Solução em Espaço de Estado

1. Solução para Sistemas Lineares Variantes no Tempo (LVT)
   1.1 Matriz Fundamental
   1.2 Matriz de Transição de Estados
   1.3 Solução de Sistemas LVT a tempo contínuo
   1.4 Solução de Sistemas LVT a tempo discreto
2. Equações Equivalentes para Sistemas LVT
3. Equações de Estados Periódicas
4. Realizações de Sistemas LVT

Solução de Equações Lineares Variante no Tempo

Para o sistema Linear e Variante no Tempo (LVT):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

$A_{n\times n}(\cdot)$, $B_{n\times p}(\cdot)$, $C_{q\times n}(\cdot)$, $D_{q\times p}(\cdot)$: são funções contínuas do tempo

▷ Por hipótese, a solução é única para x_0 e $u_{[t_0,\infty)}$ dados (condição suficiente é $A(t)$ ser função contínua do tempo)

▷ Soluções da Equação Homogênea: $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

Teorema O conjunto de todas as soluções de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ forma um espaço linear n-dimensional

Solução de Equações Lineares Variante no Tempo

- Sejam χ_1 e χ_2 soluções quaisquer da equação homogênea $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.
- Defina $\quad \Xi \ : \ $ conjunto de todas as soluções de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$
- Note que para α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ quaisquer pode-se escrever:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2\big) &= \alpha_1\frac{d}{dt}\chi_1 + \alpha_2\frac{d}{dt}\chi_2 \\
&= \alpha_1 A(t)\chi_1 + \alpha_2 A(t)\chi_2 \\
&= A(t)\left(\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2\right)
\end{aligned}
$$

$$(\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2) \in \Xi$$

Matriz Fundamental

$\rightsquigarrow$ Considere o sistema homogêneo $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ de dimensão n

$\looparrowright$ Para cada condição inicial $x_i(t_0)$, existe uma solução única $\chi_i(t)$, para $i = 1,2,\ldots,n$. Essas soluções podem ser arranjadas em uma matriz quadrada de ordem n:

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} \chi_1(t) & \chi_2(t) & \cdots & \chi_n(t) \end{bmatrix}$$

- Como cada coluna de $\chi(t)$ satisfaz a equação homôgenea, então $\chi(t)$ também satisfaz o sistema homogêneo: $\dot{\chi}(t) = A(t)\chi(t)$

- Se $\chi(t_0)$ é não singular, i.e., as n condições iniciais são linearmente independentes, $\chi(t)$ é chamada Matriz Fundamental de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

- Como as condições iniciais são arbitrárias, a matriz fundamental não é única...

- Uma matriz fundamental $\chi(t)$ é não singular para todo t

Obtendo Matriz Fundamental

Exemplo Considere $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} x(t)$. Então pode-se obter:

$$\dot{x}_1(t) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1(t) = x_1(t_0)$$

e

$$\dot{x}_2(t) = t x_1(t) \quad \rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} x_2(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t} \tau x_1(t_0) d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$x_2(t) - x_2(t_0) = \frac{1}{2} t^2 x_1(t_0) - \frac{1}{2} {t_0}^2 x_1(t_0)$$

ou

$$x_2(t) = \frac{1}{2} t^2 x_1(t_0) - \frac{1}{2} {t_0}^2 x_1(t_0) + x_2(t_0)$$

Obtendo Matriz Fundamental

Se $t_0 = 0$ e com condições inicias dadas por $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, então

$$\chi_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}$$

Se $t_0 = 0$ e com condições inicias dadas por $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, então

$$\chi_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}t^2 + 2 \end{bmatrix}$$

- Note que bastam duas soluções LI para gerar um espaço linear 2-dimensional

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} \chi_1(t) & \chi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^2 + 2 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{Matriz Fundamental}$$

Obtendo Matriz Fundamental

Ou se $t_0 = 0$ e $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, então

$$\chi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se $t_0 = 0$ e $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$, então

$$\chi_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} \chi_1(t) & \chi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{Matriz Fundamental}$$

- Conclusão: a matrix Fundamental não é única...

