Lugar das Raízes – LR

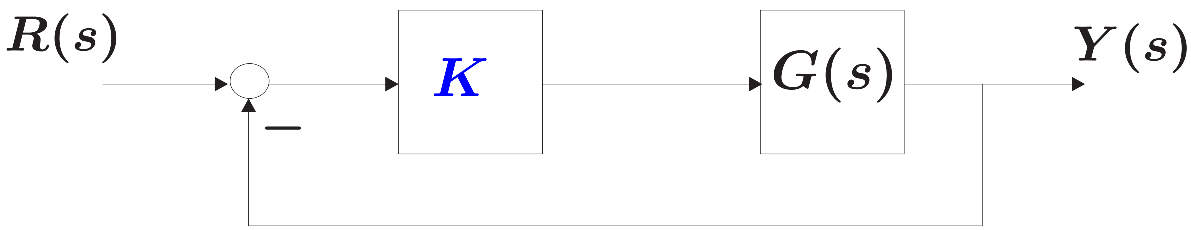
1. Lugar das raízes com ganho negativo (como proceder?)

2. Exemplos diversos

Lugar das Raízes com ganho negativo

▷ Note que a discussão que elaboramos a cerca do Lugar das Raízes diz respeito a forma de como se ilustra graficamente a variação das raízes da equação característica enquanto um parâmetro varia

▷ De fato, da configuração de realimentação unitária e negativa com K variando:



A equação característica é descrita por $1 + KG(s) = 0$ e as regras de esboço do LR que elaboramos são válidas para $0 \leq K < \infty$

▷ É razoável nos questionar o que aconteceria se $-\infty < K \leq 0$? E, claro, mantendo realimentação negativa...

Lugar das Raízes com ganho negativo

▷ Se o parâmetro a ser variado assume valores negativos, i.e., $-\infty < K \leq 0$, é preciso repensar o esboço do LR neste contexto de ganho negativo

▷ A estratégia é relativamente fácil ao usarmos os mesmos conceitos. De fato, da equação característica $1 + KG(s) = 0$ quando $-\infty < K \leq 0$ tem-se o rebatimento na fase ou, na forma polar: $|KG(s)| \angle KG(s) = 1 + j0$

▷ Portanto, para pertencer ao LR com ganho negativo tem-se:

$$\begin{cases} |KG(s)| = 1 \\ \underline{/KG(s)} = 0^0 \pm k360^0, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

▷ Isto é, o esboço do LR é rebatido em relação ao eixo imaginário quando comparado ao caso com ganho positivo!

Lugar das Raízes com ganho negativo

▷ Note que como a condição de módulo não se altera e a única diferença reside na condição de fase, esta nova condição de fase irá implicar em algumas modificações no esboço do LR onde se fazem necessárias

▷ Uma primeira implicação é em relação ao LR no eixo real. Neste caso a condição de ângulo a ser satisfeita é:

$$\underline{/KG(s)} = 0^0 \pm k360^0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Lugar das Raízes com ganho negativo

▷ Outra implicação diz respeito a localização das assíntotas (se houver). A centróide não se modifica, porém os ângulos das assíntotas que se aproximam dos zeros em infinito passam a ser

$$\phi_A = \frac{(q-1)}{n-M}\,360^0, \quad q = 1, 2, \ldots (n-M)$$

▷ Outra alteração se reflete na determinação dos ângulos de partida ou chegada para polos ou zeros complexos, i.e., para que um ponto pertença ao LR deve-se garantir que a soma de todos os ângulos dos polos e zeros respeite a condição

$$\sum_{i=1}^{M} \angle z_i - \sum_{j=1}^{n} \angle p_j = 0^0 \pm k360^0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Lugar das Raízes com ganho negativo

Nota Para quais sistemas **avaliar o LR com ganho negativo faz sentido**?

- Há vários sistemas físicos cujas funções de transferências têm ao menos um **zero no semi-plano direito no plano-s**. Este tipo de sistema é chamado de **sistema de fase não mínima** (iremos discutir este tipo de sistema detalhadamente na parte de análise no domínio da frequência)

- Suponha que um **sistema de fase não mínima** seja descrito da forma:

$$G(s) = \frac{z - s}{\prod(s + p_i)}$$

Fechando a malha com realimentação unitária a equação característica é dada por:

$$1 + \widetilde{K}\frac{z - s}{\prod(s + p_i)} = 1 + \left(-\widetilde{K}\right)\frac{s - z}{\prod(s + p_i)} = 1 + K\frac{s - z}{\prod(s + p_i)} = 0$$

e o parâmetro K $(= -\widetilde{K})$ deve ser negativo variando de: $-\infty < K \leq 0$

Lugar das Raízes com ganho negativo

Exemplo – Controle de altitude de um Boeing 747 – Para fazê-lo subir, os profundores são deflexionados para cima que, inicialmente, faz com que o avião desça antes de subir. Neste modo de operação o avião pode ser descrito pela FT escalonada e normalizada abaixo (que é de fase não mínima):

$$G(s) = \frac{6 - s}{s\left(s^2 + 4s + 13\right)}$$

ou, de forma equivalente:

$$G(s) = -\frac{s - 6}{s\left(s^2 + 4s + 13\right)}$$

Escrevendo no formato usual para esboçar o LR com ganho negativo tem-se:

$$1 + K\frac{s - 6}{s\left(s^2 + 4s + 13\right)} = 0$$

e é possível que o parâmetro K seja negativo variando entre $-\infty < K \leq 0$

Lugar das Raízes com ganho negativo

▷ Note a planta tem um zero finito em $\boldsymbol{z = 6}$ e dois zeros em infinito, além de 3 polos em $\boldsymbol{0; -2 + j3; -2 - j3}$. Neste caso o LR terá 3 ramos e duas assíntotas

▷ Como $\boldsymbol{-\infty < K \leq 0}$, os trechos que recaem sobre o eixo real devem satisfazer a condição de ângulo $\boldsymbol{\angle KG(s) = 0^0 \pm k360^0}$, $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \ldots}$ e estão à direita do zero em $\boldsymbol{6}$ rad/s e à esquerda do polo em $\boldsymbol{0}$ rad/s

▷ Os ângulos das assíntotas são calculados usando $\boldsymbol{\phi_A = \frac{(q-1)}{n-M} 360^0}$ (com $\boldsymbol{n - M = 3 - 1 = 2}$ e $\boldsymbol{q = 1{,}2}$). Neste caso tem-se os ângulos: $\boldsymbol{0^0}$ e $\boldsymbol{180^0}$

Lugar das Raízes com ganho negativo

Note que como a Equação Característica é:

$$s^3 + 4s^2 + (13 + K)s - 6K = 0$$

Então o arranjo de Routh é:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 13+K \\ s^2 & 4 & -6K \\ s^1 & \frac{52+10K}{4} & 0 \\ s^0 & -6K & 0 \end{array}$$

Para garantir estabilidade deve-se ter: $-5.2 < K < 0$. Particularmente para $K = -5.2$, o sistema será marginalmente estável e as raízes são: -4 e $\pm j2.7928$. Para $K < -5.2$ o sistema é instável

