

Métodos de Resposta em Frequência

1. Motivação
2. Gráficos de resposta em frequência

Métodos de Resposta em Frequência

Origem do termo? Entende-se por resposta em frequência, a resposta em estado estacionário de um sistema ao se aplicar uma entrada senoidal

Motivação Uma vantagem da abordagem por resposta em frequência surge do fato da simplicidade com que se pode, experimentalmente, realizar medidas da resposta em frequência usando geradores de sinais

- ▷ É possível que funções de transferência de sistemas complicados possam ser determinadas experimentalmente por testes em respostas em frequência
- ▷ Há ainda a vantagem que pode-se projetar o controlador mitigando o efeito de ruídos em certas faixas de frequências

Análise de Resposta em Frequência

Saída em Estado Estacionário para entrada Senoidal – Considere um sistema linear e invariante no tempo $G(s)$, tal que $Y(s) = G(s)R(s)$. A entrada $r(t)$ é senoidal e descrita da forma

$$r(t) = R \operatorname{sen}(\omega t) \xrightarrow{\mathcal{L}} R(s) = R \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Logo

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) R \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + p_1} + \dots + \frac{b_n}{s + p_n} \end{aligned}$$

sendo a e b_i , $i = 1, \dots, n$ constantes e \bar{a} o conjugado complexo de a

Análise de Resposta em Frequência

Aplicando \mathcal{L}^{-1} em $Y(s)$, obtém-se a resposta temporal:

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-p_1t} + \dots + b_n e^{-p_n t}, \quad t \geq 0$$

Para sistemas estáveis, $-p_1, \dots, -p_n$ têm parte real negativa. Portanto, em estado estacionário, a parcela $e^{-p_1t} + \dots + e^{-p_nt}$ tende a zero, com exceção dos dois primeiros termos: $ae^{-j\omega t}$ e $\bar{a}e^{j\omega t}$

▷ Note que se $Y(s)$ tem múltiplos polos reais p_j de multiplicidade m_j , então $y(t)$ terá termos da forma

$$t^{h_j} e^{-p_j t} \quad (h_j = 0, 1, \dots, m_j - 1)$$

e, se o sistema é estável, $p/ t \rightarrow \infty$, $t^{h_j} e^{-p_j t} \rightarrow 0$ (isto é, não faz diferença se considerarmos polos reais repetidos ou não para a análise em estado estacionário)

Análise de Resposta em Frequência

► Portanto a resposta em estado estacionário depende apenas da parcela abaixo:

$$y_{ss}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t}$$

Para obter "a" e " \bar{a} ", note que em

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + p_1} + \dots + \frac{b_n}{s + p_n}$$

pode-se multiplicar os dois lados por $(s + j\omega)$ tal que:

$$Y(s)(s + j\omega) = \frac{a}{\cancel{(s + j\omega)}} \cancel{(s + j\omega)} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega} (s + j\omega) \\ + \frac{b_1}{s + p_1} (s + j\omega) + \dots + \frac{b_n}{s + p_n} (s + j\omega)$$

ao isolar "a" obtém-se a forma a seguir na próxima página...

Análise de Resposta em Frequência

Isolando “a”:

$$a = Y(s)(s + j\omega) - \frac{\bar{a}}{s - j\omega}(s + j\omega) - \frac{b_1}{s + p_1}(s + j\omega) - \dots + \frac{b_n}{s + p_n}(s + j\omega)$$

Avaliando em $s = -j\omega$ note que:

$$\begin{aligned} a = a \Big|_{s=-j\omega} &= \left[Y(s)(s + j\omega) - \frac{\bar{a}}{s - j\omega}(s + j\omega) - \frac{b_1}{s + p_1}(s + j\omega) - \dots + \frac{b_n}{s + p_n}(s + j\omega) \right]_{s=-j\omega} \\ &= Y(s)(s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} \end{aligned}$$

Análise de Resposta em Frequência

Note que como $Y(s) = G(s) R \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, então:

$$\begin{aligned} a &= G(s) \frac{\omega R}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} \\ &= G(s) \frac{\omega R}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \cancel{(s + j\omega)} \Big|_{s=-j\omega} \\ &= -\frac{RG(-j\omega)}{2j} \end{aligned}$$

Pode-se proceder da mesma forma para obter " \bar{a} ":

$$\bar{a} = G(s) \frac{\omega R}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{RG(j\omega)}{2j}$$

Análise de Resposta em Frequência

▷ Note que $G(j\omega)$ pode ser escrita na forma polar: $G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}$

Sendo que o ângulo (fase) é dado por: $\phi = \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im} [G(j\omega)]}{\text{Re} [G(j\omega)]} \right\}$

e o módulo é: $|G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re} [G(j\omega)]^2 + \text{Im} [G(j\omega)]^2} > 0$

