

Controle Robusto \mathcal{H}_∞

1. O problema de controle \mathcal{H}_∞
2. Controle ótimo \mathcal{H}_∞ por LMIs
3. Patologia no controle \mathcal{H}_∞ : altos ganhos
3. Controle Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Controle \mathcal{H}_∞ e robustez

Afinal como é o problema de controle \mathcal{H}_∞ ? Neste tipo de estratégia, o ganho induzido \mathcal{L}_2 da entrada de distúrbios para a saída controlada é utilizado como a “medida” de desempenho e robustez do sistema em malha fechada. Como a norma \mathcal{H}_∞ , que é o ganho induzido \mathcal{L}_2 , é o valor de pico (**pior caso**) na resposta em frequência no diagrama de valores singulares, pode-se concluir que a sua minimização implica em atenuar a relação entrada-saída, ie o efeito da entrada de distúrbio na saída controlada

- O controle ótimo \mathcal{H}_∞ pode ser interpretado como sendo o controlador que “achata” a resposta em frequência em malha fechada, ie minimiza a relação de pior caso entrada-saída (distúrbio-saída controlada) ...

Controle \mathcal{H}_∞ e robustez

Controle $\mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_\infty$ O controlador \mathcal{H}_∞ pode ser **bem mais conveniente**, no sentido de tornar o sistema mais “robusto” frente a sinais exógenos de características tanto determinísticas como “desconhecidas” (energia limitada)

- Propriedades extras do controle \mathcal{H}_∞ : especificações no domínio da frequência como largura de banda passante e ganho em baixa frequência

Robustez? O termo robusto assume no controle \mathcal{H}_∞ duas interpretações

1. Incertezas no modelo (assim como no controle \mathcal{H}_2)
2. Incertezas associadas ao sinal de distúrbio

Controle ótimo \mathcal{H}_∞ por LMI: realimentação de estados

$$\begin{cases} \delta[x(t)] &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \\ y(t) &= I x(t), \quad u(t) = K y(t) \end{cases}$$

⇕ Malha fechada

$$\begin{cases} \delta[x(t)] &= \underbrace{(A + B_u K)}_{A_f} x(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= \underbrace{(C_z + D_{zu} K)}_{C_f} x(t) + D_{zw} w(t) \end{cases}$$

⇕

$$T_{zw}(\xi) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_w \\ \hline C_f & D_{zw} \end{array} \right], \quad \xi = s, z$$

Controle ótimo \mathcal{H}_∞ por LMIs

- De forma similar a metodologia utilizada no controle \mathcal{H}_2 , obtém-se o controlador a partir de um resultado de análise, no caso o **Bounded Real Lemma**:

BRL – tempo contínuo A_f é estável e $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$ sse $\exists P = P^T \succ 0$ satisfazendo

$$\begin{bmatrix} A_f^T P + P A_f & P B_w & C_f^T \\ B_w^T P & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_f & D_{zw} & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

Controle ótimo \mathcal{H}_∞ por LMIs

- Substituindo A_f e C_f , pré- e pós-multiplicando por $\text{diag}\{P^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$ e definindo-se $X \triangleq P^{-1}$ e $Z \triangleq KP^{-1}$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_w & XC_z^T + Z^T D_{zu}^T \\ B_w^T & -\gamma^2 \mathbf{I} & D_{zw}^T \\ C_z X + D_{zu} Z & D_{zw} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}$$

Controle ótimo \mathcal{H}_∞ por LMIs

Portanto o problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ pode ser colocado da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{X, \rho} \quad \rho \quad (\rho \triangleq \gamma^2) \\ \text{s.a} \quad X = X^T \succ 0 \\ \left[\begin{array}{ccc} AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_w & XC_z^T + Z^T D_{zu}^T \\ B_w^T & -\rho I & D_{zw}^T \\ C_z X + D_{zu} Z & D_{zw} & -I \end{array} \right] \prec 0 \end{array} \right.$$