Lugar das Raízes com ganho negativo

Cálculo do ponto de chegada no eixo real. Faça $K = p(s)$ na equação característica $s^3 + 4s^2 + (13 + K)s - 6K = 0$ e derive em relação a "s". Portanto:

$$K = \frac{-s(s^2 + 4s + 13)}{(s - 6)}$$

$$\frac{\mathrm{d}p(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{-2s^3 + 14s^2 + 48s + 78}{(s - 6)^2} = 0$$

e obtém-se as raízes: 9.8414, e $-1.4207 \pm j1.3945$. Logo há um ponto de chegada no eixo real em 9.8414

Lugar das Raízes com ganho negativo

▷ Para o par de polos complexos conjugados, o ângulo do ramo que parte do polo em $p_2 = -2 + j3$ é:

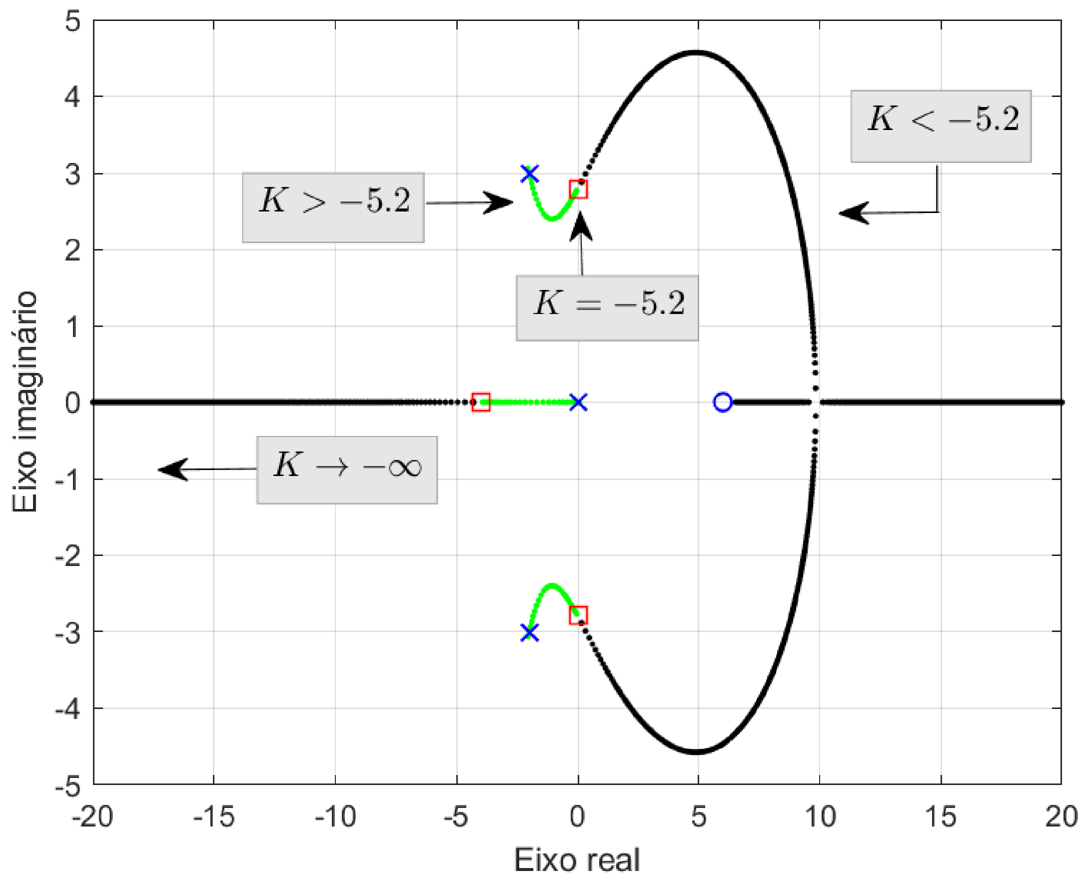
$$\theta_{z=6} - \theta_{p_1=0} - \theta_{p_2=-2+j3} - \theta_{p_3=-2-j3} = 360^0$$

em relação ao polo p_2, as contribuições de ângulos são:

$$\begin{aligned}
\theta_{p_2=-2+j3} &= \theta_{z=6} - \theta_{p_1=0} - \theta_{p_3=-2-j3} - 360^0 \\
\theta_{p_2=-2+j3} &= \tan^{-1}\left(\frac{3}{-8}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3}{-2}\right) - 90^0 - 360^0 \\
\theta_{p_2=-2+j3} &= -20.5^0 - (-56.3)^0 - 90^0 - 360^0 \\
\theta_{p_2=-2+j3} &= -414.2^0 \\
\theta_{p_2=-2+j3} &= -54.2^0
\end{aligned}$$

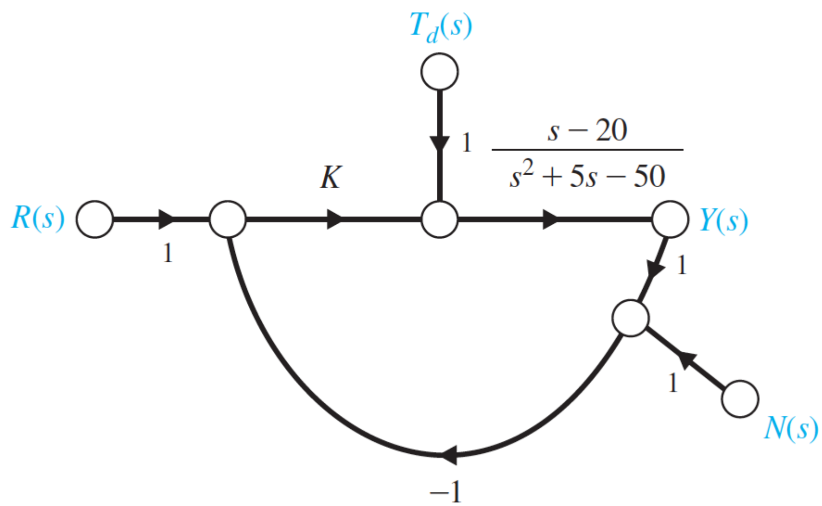
O traçado do LR é apresentado a seguir...

LR com ganho negativo & Matlab

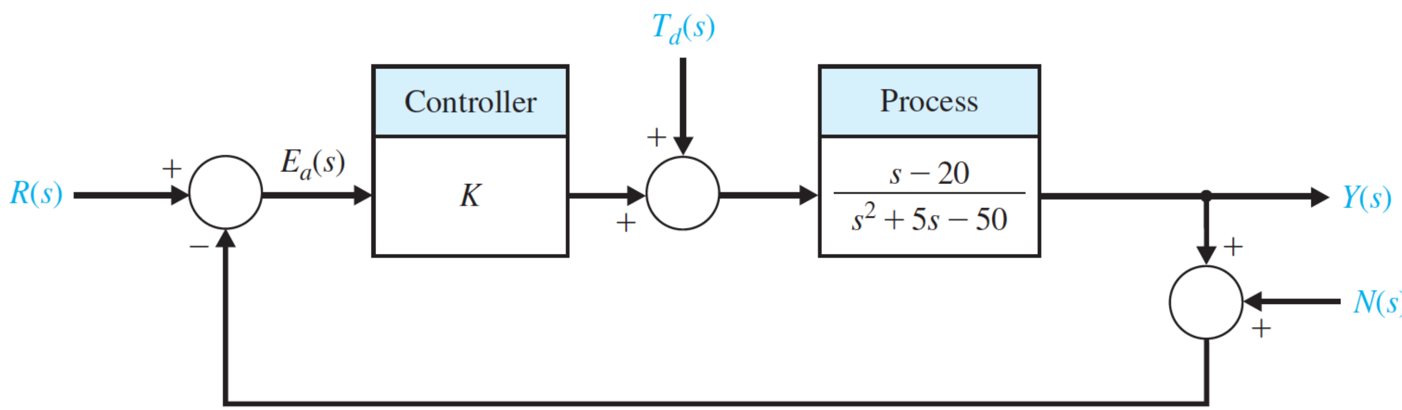



```
>> g=tf([-1 6],[1 4 13 0])  %para G(s) = (6 - s) / (s (s^2 + 4s + 13))
>> rlocus(g)
```