▷ Portanto, quando o argumento de $G(\cdot)$ é negativo, o módulo não se altera e a fase acompanha o sinal do argumento:

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\phi} = |G(j\omega)| e^{-j\phi}$$

Análise de Resposta em Frequência

$$\begin{aligned}\therefore y_{ss}(t) &= a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t} \quad (\text{com } a \text{ e } \bar{a} \text{ na forma polar}) \\ &= -\frac{R|G(j\omega)| e^{-j\phi}}{2j} e^{-j\omega t} + \frac{R|G(j\omega)| e^{j\phi}}{2j} e^{j\omega t} \\ &= R|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= R|G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi) \\ &= Y \text{sen}(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

sendo $Y = R|G(j\omega)|$

Análise de Resposta em Frequência

Portanto, para um sistema estável LIT e sujeito a uma entrada senoidal, em estado estacionário a saída será também senoidal e tendo a mesma frequência que a entrada, porém com **amplitude e fase diferentes**

Nota Consequência desta análise: substitui-se s por $j\omega$

Gráfico de Resposta em Frequência

Formas gráficas para se apresentar resposta em frequência

1. Diagrama de Bode ou diagrama logarítmico
2. Diagrama de Nyquist ou diagrama polar
3. Carta de Nichols ou magnitude logarítmica versus diagrama de fase

Uma Discussão Prévia – Aquecendo os Motores

Para um circuito RC com função de transferência descrita por:

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}, \quad \text{defina: } \varphi = \frac{1}{RC}$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(RC) + 1} = \frac{1}{j\omega\left(\frac{1}{\varphi}\right) + 1}$$

Pode-se traçar um gráfico polar a partir da relação:

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \frac{1 - j(\omega/\varphi)}{1 + (\omega/\varphi)^2} = \frac{1}{1 + (\omega/\varphi)^2} - j \frac{(\omega/\varphi)}{1 + (\omega/\varphi)^2}$$

Uma Discussão Prévia – Aquecendo os Motores

Que na forma polar é descrita como:

$$G(j\omega) = |G(\omega)| \underline{\angle\phi(\omega)}$$



$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\varphi)^2}}, \quad \underline{\angle\phi(\omega)} = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\varphi} \right)$$

▷ Note que a construção de diagramas polares é trabalhosa e não indicam o efeito individual de polos e zeros!! **Uma boa alternativa é usar gráficos logarítmicos, ou diagramas de Bode**, que simplificam bastante o traçado da resposta em frequência, além de facilitar a sua interpretação

Gráfico de Resposta em Frequência

Diagrama logarítmico Note que o logarítmico tem as seguintes propriedades:

$$\log \frac{[(ab)]^n}{cd} = n \log a + n \log b - \log c - \log d$$

i.e., termos multiplicativos são convertidos em termos aditivos e termos que dividem são adicionados como termos negativos. Semelhança com FT descrita em termos de ganho, zeros e polos é imediata e possibilita adicionar (ou subtrair) **individualmente** o efeito de novos polos, zeros e ganho de forma fácil

► O logarítmico do módulo da FT pode ser expresso em decibéis (dB), i.e.:

$$20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

No diagrama de Bode, o logarítmico da magnitude $\times \log_{10} \omega$ é traçada em um diagrama e o ângulo (fase) $\times \log_{10} \omega$ em outro diagrama, i.e., separados

Curiosidade

▷ Tradicionalmente na área de Comunicações é padrão medir o ganho de Potência em decibéis da forma:

$$|G| = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

sendo que P_1 e P_2 são, respectivamente, as potências de entrada e saída (por exemplo, P_1 e P_2 poderiam denotar a intensidade de duas fontes sonoras e o ganho mede a intensidade relativa entre os sons ou a relação de potência)

▷ Decibéis é também usado de forma mais genérica para expressar a taxa logarítmica de duas magnitudes de qualquer unidade, por exemplo: tensões ou correntes. Nestes casos onde a razão é de uma **quantidade quadrática, 1 dB se iguala 20 vezes \log_{10} da razão**. De fato, como potência elétrica é proporcional ao quadrado da tensão (considerando impedância constante), o ganho de potência é:

$$|G| = 20 \log_{10} \frac{V_{saída}}{V_{entrada}}$$

Gráfico de Resposta em Frequência

Exemplo Considerando um circuito RC obtém-se:

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \left\{ \left[\frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = -10 \log \{1 + (\omega RC)^2\}$$

▷ Para **baixas frequências**, i.e., $\omega \ll 1/RC = 1/\tau$, o ganho logarítmico é:

$$20 \log |G(j\omega)| = -10 \log 1 = 0\text{dB}$$

▷ Para **altas frequências**, i.e., $\omega \gg 1/RC$, obtém-se:

$$20 \log |G(j\omega)| = -10 \log \{(\omega RC)^2\} = -20 \log \omega RC = -20 \log \omega \tau$$