onde $K = ZX^{-1}$ e $\|T_{zw}\|_\infty = \sqrt{\rho} = \gamma$

Controle ótimo \mathcal{H}_∞ por LMIs

- A versão discreta é obtida seguindo os mesmos passos e considerando o **Bounded Real Lemma** discreto. Portanto a solução ótima do problema de controle \mathcal{H}_∞ é da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{X, \rho} \quad \rho \quad (\rho \triangleq \gamma^2) \\ \text{s.a} \quad \left[\begin{array}{cccc} X & 0 & XA^T + Z^T B_u^T & XC_z^T + Z^T D_{zu}^T \\ 0 & I & B_w^T & D_{zw}^T \\ AX + B_u Z & B_w & X & 0 \\ C_z X + D_{zu} Z & D_{zw} & 0 & \rho I \end{array} \right] \preceq 0 \end{array} \right.$$

onde $K = ZX^{-1}$ e $\|T_{zw}\|_\infty = \sqrt{\rho} = \gamma$

Caso patológico no controle \mathcal{H}_∞ : altos ganhos

Patologias No controle \mathcal{H}_∞ , eventualmente pode-se obter como controlador ótimo em realimentação de estado um ganho da forma

$$\|K_i\| \longrightarrow K_{\text{ótimo}} \longrightarrow \infty, \quad \text{quando} \quad \gamma_i \longrightarrow \gamma_{\text{ótimo}}$$

ie, para atingir o valor ótimo de atenuação de distúrbios ótimo $\gamma_{\text{ótimo}}$, é necessário aproximá-lo por uma seqüência de altos ganhos, K_i

- Por que? A explicação para esta pergunta pode ser encontrada na referência abaixo:

Referência R. M. Palhares, S. L. C. Oliveira, and P. L. D. Peres. “Relating two different approaches of \mathcal{H}_∞ state feedback control”. *Revista Brasileira de Controle & Automação*. **9(2)**, pp. 77-84, 1998. URL: http://www.fee.unicamp.br/revista_sba/

Solução? Impor uma restrição de positividade na matriz que compõe o ganho K . Por exemplo, para $K = ZX^{-1}$, basta impor $X = X^T \succ \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$ (eg $\varepsilon = 10^{-4}$)

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

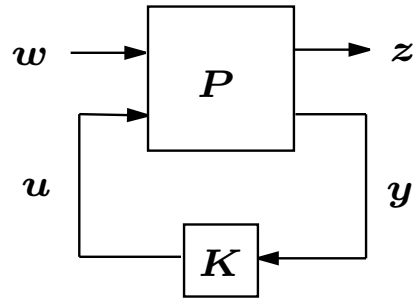
Principal vantagem do controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ levar em consideração as duas principais características de qualquer projeto de controle:

1. Otimizar o desempenho do sistema
2. Robustez

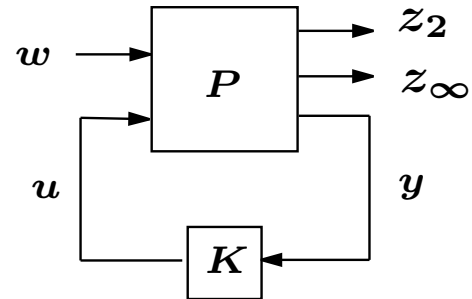
Como agir? acomodar no mesmo projeto estes dois aspectos através das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

↪ Por exemplo, minimizar a norma \mathcal{H}_2 garantindo um nível de atenuação de distúrbios \mathcal{H}_∞ dado por γ para a função de transferência de w para z , T_{zw}

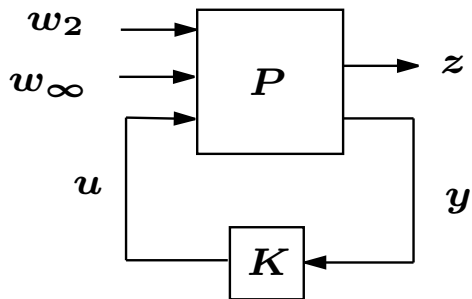
Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$



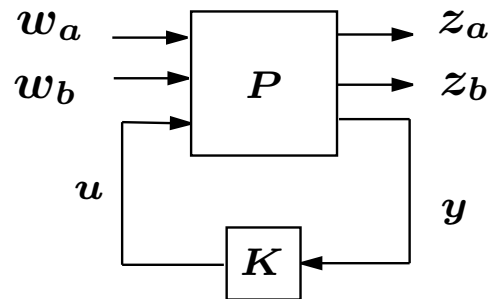
(a)