+ de LR com ganho negativo



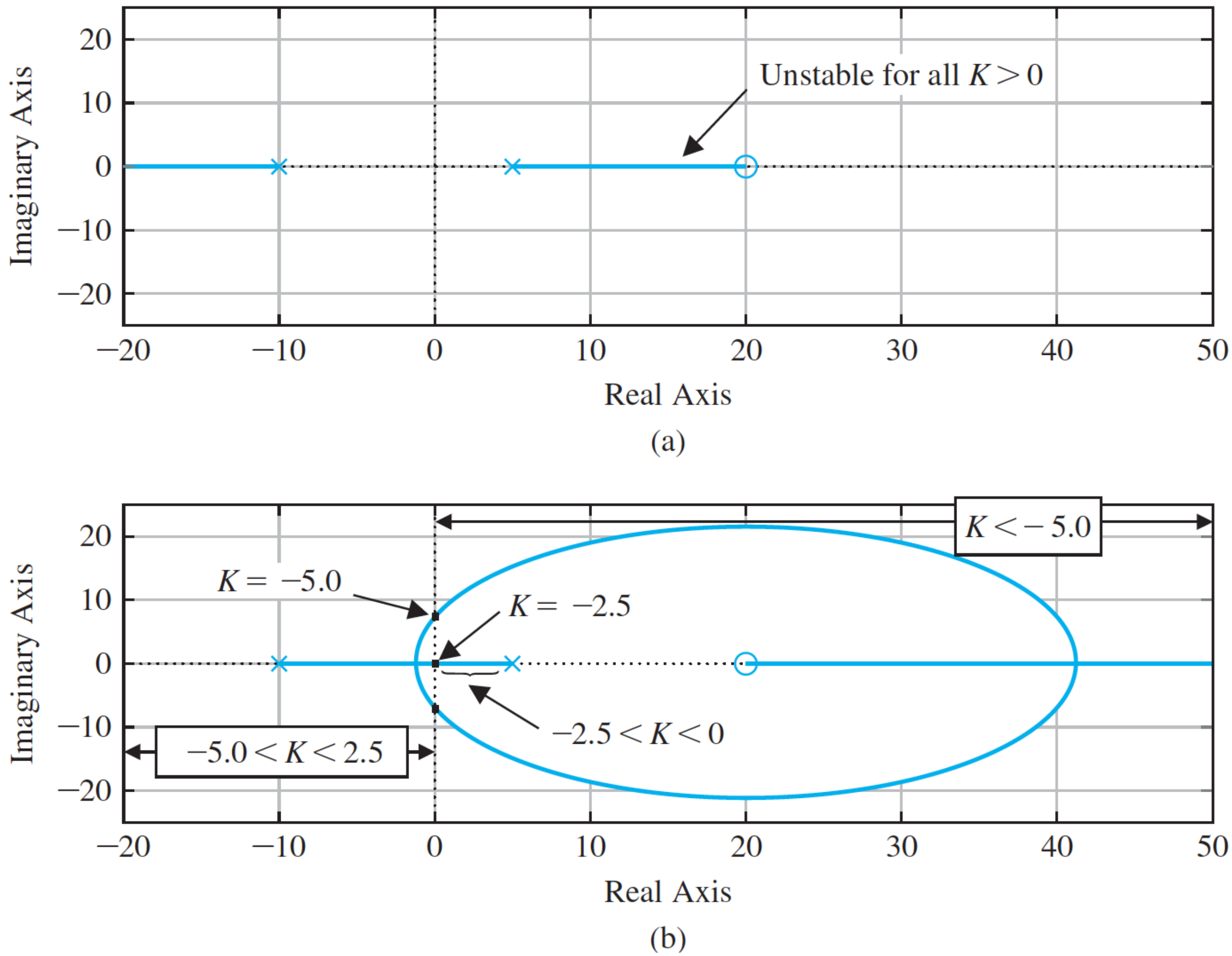
(a)



(b)

+ de LR com ganho negativo

$$1 + K \frac{s-20}{s^2+5s-50} = 0$$



+ Exemplos

Considerando realimentação unitária, esboce o Lugar das Raízes para o ganho em malha:

$$G_c(s)G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$$

E também obtenha:

1. o ganho K para que se tenha 3 polos reais e iguais
2. as raízes quando todas as raízes são iguais conforme o item 1

Equação característica: $1 + \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)} = s^3 + 9s^2 + Ks + K = 0$

LR para $G_c(s)G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$

Podemos responder aos itens 1 e 2 conjuntamente. Note que para se ter todos os polos reais e iguais, basta impor que a equação característica atenda:

$$(s+p)^3 = s^3 + 3ps^2 + 3p^2 s + p^3 = 0$$

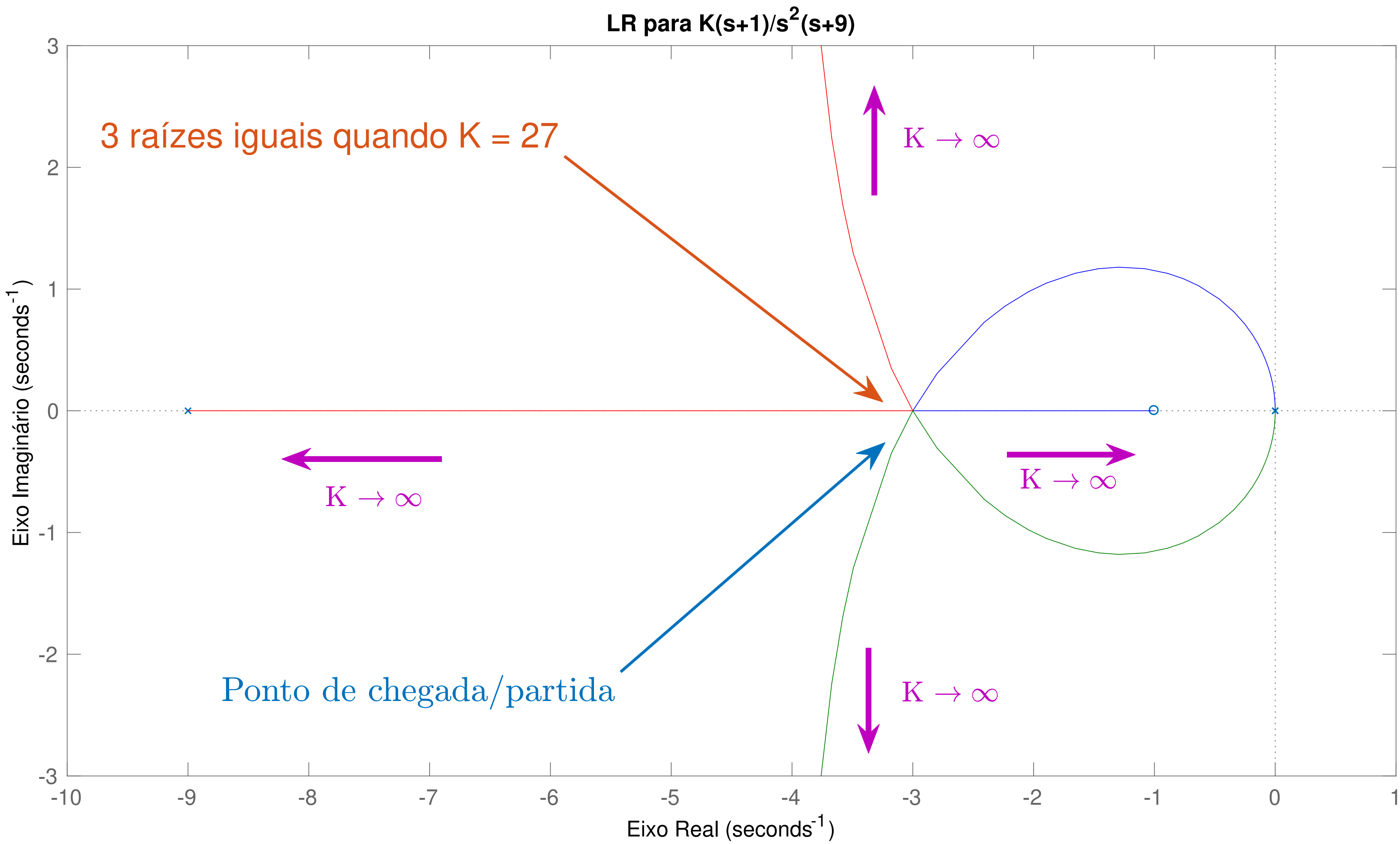
Em outras palavras, iguale as Equações Características tal que:

$$s^3 + 9s^2 + Ks + K = s^3 + 3ps^2 + 3p^2 s + p^3$$

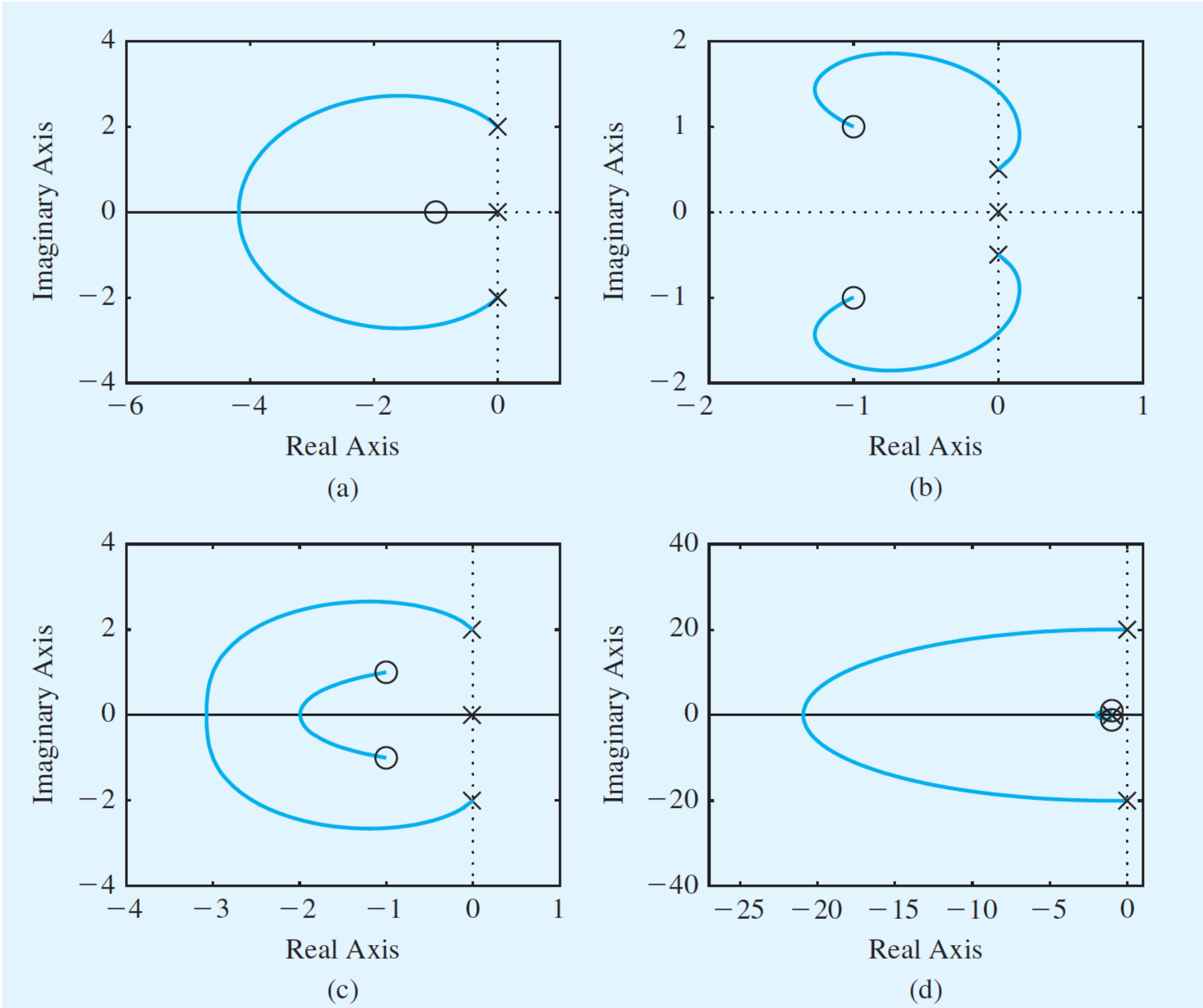
Equacionando, implica que: $3p = 9$, $K = 3p^2$ e $K = p^3$. Então, para que se tenha 3 raízes iguais e reais em $p = 3$ é preciso que o ganho seja $K = 27$

▷ Note ainda que o ponto de chegada/partida para este sistema coincide com o ponto -3