Matriz de Transição de Estados

Definição Seja $\chi(t)$ uma matriz fundamental qualquer de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Diz-se então que

$$\Phi(t, t_0) \triangleq \chi(t)\chi^{-1}(t_0)$$

é a matriz de transição de estados de $\dot{x} = A(t)x$

A matriz de transição de estados $\Phi(t,t_0)$ é também a solução única de

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

sendo que a condição inicial é $\Phi(t_0, t_0) = \chi(t_0)\chi^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$

Matriz de Transição de Estados

Propriedades

$$\Phi(t,t) = \chi(t)\chi^{-1}(t) = I$$

$$\Phi^{-1}(t,t_0) = \left[\chi(t)\chi^{-1}(t_0)\right]^{-1} = \chi(t_0)\chi^{-1}(t) = \Phi(t_0,t)$$

$$\Phi(t_2,t_0) = \Phi(t_2,t_1)\Phi(t_1,t_0)$$

Exemplo

$$\begin{aligned}
\Phi(t,t_0) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t_0^2 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t_0^2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Matriz de Transição de Estados

Propriedade A matriz de transição de estados $\Phi(t, t_0)$ é unicamente determinada por $A(t)$ e independe da matriz fundamental χ escolhida

▷ De fato, considere duas matrizes fundamentais χ_1, χ_2 , soluções de $\dot{x} = A(t)x$:

Então $\exists\, P \quad : \quad \chi_2 = \chi_1 P \quad , \quad P$ é não singular

A i-ésima coluna de P é a representação da i-ésima coluna de χ_2 na base χ_1

Note então que a matriz de transição de estados pode ser escrita da forma:

$$\Phi(t, t_0) = \chi_2(t)\chi_2^{-1}(t_0) = \chi_1(t)PP^{-1}\chi_1^{-1}(t_0) = \chi_1(t)\chi_1^{-1}(t_0)$$

▷ Conclusão: $\Phi(t, t_0)$ é única

Matriz de Transição de Estados

▷ Se $A(t)$ é uma matriz triangular

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

pode-se resolver a primeira equação em $x_1(t)$ e substituir na segunda, i.e.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t), \quad \text{e} \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) \end{aligned}$$

Isto foi feito no exemplo da pág. 5 desta aula e, para estes casos, a solução é obtida facilmente

Solução de Sistemas LVT

▷ Se $A(t)$ é diagonal então a solução de

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$$

é simplesmente:

$$\Phi(t, t_0) = e^{\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right)}$$

▷ Se $A(t) = A$ é constante, então tem-se a solução tradicional para sistemas lineares e invariantes no tempo:

$$\Phi(t, t_0) = e^{\left(\int_{t_0}^{t} Ad\tau\right)} = e^{A(t-t_0)} = \Phi(t - t_0) \quad \text{e} \quad \chi(t) = e^{At}$$

Solução de Sistemas LVT

▷ Uma proposta de solução para equação de estado LVT

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

é da forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t,t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right] \end{aligned}$$

sendo $\Phi(t,\tau)$ a matriz de transição de estado de $\dot{x} = A(t)x$ (Verificar...)

Solução de Sistemas LVT

▷ Verificar se a solução $x(t)$ satisfaz a condição inicial em $t = t_0$?

$$x(t_0) = \Phi(t_0,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = \mathbf{I}x_0 + \mathbf{0} = x_0 \quad \checkmark$$

▷ Verificar se a solução $x(t)$ satisfaz $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$? Derivando $x(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x(t) &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0)}_{A(t)\Phi(t,t_0)} x_0 + \underbrace{\Phi(t,t)}_{\mathbf{I}} B(t)u(t) + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\tau)}_{A(t)\Phi(t,\tau)} B(\tau)u(\tau)d\tau \\
&= A(t)\left[\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right] + B(t)u(t) \\
&= A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Solução de Sistemas LVT

▷ Ainda, considerando a solução

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Se a entrada é nula, $u \equiv 0$, então

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0$$

Se a condição inicial é nula (estado nulo), $x_0 = 0$, então

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Isto é, $x(t)$ é a combinação:

$$x(t) \quad = \quad \text{Resposta à Entrada Nula} + \text{Resposta ao Estado Nulo}$$

Solução de Sistemas LVT

- A saída do sistema é dada por:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= C(t)\Phi(t,t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \underbrace{\Phi(t,\tau)}_{\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,\tau)} B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t) \\
&= C(t)\Phi(t,t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right] + D(t)u(t)
\end{aligned}
$$