▷ Particularmente quando $\omega = 1/RC$, na chamada frequência de corte (ou de canto), obtém-se:

$$20 \log |G(j\omega)| = -10 \log(1 + 1) = -3.01\text{dB}$$

Gráfico de Resposta em Frequência

Nota Para altas frequências, escolhendo $\omega_2 = 10\omega_1$, ou $\omega_1 = \omega_2/10$, obtém-se neste trecho a relação de magnitude da forma

$$\begin{aligned} -20 \log \omega_2 \tau - (-20 \log \omega_1 \tau) &= -20 \log \frac{\omega_2 \tau}{\omega_1 \tau} \\ &= -20 \log 10 \\ &= -20 \text{ dB/década} \end{aligned}$$

Gráfico de Resposta em Frequência

▷ Da mesma forma, considerando por exemplo $\omega_2 = 2\omega_1$, obtém-se

$$\begin{aligned} -20 \log \omega_2 \tau - (-20 \log \omega_1 \tau) &= -20 \log \frac{\omega_2 \tau}{\omega_1 \tau} \\ &= -20 \log 2 \\ &= -6 \text{ dB/oitava} \end{aligned}$$

Gráfico de Resposta em Frequência

- ▷ Note que para o circuito RC, a fase para o polo é:

$$\phi(\omega) = \angle \left(\frac{1}{1+j\omega\tau} \right) = -\angle(1+j\omega\tau) = -\tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} \right\} = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

- ▷ Para baixas frequências, $\omega \ll 1/\tau$ ($\omega \rightarrow 0$), obtém-se

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+0j) = -\tan^{-1} 0 = 0^0$$

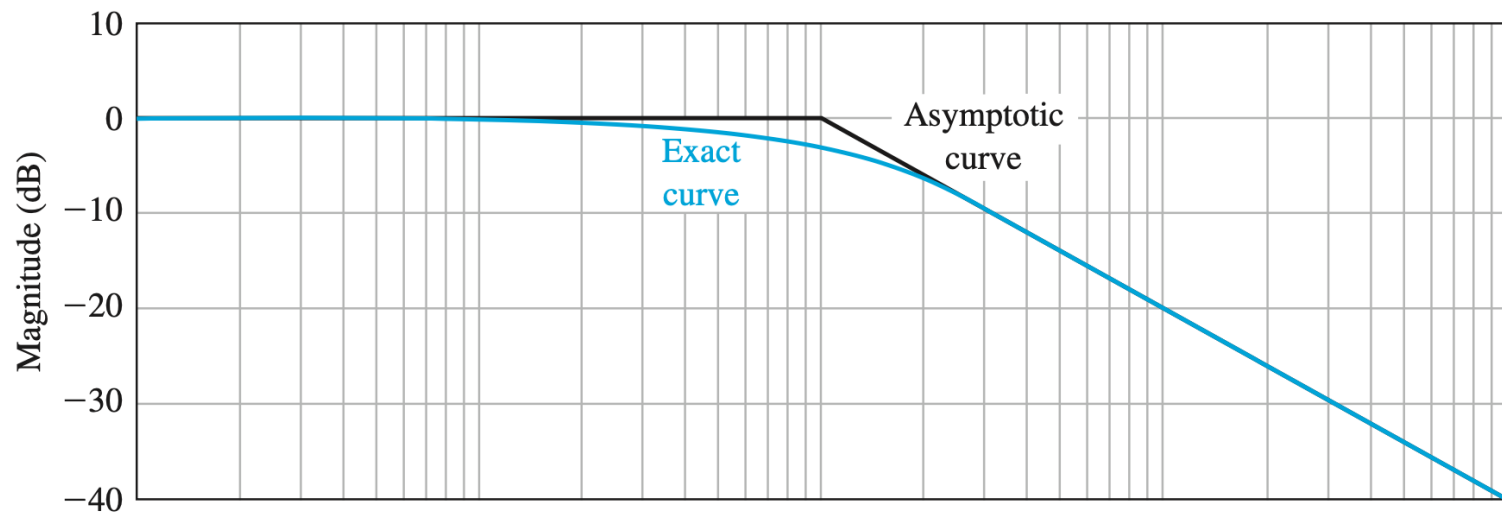
- ▷ Para altas frequências, $\omega \gg 1/\tau$ ($\omega \rightarrow \infty$), obtém-se

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+\infty j) = -\tan^{-1} \infty = -90^0$$

- ▷ Quando $\omega = 1/\tau$, na frequência de corte obtém-se

$$\angle G(j\omega) = -\angle(1+1j) = -\tan^{-1} 1 = -45^0$$

Diagrama de Bode de $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$



(a)