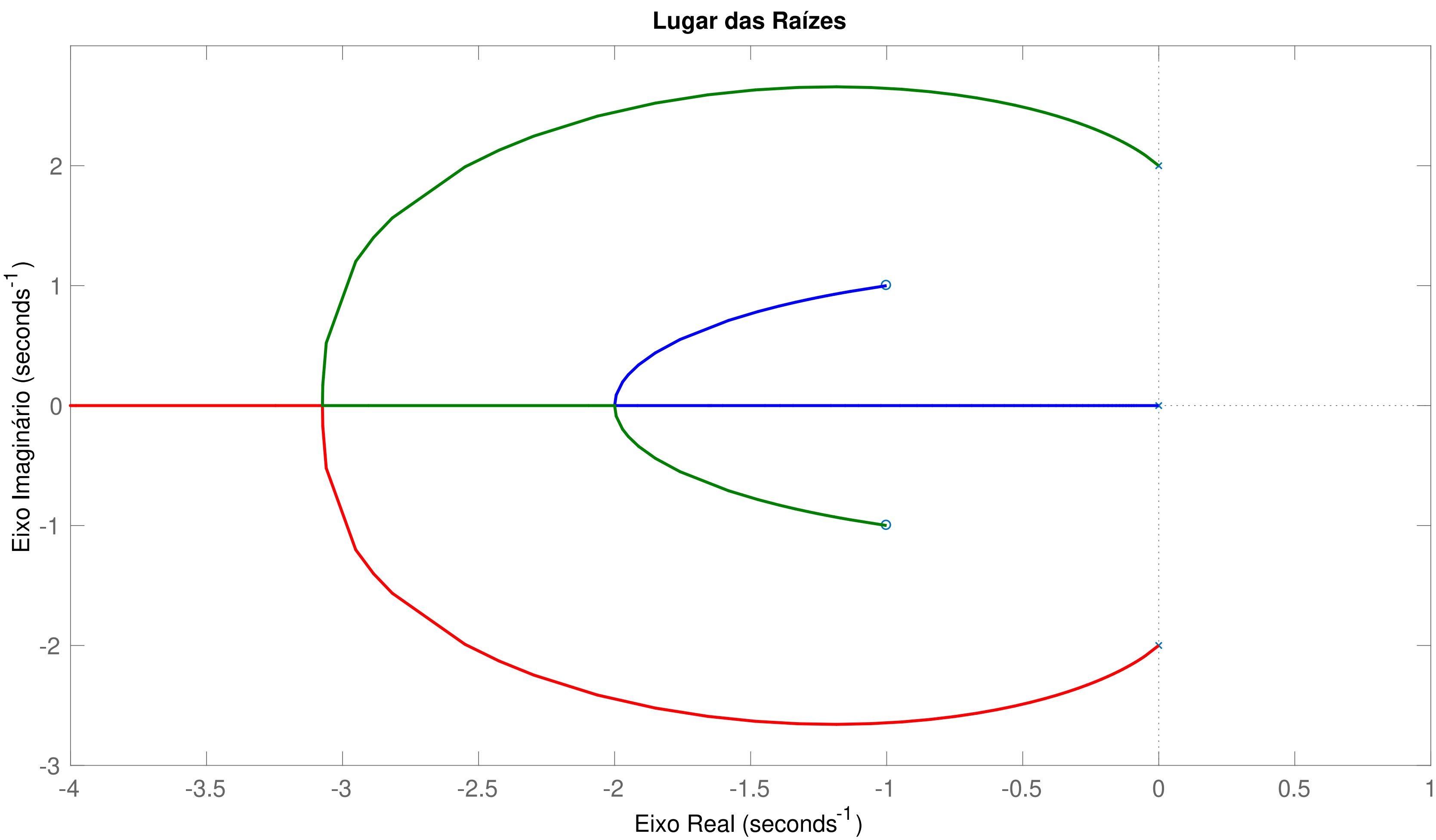
LR para $G_c(s)G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$



Para $G_c(s)G(s) = \frac{K(s+1+j)(s+1-j)}{s(s+2j)(s-2j)}$, qual traçado é parte do LR?



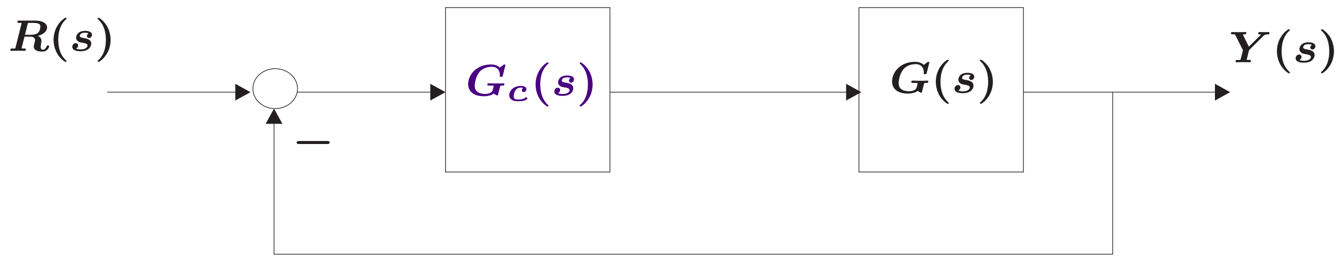
Traçado para $G_c(s)G(s) = \frac{K(s+1+j)(s+1-j)}{s(s+2j)(s-2j)}$



Pontos de chegada e partida: $\approx -\mathbf{3.07}$ e $-\mathbf{2}$, respectivamente

+ Exemplos – Determinando um Controlador específico?

Considere o sistema de controle ilustrado abaixo:



A função de transferência da planta é: $G(s) = \dfrac{s+6}{s^3 + 10s^2 + 31s + 30}$

Considere que controlador é um PI (Proporcional + Integral):

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

+ Exemplos – Determinando um Controlador específico?

Questão: Utilizando argumentos de Lugar das Raízes, obtenha os ganhos K_P e K_I do controlador PI, tal que o comportamento dominante do sistema em malha fechada apresente as especificações de desempenho abaixo como se fosse um sistema de $\mathbf{2^a}$ ordem:

- Máximo sobressinal (*overshoot*) percentual igual a 10% ($M_p = 10\%$)
- Tempo de acomodação igual a 5 segundos ($t_a = 5$s)
- Erro em regime permanente nulo para entrada degrau ✓

$\rightsquigarrow$ Em outras palavras, de fato o sistema em malha fechada se comportaria como se fosse um sistema de $\mathbf{2^a}$ ordem, com dois polos dominantes de forma que a resposta temporal atenderia o máximo possível: $M_p = 10\%$ e $t_a = 5$s

+ Exemplos – Determinando um Controlador específico?

Note que:

$$G(s) = \frac{s+6}{s^3 + 10s^2 + 31s + 30} = \frac{s+6}{(s+2)(s+3)(s+5)}$$

Além disso, a FT do controlador PI pode ser reescrita como

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P(s + \frac{K_I}{K_P})}{s} = \frac{K_P(s + z_c)}{s}$$

sendo que o zero do controlador PI é $z_c = \frac{K_I}{K_P}$ e K_P é o parâmetro variante

⇝ Polos a serem marcados no Lugar das Raízes: $\mathbf{0, -2, -3, -5}$. Além disso, há um zero em $\mathbf{-6}$ e o zero z_c do controlador PI **será considerado uma incógnita**

+ Exemplos – Determinando um Controlador específico?

Pelas especificações de desempenho fornecidas, tem-se que

$$M_p = 10\% \quad \Longrightarrow \quad \zeta = 0.5912 \approx 0.6$$

$$t_a = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 5\text{s} \quad \Longrightarrow \quad \zeta\omega_n = 0.8 \qquad (\text{e } \omega_n = 1.3533)$$

▷ Pelos valores de ζ e ω_n obtidos, **o par de polos dominantes** (sistema de 2^{a} ordem com $0 < \zeta < 1$) seria:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -0.8 \pm j1.0915$$

▷ **A ideia é fazer com que o Lugar das Raízes passe pelos pontos $s_{1,2}$**

Usando o conceito de ângulo no LR !