(b)



(c)



(d)

Planta generalizada com múltiplos canais

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Para a planta generalizada com múltiplos canais da figura anterior

- a. Considerar controle misto para a planta generalizada com um canal (ie uma entrada e uma saída), é conhecido como controle central $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, para o qual se minimiza a norma \mathcal{H}_2 de w para z , ao mesmo tempo garantido um nível de atenuação de distúrbios \mathcal{H}_∞ para o mesmo canal
- b. Controle misto biobjetivo $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, onde se minimiza a norma \mathcal{H}_2 do canal w para z_2 e garante-se um nível de atenuação de distúrbios \mathcal{H}_∞ do canal w para z_∞
- c. Este padrão é bastante definido para problemas de filtragem mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, onde o sinal de distúrbio representa um papel primordial
- d. Controle multiobjetivo para dois ou mais canais

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

↪ Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, minimizando a norma \mathcal{H}_2 do canal w_a para z_a e garante-se um nível de atenuação de distúrbios \mathcal{H}_∞ do canal w_b para z_b ? Veja

Referência E. N. Gonçalves, R. M. Palhares and R. H. C. Takahashi. “Improved optimisation approach to the robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem for linear systems”. *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*. **152 (2)**, pp. 171–176, 2005

Referência R. H. C. Takahashi, R. M. Palhares, D. A. Dutra and L. P. S. Gonçalves. “Estimation of Pareto sets in the mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem”. *International Journal of Systems Science*. **34 (1)**, pp. 55–67, 2004

Referência E. N. Gonçalves, R. M. Palhares and R. H. C. Takahashi. “Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ dynamic output feedback control synthesis for systems with polytopic uncertainty”. *16th IFAC World Congress*. Prague, 2005

Referência F. G. Guimarães, R. M. Palhares, F. Campelo and H. Igarashi. “Design of Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control Systems Using Algorithms Inspired by the Immune System”. *International Journal of Systems Science*. (Submitted), 2005

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

↪ Controle multiobjetivo \mathcal{H}_2 para j canais. Veja

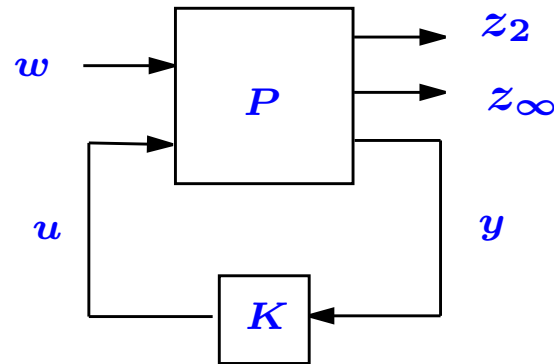
Referência: P. Apkarian, H. D. Tuan and J. Bernussou. “Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterization”. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **46(12)**, pp. 1941–1946, 2001

↪ Controle multiobjetivo \mathcal{H}_∞ para j canais. Veja

Referência: M. A. Rotea and R. K. Prasad. “An interpolation approach to multiobjective \mathcal{H}_∞ design”. *International Journal of Control*. **65 (4)**, pp. 699–720, 1996

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Como obter o controlador misto para a planta generalizada abaixo



sendo o modelo descrito por:

$$\begin{cases} \delta[x(t)] &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z_2(t) &= C_{z_2} x(t) + D_{z_u 2} u(t) \\ z_\infty(t) &= C_{z_\infty} x(t) + D_{z_u \infty} u(t) \\ y(t) &= I x(t), \quad u(t) = K y(t) \end{cases}$$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Formulação do problema Obter K para $\gamma > 0$ dado tal que:

$$\min_K \quad \|T_{z_2 w}\|_2^2$$

$$\text{s.a} \quad \|z_\infty\|_2 < \gamma \|w\|_2$$

Malha fechada $T_{z_2 w} \triangleq C_{f_2}(sI - A_f)^{-1}B_w$ e $T_{z_\infty w} \triangleq C_{f_\infty}(sI - A_f)^{-1}B_w$