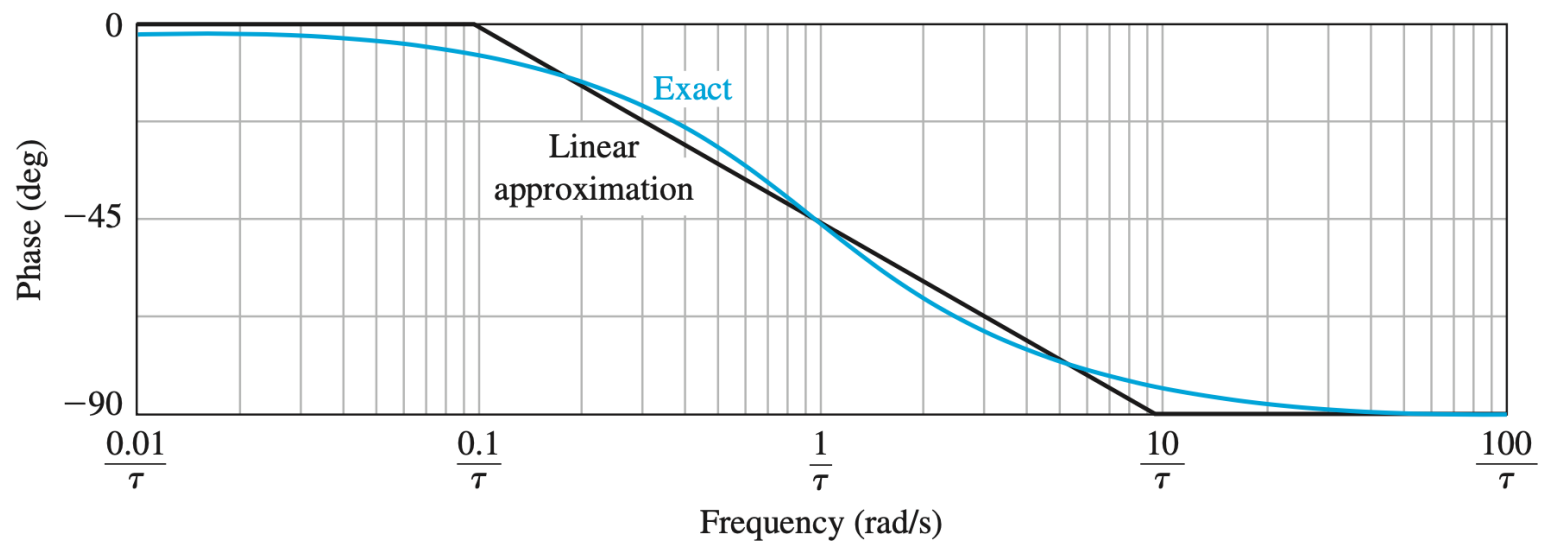


Gráfico de Resposta em Frequência

Para a Função de Transferência genérica:

$$G(j\omega) = \frac{K \prod_{i=1}^Q (1 + j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^M (1 + j\omega\tau_m) \prod_{k=1}^R \left[1 + \left(\frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} \right) j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 \right]}$$

Gráfico de Resposta em Frequência

O módulo logarítmico de $G(j\omega)$ é

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= 20 \log K + 20 \sum_{i=1}^Q \log |1 + j\omega\tau_i| \\ &\quad - 20 \log |(j\omega)^N| - 20 \sum_{m=1}^M \log |1 + j\omega\tau_m| \\ &\quad - 20 \sum_{k=1}^R \log \left| 1 + \left(\frac{2\zeta_k}{\omega_{n,k}} \right) j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n,k}} \right)^2 \right| \end{aligned}$$

Nota Basta adicionar a parcela de cada fator individualmente...

Gráfico de Resposta em Frequência

O gráfico da fase corresponde à soma dos argumentos de cada fator da FT, ou:

$$\begin{aligned}\phi(\omega) = & \sum_{i=1}^Q \tan^{-1}(\omega\tau_i) - N(90^\circ) \\ & - \sum_{m=1}^M \tan^{-1}(\omega\tau_m) \\ & - \sum_{k=1}^R \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta_k \omega_{n,k} \omega}{\omega_{n,k}^2 - \omega^2} \right)\end{aligned}$$

Gráfico de Resposta em Frequência

▷ Note que os quatro tipos de fatores que podem aparecer em uma FT são:

1. Ganho constante — K

2. Polos ou zeros na origem — $j\omega$

3. Polos ou zeros no eixo real — $j\omega\tau + 1$

4. Polos ou zeros complexos conjugados — $1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$

▷ O diagrama é obtida somando-se graficamente as curvas de cada fator

Gráfico de Resposta em Frequência

Ganho Constante — K

$$20 \log K = \text{constante em dB}, \quad \phi(\omega) = 0^0$$

▷ Se $K < 0$, o módulo permanece $20 \log K$, porém a fase passa a ser 180^0

Polos ou zeros na origem — $j\omega$ Para um polo na origem

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB}$$

e

$$\phi(\omega) = \angle \frac{1}{j\omega} = -\angle(\mathbf{0} + j\omega) = -\tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} \right\} = -\tan^{-1} \infty = -90^0$$

Para zero na origem: $20 \log |j\omega| = +20 \log \omega \text{ dB}, \quad \phi(\omega) = +90^0$

Gráfico de Resposta em Frequência

Polos no eixo real — $j\omega\tau + 1$ para um polo em $-1/\tau$, obtém-se

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = -10 \log(1 + \omega^2\tau^2) \text{ dB}, \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau$$

Zeros no eixo real — $j\omega\tau + 1$ para um zero em $-1/\tau$, obtém-se

$$20 \log |1 + j\omega\tau| = 10 \log(1 + \omega^2\tau^2) \text{ dB}, \quad \phi(\omega) = \tan^{-1} \omega\tau$$

Gráfico de Resposta em Frequência

Polos ou zeros complexos conjugados — $1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$

O fator quadrático correspondente a um par de polos complexos conjugados pode ser escrito na forma normalizada

$$1 + j2\zeta u - u^2, \quad \text{sendo } u = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Portanto, para

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{1 - u^2 + j2\zeta u}$$

Gráfico de Resposta em Frequência

Obtém-se então:

$$20 \log |G(j\omega)| = -10 \log [(1 - u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2], \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\zeta u}{1 - u^2} \right)$$

▷ Quando $u \ll 1$,

$$20 \log |G(j\omega)| \approx -10 \log 1 = 0 \text{ dB}, \quad \phi(\omega) \rightarrow 0^0$$

▷ Quando $u \gg 1$,

$$20 \log |G(j\omega)| \approx -10 \log u^4 = -40 \log u \text{ dB}, \quad \phi(\omega) \rightarrow -180^0$$

resultando em uma curva com inclinação de $-40\text{dB}/\text{década}$

▷ As duas assíntotas encontram-se na linha de 0dB quando $u = \omega/\omega_n = 1$

Gráfico de Resposta em Frequência

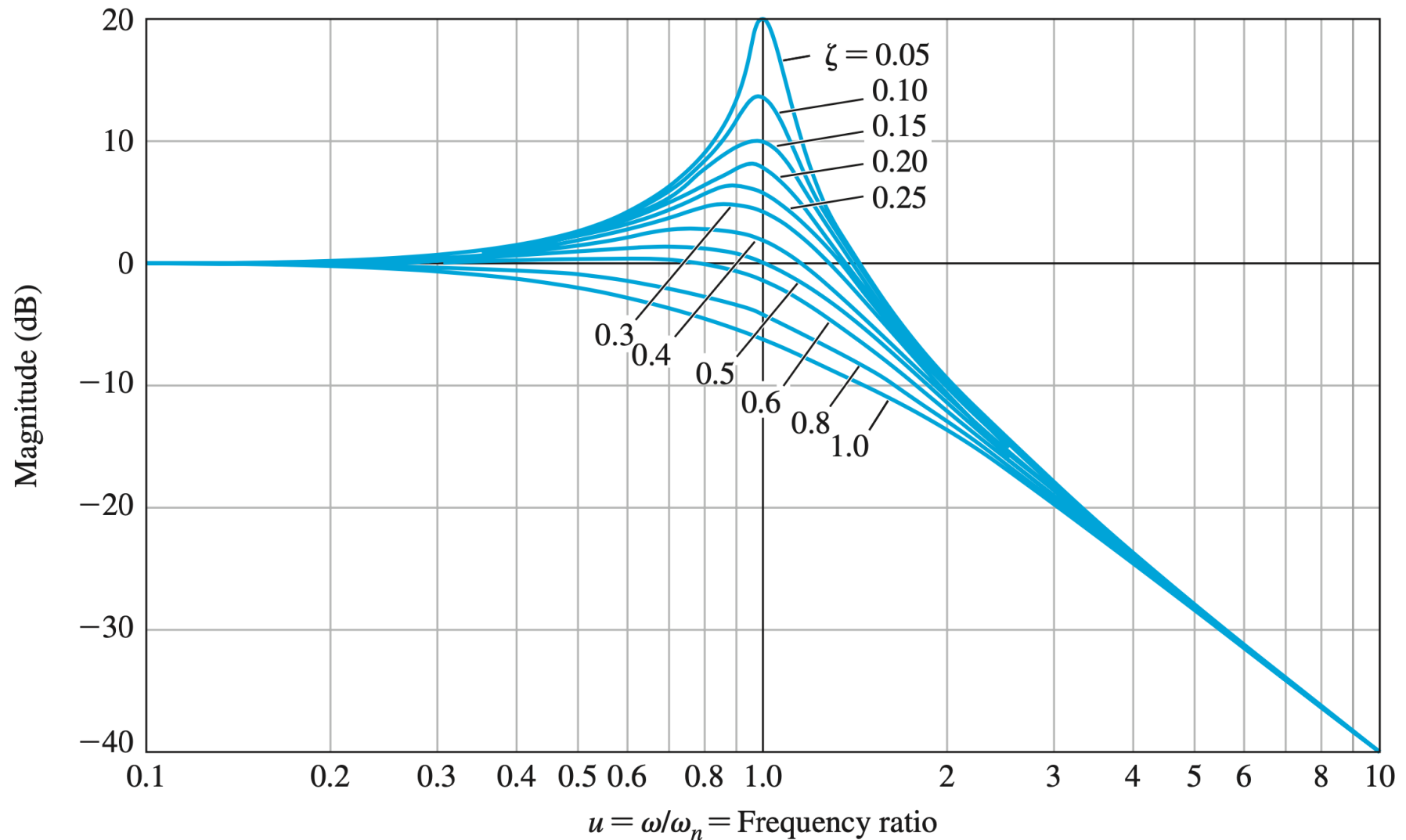
A aproximação é boa para raízes complexas? Note que as duas assíntotas obtidas são independentes do valor do fator de amortecimento, i.e., o amortecimento não foi considerado no traçado da curva de magnitude...