Se $x_0 = 0$, a resposta ao estado nulo pode ser descrita como:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{t_0}^{t} \left[C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D\delta(t-\tau)\right] u(\tau)d\tau \\
&\triangleq \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

sendo $G(t,\tau)$ a matriz da resposta ao impulso aplicado no instante τ

Equações Equivalentes no caso Variante no Tempo

Para

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

Considere $P(t)$, $n \times n$, e assuma que $P(t)$ é não singular e $P(t)$ e $\dot{P}(t)$ possuem elementos contínuos para todo t. Definindo $\bar{x} = P(t)x$, o sistema

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}(t)u(t) \\ y(t) &= \bar{C}(t)\bar{x}(t) + \bar{D}(t)u(t) \end{cases}$$

com

$$\bar{A}(t) = \left[P(t)A(t) + \dot{P}(t)\right]P^{-1}(t)$$

$$\bar{B}(t) = P(t)B(t) \quad ; \quad \bar{C}(t) = C(t)P^{-1}(t) \quad ; \quad \bar{D}(t) = D(t)$$

é um sistema equivalente ao sistema anterior

Equações Equivalentes no caso Variante no Tempo

- Para a forma definida de $\bar{A}(t)$, considere $\chi(t)$ como sendo uma matriz fundamental do sistema original. Então $\bar{\chi}(t) \triangleq P(t)\chi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema equivalente

Por definição, $\dot{\chi}(t) = A(t)\chi(t)$ e $\chi(t)$ é não singular $\forall t$. Como o posto de uma matriz não se altera ao ser multiplicada por uma matriz não singular $P(t)$, $P(t)\chi(t)$ também é não singular $\forall t$. Derivando $\bar{\chi}(t) \triangleq P(t)\chi(t)$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\frac{d}{dt}[P(t)\chi(t)\,]}_{\dot{\bar{\chi}}(t)} &= \dot{P}(t)\chi(t) + P(t)\dot{\chi}(t) \\
&= \dot{P}(t)\chi(t) + P(t)A(t)\chi(t) = \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t)\right]\chi(t) \\
&= \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t)\right]\left[P^{-1}(t)P(t)\right]\chi(t) \\
&= \bar{A}(t)[\,\underbrace{P(t)\chi(t)}_{\bar{\chi}(t)}\,]
\end{aligned}
$$

Equações Equivalentes no caso Variante no Tempo

Teorema Seja A_0 uma matriz arbitrária constante. Então existe uma transformação de equivalência $P(t)$ que transforma o sistema original em um sistema equivalente com $\bar{A}(t) = A_0$

Demonstração Como $\bar{A}(t) = A_0$, $\bar{\chi}(t) = e^{A_0 t}$ é uma matriz fundamental de $\dot{\bar{x}} = \bar{A}(t)\bar{x}$, então $\dot{\bar{x}} = A_0\bar{x}$. Com $\bar{\chi}(t) = P(t)\chi(t)$, $P(t)$ pode ser obtida da forma

$$P(t) = \bar{\chi}(t)\chi^{-1}(t) = e^{A_0 t}\chi^{-1}(t)$$

Note que $\bar{A}(t)$ é obtida da transformação de equivalência:

$$\begin{aligned}
\bar{A}(t) &= \left[P(t)A(t) + \dot{P}(t)\right]P^{-1}(t) \\
&= \left[e^{A_0 t}\chi^{-1}(t)A(t) + A_0 e^{A_0 t}\chi^{-1}(t) + e^{A_0 t}\underbrace{\dot{\chi}^{-1}(t)}_{=-\chi^{-1}(t)A(t)}\right]\chi(t)e^{-A_0 t} \\
&= A_0 e^{A_0 t}\chi^{-1}(t)\chi(t)e^{-A_0 t} \\
&= A_0 \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Equações Equivalentes no caso Variante no Tempo

Para obter a descrição para $\dot{\chi}^{-1}(t)$ na demonstração anterior, usa-se o fato que $\chi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema original e que vale a relação:

$$\chi^{-1}(t)\chi(t) = \mathbf{I}$$

Derivando a igualdade acima, obtém-se:

$$\dot{\chi}^{-1}(t)\chi(t) + \chi^{-1}(t)\dot{\chi}(t) = \mathbf{0}$$

ou

$$\dot{\chi}^{-1}(t) = -\chi^{-1}(t)A(t)\chi(t)\chi^{-1}(t) = -\chi^{-1}(t)A(t)$$