Use o conceito de ângulo, considerando que o par de polos dominantes devem pertencer ao LR, e obtenha a incógnita que é o zero do controlador. Desenhar no plano-s e marcar as coordenadas ajuda a "enxergar" o contexto... Particularmente para $s_1 = -0.8 + j1.0915$ (que deverá ser uma raiz dominante!) tem-se:

$$\theta_{p=-2} = \tan^{-1}\left(\frac{1.0915}{2-0.8}\right) = 42.2891^\circ,\ \theta_{p=-3} = \tan^{-1}\left(\frac{1.0915}{3-0.8}\right) = 26.3877^\circ$$

$$\theta_{p=-5} = \tan^{-1}\left(\frac{1.0915}{5-0.8}\right) = 14.5678^\circ,\ \theta_{z=-6} = \tan^{-1}\left(\frac{1.0915}{6-0.8}\right) = 11.8545^\circ$$

$$\theta_{p=0} = \tan^{-1}\left(\frac{1.0915}{0-0.8}\right) = 126.2390^\circ \quad \text{e} \quad \theta_{z_c} = \tan^{-1}\left(\frac{1.0915}{z_c-0.8}\right)$$

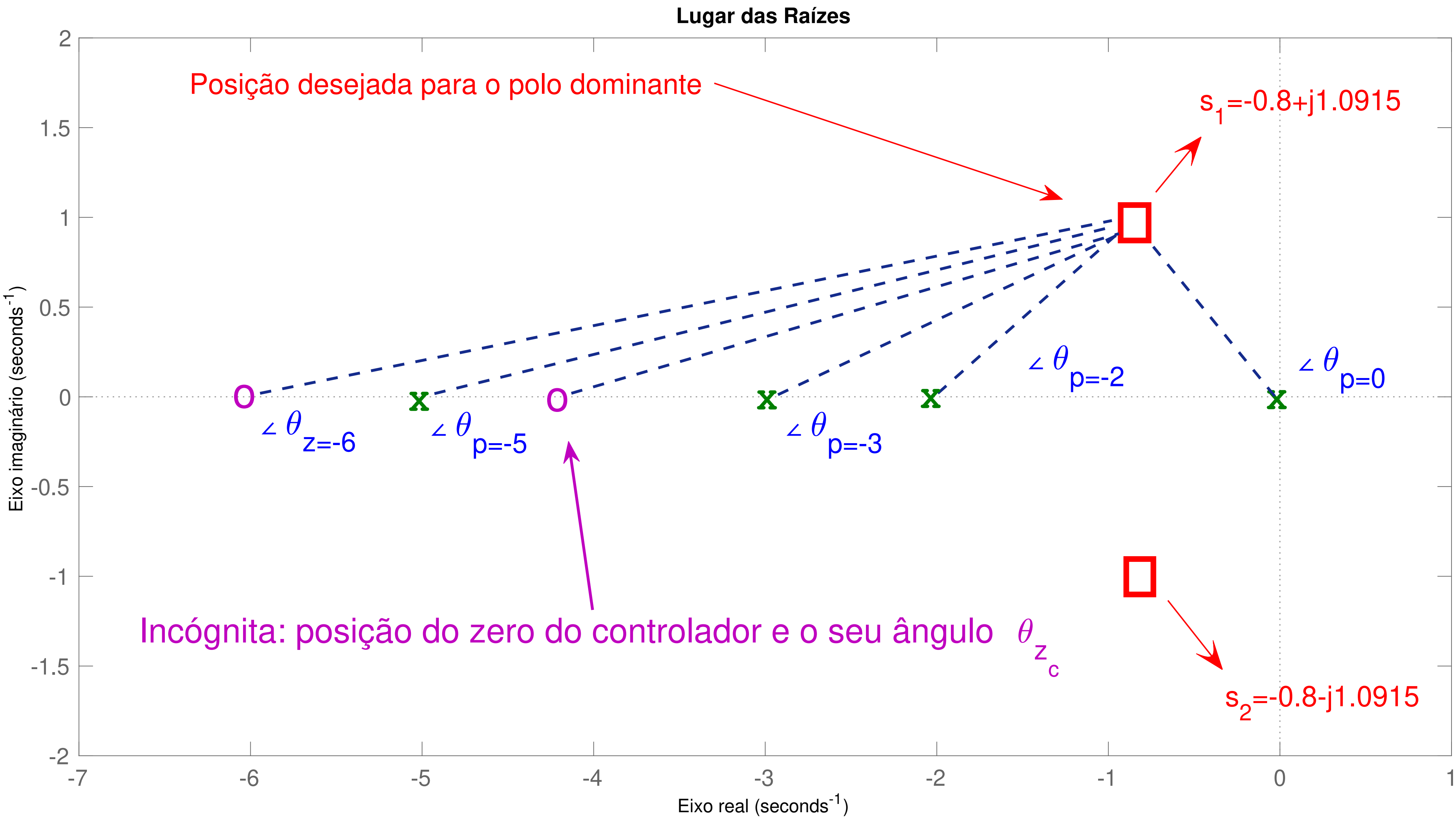
Para verificar a condição de ângulo, é necessário que

$$\theta_{z=-6} + \theta_{z_c} - (\theta_{p=0} + \theta_{p=-2} + \theta_{p=-3} + \theta_{p=-5}) = -180^\circ$$

$$\theta_{z_c} = -180^\circ + 197.6292^\circ = 17.6292^\circ$$

Logo: $\tan(17.6292^\circ) = \dfrac{1.0915}{z_c - 0.8} \quad \Longrightarrow \quad z_c = \dfrac{K_I}{K_P} = 4.2348$

Usando o conceito de ângulo no LR !



+ Exemplos – Determinando um Controlador específico?

▷ O ganho K_P é computado da condição de módulo $|G_c(s)G(s)|$ considerando o polo dominante em malha fechada em $s_1 = -0.8 + j1.0915$:

$$\left| \frac{K_P(s + 4.2384)}{s} \, \frac{s+6}{(s+2)(s+3)(s+5)} \right|_{s=-0.8+j1.0915} = 1$$