► Pode-se notar que próximo à frequência $\omega = \omega_n$, um pico ressonante pode acontecer, e que pode ser computado diretamente de:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right) j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

O valor do fator de amortecimento, ζ , determina a magnitude deste pico ressonante. Para valores pequenos geram-se picos grandes... Isto é ilustrado na figura da próxima página

$$\text{Magnitude para } G(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



$$\text{Fase para } G(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

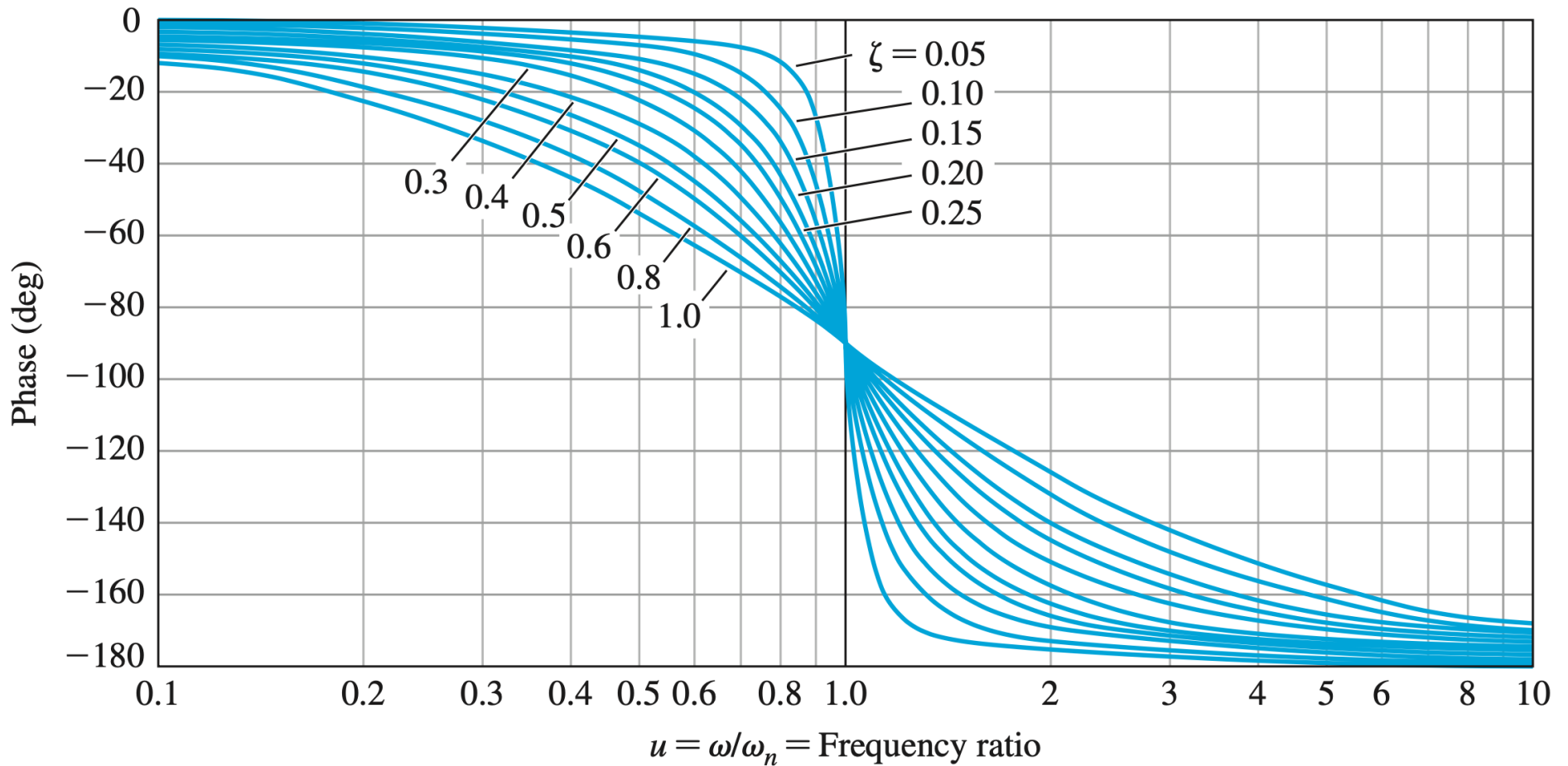


Gráfico de Resposta em Frequência

Frequência de ressonância (ω_r) e pico ressonante (M_ω)

Pela figura de magnitude anterior nota-se que o valor máximo de $|G(j\omega)|$, denotado por M_ω , ocorre na frequência de ressonância ω_r

▷ ω_r é determinado no valor máximo do módulo de $G(j\omega)$:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

Gráfico de Resposta em Frequência

Como o numerador de $|G(j\omega)|$ é constante, o valor de pico de $|G(j\omega)|$ irá ocorrer quando o valor do seu denominador assumir o valor mínimo, i.e.:

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2 = \left[\frac{\omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\zeta^2)}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\zeta^2(1 - \zeta^2)$$

o que ocorre em

$$\omega_r = \omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Substituindo ω_r em $|G(j\omega)|$, obtém-se o pico ressonante