sendo

$$A_f \triangleq A + B_u K$$

$$C_{f_2} \triangleq C_{z_2} + D_{z_u 2} K$$

$$C_{f_\infty} \triangleq C_{z_\infty} + D_{z_u \infty} K$$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Qual é a idéia? Garantir que a restrição $\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma$ é satisfeita para algum K estabilizante, é o mesmo que satisfazer o **BRL**, ie $\exists P = P^T \succ 0$ satisfazendo

$$\begin{bmatrix} A_f P + P A_f^T & B_w & P C_{f_\infty}^T \\ B_w^T & -I & 0 \\ C_{f_\infty} P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0$$

Por outro lado, para o **mesmo** ganho K estabilizante, $T_{z_2 w} \in \mathbb{R}\mathcal{H}_2$, e

$$\|T_{z_2 w}\|_2^2 = \text{Traço} \left\{ C_{f_2} L_c C_{f_2}^T \right\}$$

sendo que $L_c = L_c^T \succ 0$ satisfaz: $A_f L_c + L_c A_f^T + B_w^T B_w = 0$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Nota Veja que aplicando-se Schur no BRL obtém-se a Riccati

$$A_f P + P A_f^T + B_w^T B_w + \gamma^{-2} P C_{f_\infty}^T C_{f_\infty} P \prec 0$$

Comparando com a eq. do Grammiano $A_f L_c + L_c A_f^T + B_w^T B_w = 0$

$$\text{Conclui-se } A_f P + P A_f^T - (A_f L_c + L_c A_f^T) + \gamma^{-2} P C_{f_\infty}^T C_{f_\infty} P \prec 0$$

\Updownarrow

$$A_f (P - L_c) + (P - L_c) A_f^T \prec - \underbrace{\gamma^{-2} P C_{f_\infty}^T C_{f_\infty} P}_{\succ 0}$$

\Updownarrow

$$P - L_c \succ 0 \Leftrightarrow P \succ L_c$$

\therefore qualquer P factível para o BRL, fornece um limitante superior do Grammiano de Controlabilidade para a norma \mathcal{H}_2 de $T_{z_2 w}$, ie

$$\|T_{z_2 w}\|_2^2 < \text{Traço} \{C_{f_2} P C_{f_2}\}$$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Estratégia? Fixar $P = L_c \dots$ para satisfazer ambos os canais e suas respectivas normas. Porém introduze-se conservadorismo...

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ – contínuo

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{X, Z, J} \quad \text{Traço}\{J\} \\ \\ \text{s.a} \quad \begin{bmatrix} J & C_{z_2}P + D_{zu_2}Z \\ PC_{z_2}^T + Z^T D_{zu_2}^T & P \end{bmatrix} \succ 0 \\ \\ \begin{bmatrix} AP + PA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_w & PC_{z_\infty}^T + Z^T D_{zu_\infty}^T \\ B_w^T & -I & 0 \\ C_{z_\infty}P + D_{zu_\infty}Z & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0 \end{array} \right.$$

onde $K = ZP^{-1}$, $\|T_{z_2w}\|_2^2 < \text{Traço}\{J\}$ e $\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ – discreto