Equações Equivalentes no caso Variante no Tempo

▷ Se $A_0 = \mathbf{0}$, então $P(t) = \chi^{-1}(t)$ e as matrizes do sistema equivalente são dadas por:

$$\bar{A}(t) = \mathbf{0} \;\; ; \;\; \bar{B}(t) = \chi^{-1}(t)B(t) \;\; ; \;\; \bar{C}(t) = C(t)\chi(t) \;\; ; \;\; \bar{D}(t) = D(t)$$

▷ Pode-se transformar qualquer sistema linear variante no tempo se se conhece a matriz fundamental

Matriz Resposta ao Impulso

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \\ &= C(t)\chi(t)\chi^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \end{aligned}$$

Para o sistema equivalente

$$\begin{aligned} \bar{G}(t,\tau) &= \bar{C}(t)\bar{\chi}(t)\bar{\chi}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau) + \bar{D}(t)\delta(t-\tau) \\ &= C(t)P^{-1}P(t)\chi(t)\chi^{-1}(\tau)P^{-1}(\tau)P(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \\ &= C(t)\chi(t)\chi^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \\ &= G(t,\tau) \end{aligned}$$

- A matriz resposta ao impulso se preserva na transformação de equivalência
- O mesmo não acontece com a matriz $A(t)$ (e.g., $\bar{A}(t) = \mathbf{0}$)
- No caso invariante no tempo, as transformações de equivalência preservam todas as propriedades da equação original

Equações Equivalentes no caso Variante no Tempo

Definição – Transformação de Lyapunov Uma matriz $P(t)$ é denominada transformação de Lyapunov se $P(t)$ é não singular, $P(t)$ e $\dot{P}(t)$ são contínuas e $P(t)$ e $P^{-1}(t)$ são limitadas para todo t (obtém-se com esta transformação um sistema Lyapunov equivalente)

- Caso particular de transformação de Lyapunov: $P(t) = P$ (sistemas invariantes no tempo é um caso particular de transformação de Lyapunov)

- Em geral, se $P(t)$ é um tranformação de Lyapunov, o teorema anterior (transformação de equivalência com $\bar{A}(t) = A_0$) pode não valer. Uma exceção ocorre quando $A(t)$ é periódica

Equações de Estado Periódicas

- $A(t)$ é periódica com período T se

$$A(t+T) = A(t), \quad \forall\, t, \quad T > 0 \ \text{ e constante}$$

Se $\chi(t)$ é uma matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$, ou seja, $\dot{\chi}(t) = A(t)\chi(t)$ com $\chi(0)$ não singular, então $\chi(t+T)$ satisfaz a equação homogênea e tem-se:

$$\dot{\chi}(t+T) = A(t+T)\chi(t+T) = A(t)\chi(t+T)$$

E, portanto, $\chi(t+T)$ também é uma matriz fundamental

▷ Note que $\chi(t+T)$ pode ser escrita da forma $\chi(t+T) = \chi(t)\chi^{-1}(0)\chi(T)$, pois

$$\begin{aligned}
\dot{\chi}(t+T) &= A(t)\chi(t+T) \\
\dot{\chi}(t)\chi^{-1}(0)\chi(T) &= A(t)\chi(t)\chi^{-1}(0)\chi(T) \\
\dot{\chi}(t) &= A(t)\chi(t)
\end{aligned}$$

Equações de Estado Periódicas

▷ Defina $Q \triangleq \chi^{-1}(0)\chi(T)$, uma matriz constante e não singular. Existe uma matriz constante $\bar{A}$ com $e^{\bar{A}T} = Q$ (Chen, Ex. 3.24, pg. 82), tal que $\chi(t+T) = \chi(t)e^{\bar{A}T}$

▷ Defina $P(t) \triangleq e^{\bar{A}t}\chi^{-1}(t)$. Note que $P(t)$ é periódica com período T, pois:

$$
\begin{aligned}
P(t+T) &= e^{\bar{A}(t+T)}\chi^{-1}(t+T) \\
&= e^{\bar{A}t}e^{\bar{A}T}\left[e^{-\bar{A}T}\chi^{-1}(t)\right] \\
&= e^{\bar{A}t}\chi^{-1}(t) \\
&= P(t)
\end{aligned}
$$