$$M_\omega = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

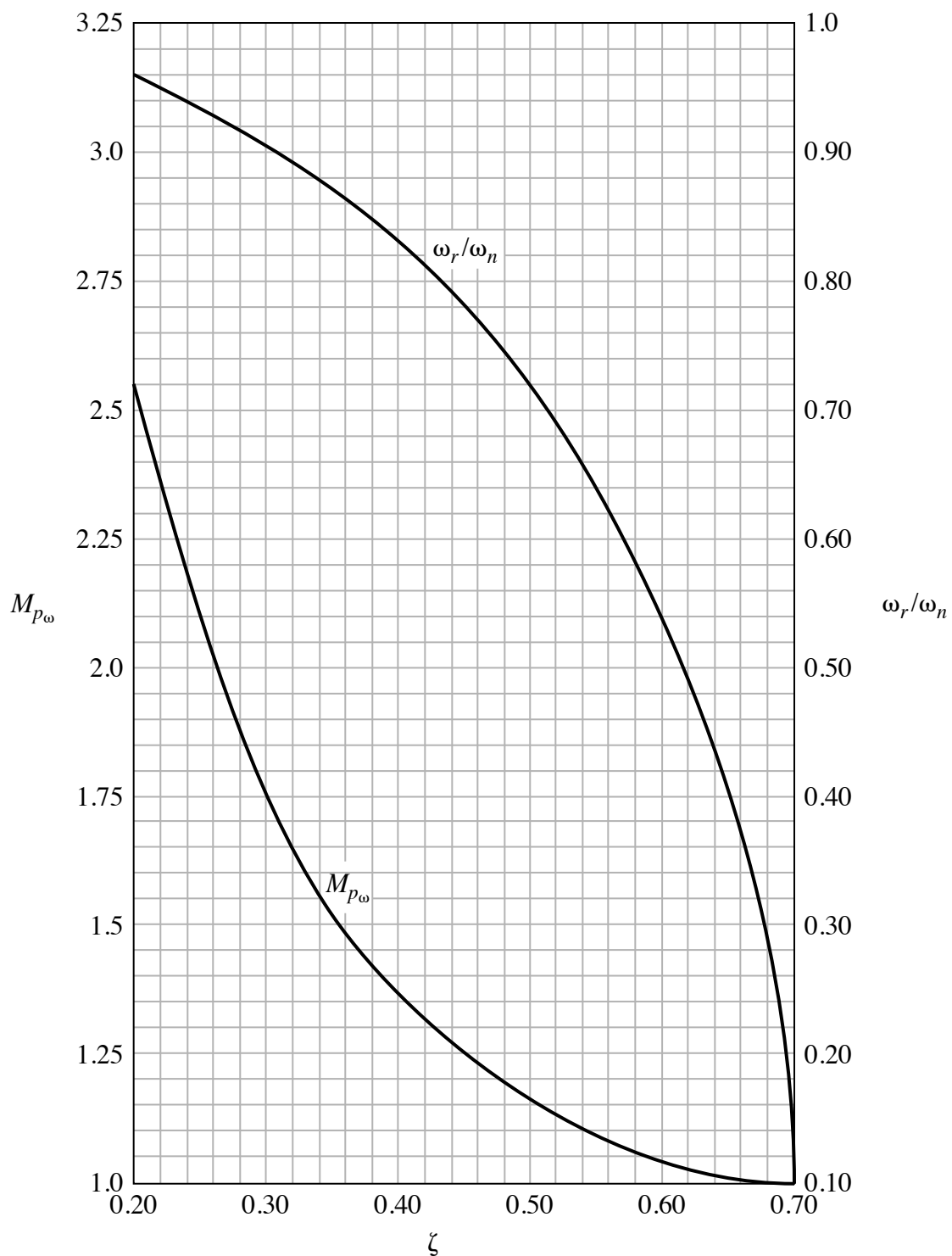


Figure 8.11 The maximum of the frequency response, $M_{p\omega}$, and the resonant frequency, ω_r , versus ζ for a pair of complex conjugate poles

TABLE 8.3 Asymptotic Curves for Basic Terms of a Transfer Function



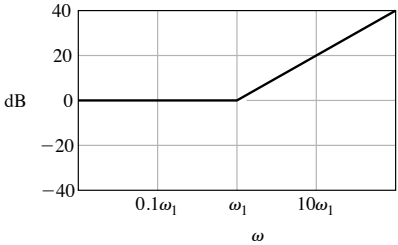
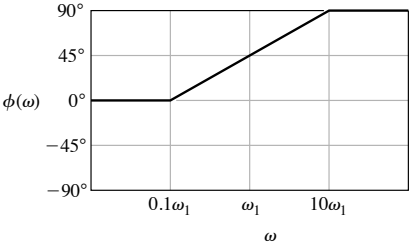
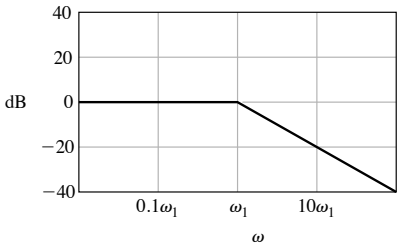
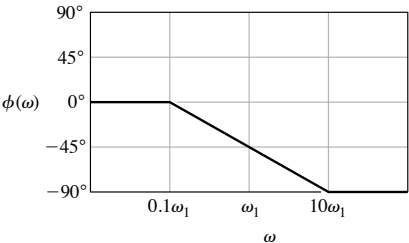
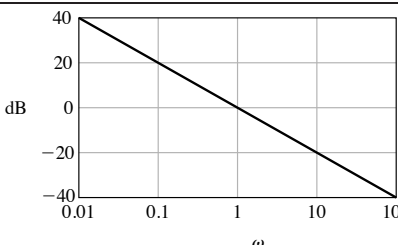