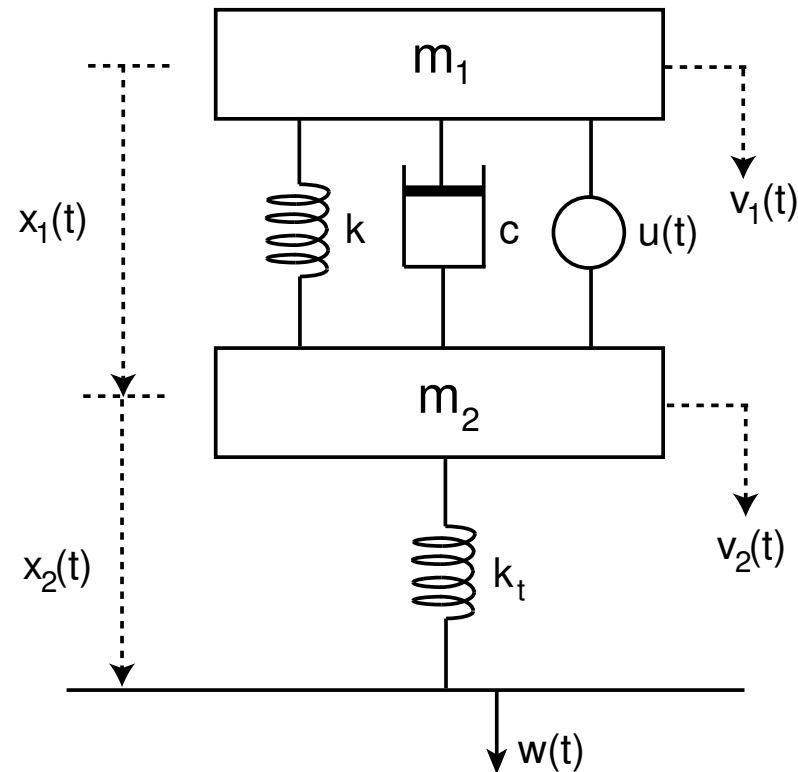
$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{X,Z,J} \quad \text{Traço}\{J\} \\ \text{s.a} \quad \left[\begin{array}{cc} J & C_{z_2}X + D_{zu_2}Z \\ XC_{z_2}^T + Z^T D_{zu_2}^T & X \end{array} \right] \succ 0 \\ \\ \left[\begin{array}{cccc} X & 0 & XA^T + Z^T B_u^T & XC_{z_\infty}^T + Z^T D_{zu_\infty}^T \\ 0 & I & B_w^T & 0 \\ AX + B_u Z & B_w & X & 0 \\ C_{z_\infty}X + D_{zu_\infty}Z & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{array} \right] \succ 0 \end{array} \right.$$

onde $K = ZP^{-1}$, $\|T_{z_2 w}\|_2^2 < \text{Traço}\{J\}$ e $\|T_{z_\infty w}\|_\infty < \gamma$

Incertezas? Imediato para incertezas politópicas

Exercício

Considere o modelo de suspensão ativa de um automóvel como ilustrado abaixo



Referência M. M. ElMadany and M. I. AL-Majed. “Quadratic synthesis of active controls for a quarter-car model”. *Journal of Vibration and Control*, **7**, pp. 1237–1252, 2001

Exercício

Sendo que m_1 corresponde a um 1/4 da massa do automóvel, m_2 é a massa da roda, k_t é a constante de elasticidade do pneu, c é o amortecimento da suspensão, k é constante de mola passiva da suspensão e $w(t)$ é uma perturbação de velocidade relacionada com a imperfeição da pista. As equações de movimento do sistema são

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = v_2(t) - v_1(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = w(t) - v_2(t) \\ m_1 \frac{dv_1(t)}{dt} = u(t) - kx_1(t) - c[v_1(t) - v_2(t)] \\ m_2 \frac{dv_2(t)}{dt} = -u(t) + kx_1(t) + k_t x_2(t) + c[v_1(t) - v_2(t)] \end{array} \right.$$

Variáveis de estado: deslocamento da suspensão, x_1 ; deslocamento da roda, x_2 ; velocidade da massa do carro, $x_3 = v_1$; velocidade da massa da roda, $x_4 = v_2$

Exercício

Modelo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{k}{m_1} & 0 & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{k_t}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix}; \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix}; \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_z = \begin{bmatrix} \frac{k}{m_1} & 0 & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

sendo $231.12\text{Kg} \leq m_1 \leq 346.68\text{Kg}$, $m_2 = 28.58\text{Kg}$, $k = 10000\text{N/m}$,
 $k_t = 155900\text{N/m}$, and $c = 850\text{Ns/m}$

Exercício

Objetivos específicos:

1. Obter um controlador \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado
2. Obter a resposta para cada variável de estado $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 5$ a uma perturbação modelada como

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1s \\ 0.6\text{sen}(8\pi t) + 0.75\text{sen}(12\pi t) + \\ 0.9\text{sen}(16\pi t) + 0.5\text{sen}(20\pi t) & \text{se } 1s \leq t \leq 5s \\ 0 & \text{se } t > 5s \end{cases}$$