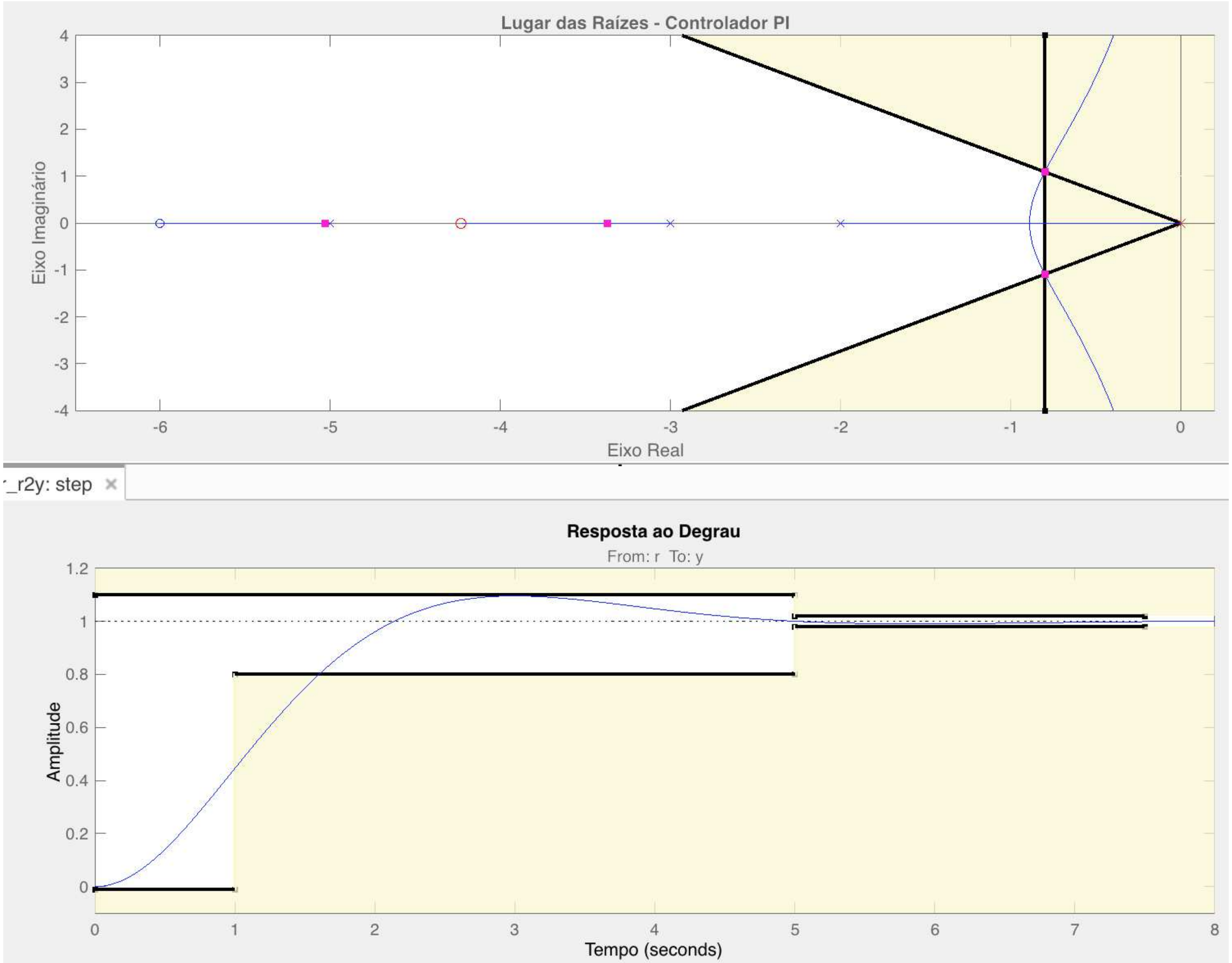
Portanto, tem-se: $K_P = 1.2217$

Finalmente, a partir de z_c e K_P, é possível obter o ganho integrativo do PI, que é dado por

$$K_I = z_c K_P = 4.2348 \times 1.2217 = 5.1737$$

▷ Note que como tem-se um controlador PI, a condição de erro em estado estacionário nula será atendida de antemão

Lugar das Raízes e resposta temporal usando Sisotool



+ Exemplos – Determinando um ganho K específico?

Para o ganho em malha aberta:

$$L(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K(s+8)}{s(s+4)(s+6)(s+9)}$$

Problema a ser resolvido: Determinar K tal que um par de raízes complexas tenha amortecimento $\zeta = 0.8$

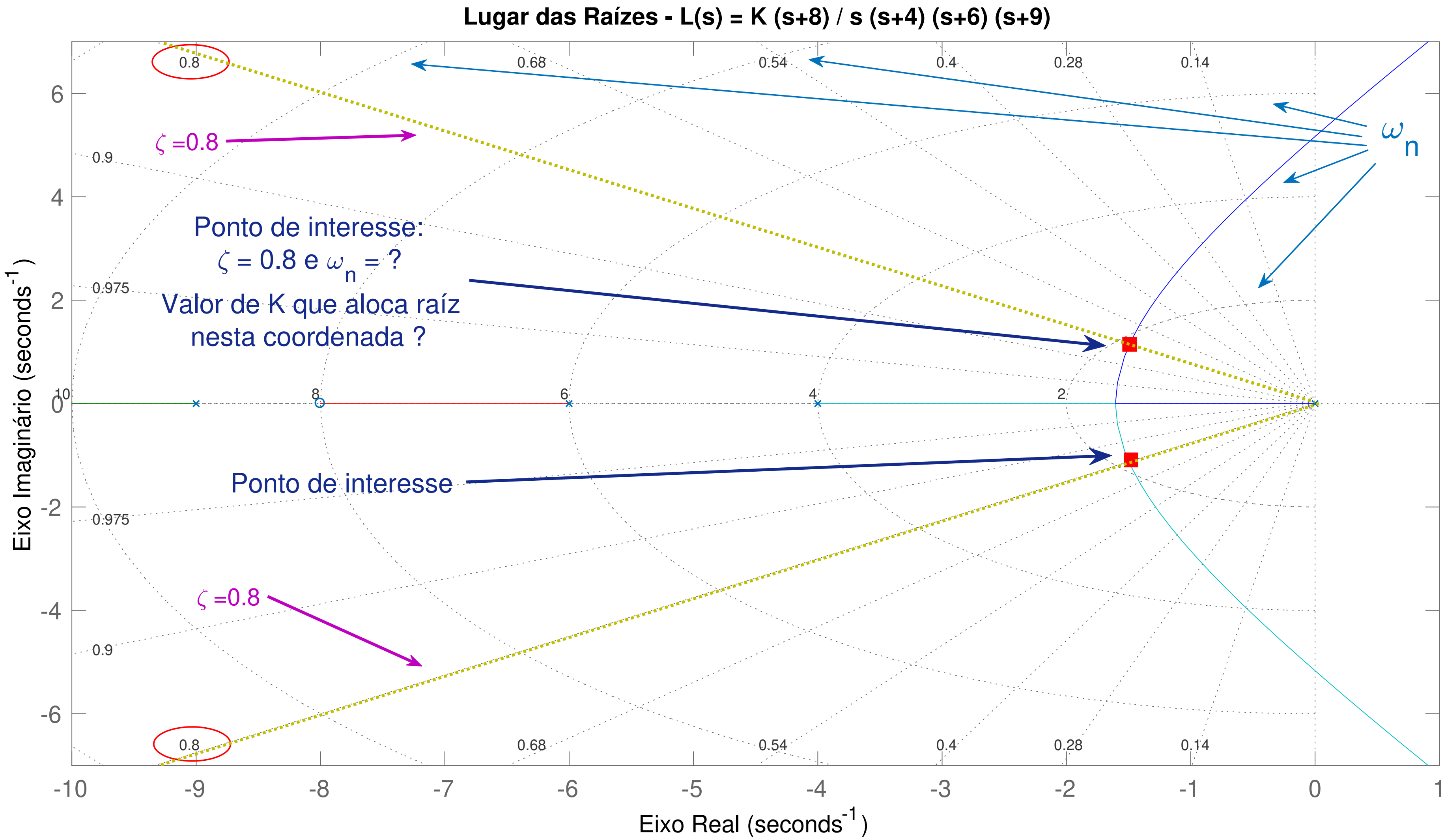
Note que para $\zeta = 0.8$, o par de polos complexos é:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -0.8\omega_n \pm j0.6\omega_n$$

e a incógnita é ω_n...