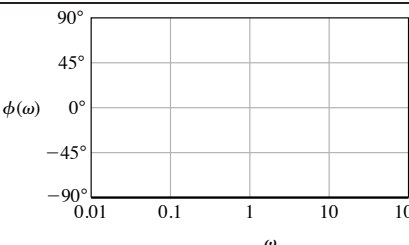
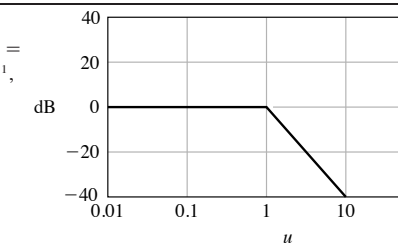
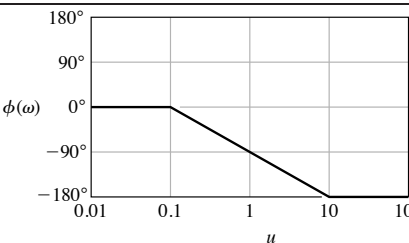
Term	Magnitude $20 \log G $	Phase, $\phi(\omega)$
1. Gain, $G(j\omega) = K$		
2. Zero, $G(j\omega) = (1 + j\omega/\omega_1)$		
3. Pole, $G(j\omega) = (1 + j\omega/\omega_1)^{-1}$		
4. Pole at the origin, $G(j\omega) = 1/j\omega$		
5. Two complex poles, $0.1 < \zeta < 1, G(j\omega) = (1 + j2\zeta u - u^2)^{-1},$ $u = \omega/\omega_n$		

Table 8.3 Asymptotic curves for basic terms of a transfer function