}(k)$ for absolutamente somável

Teorema Um sistema MIMO com matriz de transferência própria $G(z) = [G_{ij}(z)]$ é BIBO estável se, e somente se, todo polo de $G_{ij}(z)$ tiver magnitude menor que 1

Estabilidade BIBO de Equações Dinâmicas Discretas

Considere o sistema: $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = 0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$

▷ Matriz de transferência: $G(z) = C(z\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$

▷ A resposta ao estado nulo é BIBO estável se, e somente se, todo polo de $G(z)$ tiver magnitude menor do que 1

▷ Como $G(z) = \dfrac{1}{\det(z\mathbf{I} - A)} C[\text{Adj } (z\mathbf{I} - A)]B + D$, então todo polo de $G(z)$ é também um autovalor de A. Assim, se todo autovalor de A tem magnitude menor do que 1, então o sistema é BIBO estável

▷ Da mesma forme que no caso a tempo contínuo, nem todo autovalor de A é polo de $G(z)$ (pode haver cancelamentos)