Visualmente qual é o problema? Vide a próxima figura

Visualmente qual é o problema?



$$K \text{ para } \zeta = 0.8? \text{ Com } L(s) = \frac{K(s+8)}{s(s+4)(s+6)(s+9)}$$

Portanto, avaliando o ganho em malha aberta especificamente para $s_1 = -0.8\omega_n + j0.6\omega_n$, tem-se:

$$L(s_1) = \frac{K(s_1+8)}{s_1(s_1+4)(s_1+6)(s_1+9)} = \frac{K(a_1+jb_1)}{a_2+jb_2}$$

sendo que

$$a_1 = 8 - 0.8\omega_n$$

$$b_1 = 0.6\omega_n$$

$$a_2 = -0.8432\omega_n^4 + 6.688\omega_n^3 + 31.92\omega_n^2 - 172.8\omega_n$$

$$b_2 = -0.5376\omega_n^4 + 17.78\omega_n^3 - 109.4\omega_n^2 + 129.6\omega_n$$

Assim, para que a condição de ângulo seja satisfeita, é necessário que

$$\angle L(s_1) = \pi \quad (= 180^0)$$

K para $\zeta = 0.8$?

O que implica que de $L(s_1) = \dfrac{K(a_1 + jb_1)}{a_2 + jb_2}$, a condição $\angle L(s_1) = \pi$ é:

$$\tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) = \pi, \quad \textbf{ou:} \quad \frac{b_1}{a_1} = \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) + \pi\right)$$

Note que: $\tan(A+B) = \frac{\tan(A)+\tan(B)}{1-\tan(A)\tan(B)}$ e $\tan(\pi) = 0$, portanto,

$$\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) + \pi\right) = \frac{\frac{b_2}{a_2} + \tan(\pi)}{1 - \frac{b_2}{a_2}\tan(\pi)} = \frac{b_2}{a_2}$$

Logo, tem-se que

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \quad \Rightarrow \quad b_1 a_2 = b_2 a_1$$

K para $\zeta = 0.8$? Com $L(s) = \dfrac{K(s+8)}{s(s+4)(s+6)(s+9)}$

Ao substituir os respectivos valores de a_1, b_1, a_2, b_2 em $b_1 a_2 = b_2 a_1$, tem-se:

$$0.936\omega_n^4 - 22.54\omega_n^3 + 210.6\omega_n^2 - 875.2\omega_n + 1037.0 = 0$$

que admite como solução:

$$\begin{aligned}
\omega_{n,1} &= 9.3761 \\
\omega_{n,2} &= 6.4161 + j4.6823 \\
\omega_{n,3} &= 6.4161 - j4.6823 \\
\omega_{n,4} &= 1.8729
\end{aligned}$$

Qual ω_n escolher?

K para $\zeta = 0.8$? Com $L(s) = \dfrac{K(s+8)}{s(s+4)(s+6)(s+9)}$

Para decidir qual ω_n considerar, note primeiramente que ω_n deve ser um valor real. Note também que o valor de ω_n adequado deve gerar a raiz "s" que satisfaz o critério de ângulo, isto é, a raiz deve pertencer ao LR. A condição de ângulo é satisfeita somente para $\omega_{n,4} = 1.8729$ (mãos à obra...), e a raiz é dada por:

$$s_1 = -0.8\omega_{n,4} + j0.6\omega_{n,4} = -1.4983 + j1.1237$$

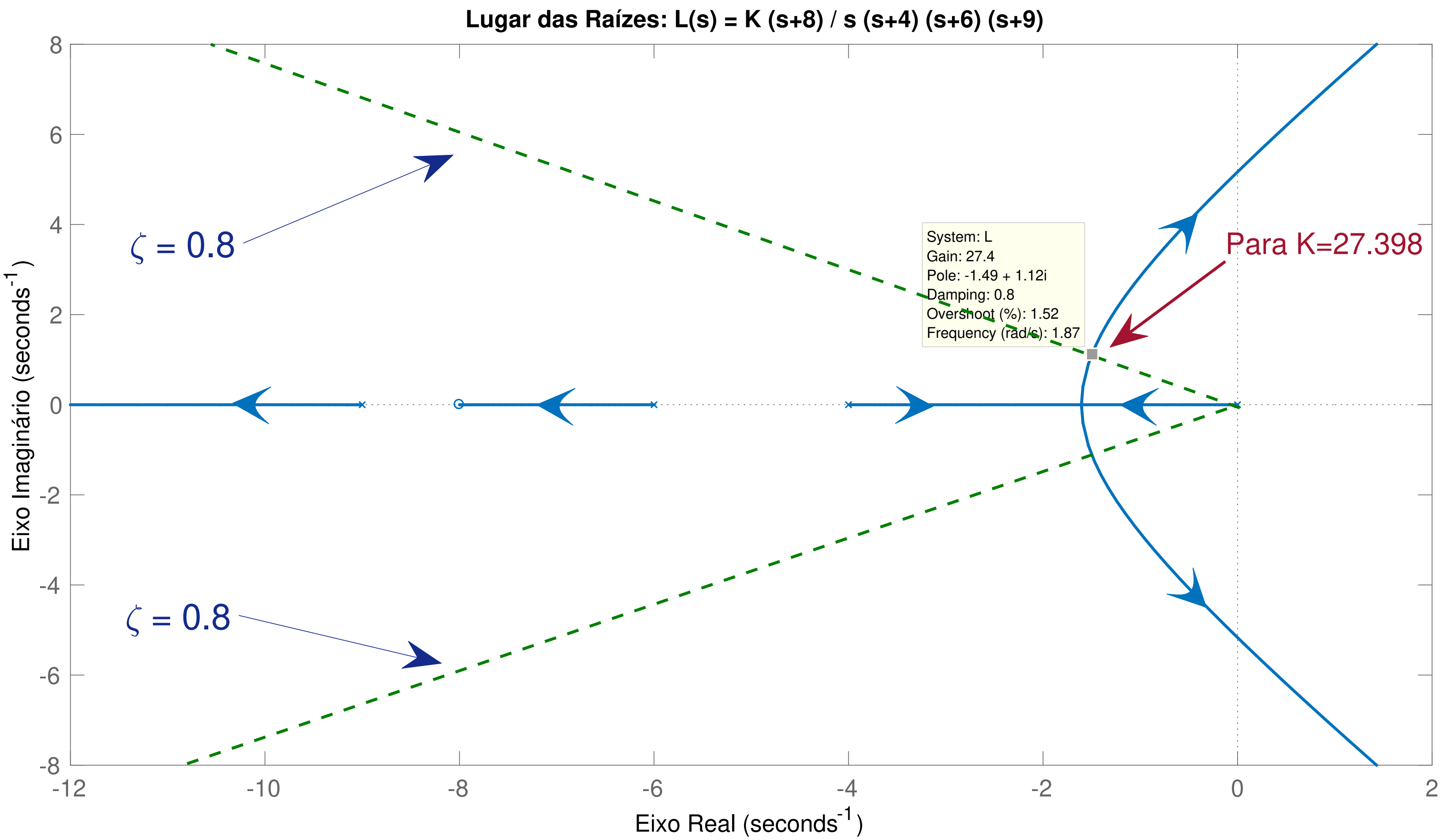
Finalmente, para se obter o valor de K, considera-se o critério de módulo (i.e., $|L(s)| = 1$) para $s_1 = -1.4983 + j1.1237$. Em outras palavras:

$$\left| \frac{K(s+8)}{s(s+4)(s+6)(s+9)} \right|_{s=s_1} = 1$$

ou

$$0.0365 \times K = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 27.398$$

Usando Matlab para obter K quando $\zeta = 0.8$?




```
>> L=tf([1 8],conv(conv([1 0],[1 4]),conv([1 6],[1 9])))
>> rlocus(L)
```