Teorema Seja $\chi(t)$ uma matriz fundamental do sistema periódico com período $T > 0$ dado por $\dot{x} = A(t)x$ e $\bar{A}$ uma matriz constante computada a partir de $e^{\bar{A}T} = \chi^{-1}(0)\chi(T)$. Com $P(t) = e^{\bar{A}t}\chi^{-1}(t)$, obtém-se o sistema Lyapunov equivalente:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + P(t)B(t)u(t) \\
y(t) &= C(t)P^{-1}(t)\bar{x}(t) + D(t)u(t)
\end{aligned}
$$

Realizações de Sistemas Variantes no Tempo

▷ Todo sistema LVT pode ser descrito da forma entrada/saída

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

▷ Equação de Estado (se os parâmetros são concentrados)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) & = & C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

Conhecendo-se $\{A(t), B(t), C(t), D(t)\}$, a matriz resposta ao impulso pode ser computada a partir de

$$G(t,\tau) = C(t)\chi(t)\chi^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

sendo $\chi(t)$ a matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$

Realizações de Sistemas Variantes no Tempo

▷ Uma matriz de resposta ao impulso $G(t,\tau)$ é realizável se existir $\{A(t), B(t), C(t), D(t)\}$ satisfazendo a expressão anterior

Teorema Uma matriz de resposta ao impulso é realizável por uma equação dinâmica linear de dimensão finita se, e somente se, $G(t,\tau)$ (de dimensão $q \times p$) puder ser decomposta em

$$G(t,\tau) = M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \quad , \quad \forall \;\; t \geq \tau$$

$M_{q\times n}$; $N_{n\times p}$ contínuas em t

Demonstração

($\longrightarrow$) (necessidade) Se $\{A, B, C, D\}$ é uma realização de $G(t,\tau)$

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \\ &= C(t)\chi(t)\chi^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \\ &= M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \end{aligned}$$

($\longleftarrow$) (suficiência) Se $G(t,\tau) = M(t)\mathsf{I} \times \mathsf{I}^{-1}N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$, então uma realização de $G(t,\tau)$ é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = N(t)u(t) \\ y(t) = M(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

Note que $\chi(t) = \mathsf{I}$ é uma matriz fundamental de $\dot{x}(t) = \mathbf{0}x(t)$

Realizações de Sistemas Variantes no Tempo

▷ Extensão para sistemas LIT?

Exemplo Considere $g(t) = te^{\lambda t}$, ou $g(t,\tau) = g(t-\tau) = (t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)}$, que pode ser reescrita da forma:

$$g(t-\tau) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \end{bmatrix}}_{M(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} -\tau e^{-\lambda \tau} \\ e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix}}_{N(\tau)} + 0$$

▶ Uma realização de $g(t) = te^{\lambda t}$ (variante no tempo, difícil de implementar...)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -te^{-\lambda t} \\ e^{-\lambda t} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t) \end{cases}$$

Realizações de Sistemas Variantes no Tempo

- Pode-se obter outra realização aplicando-se Laplace à resposta ao impulso:

$$\mathcal{L}[te^{\lambda t}] = \frac{1}{(s-\lambda)^2} = \frac{1}{s^2 - 2\lambda s + \lambda^2}$$

Usando a forma companheira obtém-se a representação invariante no tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \begin{bmatrix} 2\lambda & -\lambda^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Chen, Problema 4.17, pg. 120

Mostre que $\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t) = -\Phi(t_0,t)A(t)$? (Lembrete: $\Phi(t_0,t) = \chi(t_0)\chi^{-1}(t)$)

Note que pode-se escrever $\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t) = \chi(t_0)\dfrac{\partial}{\partial t}\chi^{-1}(t)$. Como obter $\frac{\partial}{\partial t}\chi^{-1}(t)$?

Veja que: $$\frac{d}{dt}\big[\underbrace{\chi(t)\chi^{-1}(t)}_{I}\big] = \dot{\chi}(t)\chi^{-1}(t) + \chi(t)\dot{\chi}^{-1}(t) = 0$$

ou $\dot{\chi}^{-1}(t) = -\chi^{-1}(t)\dot{\chi}(t)\chi^{-1}(t) = -\chi^{-1}(t)A(t)\chi(t)\chi^{-1}(t) = -\chi^{-1}(t)A(t)$

Então

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t) &= -\chi(t_0)\chi^{-1}(t)A(t)\\ &= -\Phi(t_0,t)A(t)\end{aligned}$$