Solução em Espaço de Estado

1. Solução para Sistemas Lineares Invariantes Contínuos no Tempo
2. Discretização
3. Solução para Sistemas Lineares Invariantes Discretos no Tempo
4. Sistemas Equivalentes e Formas Canônicas
5. Realizações

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

Para o sistema contínuo no tempo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$

Problema – Encontrar a solução $x(t)$ gerada por uma condição inicial $x(0)$ e uma entrada $u(t)$?

Solução – Pode ser obtida da função exponecial de A

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

- A ideia é "construir" uma proposta de solução $x(t)$ e depois checar se esta solução satisfaz, simultaneamente, a condição inicial e a equação diferencial (que é uma estratégia típica em EDO)

- Note que já foi demonstrado que:

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

Pré-multiplicando a equação diferencial em $\dot{x}(t)$ por e^{-At} obtém-se:

$$\begin{aligned}
e^{-At}\dot{x}(t) &= e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t) \\
e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) &= e^{-At}Bu(t) \\
\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] &= e^{-At}Bu(t)
\end{aligned}$$

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

Integrando de $\mathbf{0}$ a t obtém-se

$$e^{-A\tau}x(\tau)\Big|_{\tau=0}^{t} = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-At}x(t) - e^{\mathbf{0}}x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

como $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$ e $\left(e^{-At}\right)^{-1} = e^{At}$, então

$$\boxed{\Rightarrow \quad x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

$\rightsquigarrow$ Devemos verificar se a proposta de solução $x(t)$ satisfaz, simultaneamente, a equação diferencial e a condição inicial $x(t) = x(0)$ em $t = 0$

- Note que em $t = 0$, $x(0) = e^{A\,0}x(0) = \mathbf{I}x(0) = x(0)$ $\checkmark$

- E $x(t)$ satisfaz a equação $\dot{x}(t)$? Compute $\dot{x}(t)$, i.e.:

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right]$$

Usando o fato que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t} f(t,\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial}{\partial t}f(t,\tau)\right)d\tau + f(t,\tau)\Big|_{\tau=t}$$

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ae^{At}x(0) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\Big|_{\tau=t} \\ &= A\left(e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) + e^{A0}Bu(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) \qquad \checkmark\end{aligned}$$

Ainda, substituindo $x(t)$ na equação de saída obtém-se:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

Para o cálculo de e^{At} pode-se usar diferentes estratégias como, e.g.:

Método 1 – Encontre os autovalores de A. Obtenha o polinômio $h(\lambda)$ de grau $n-1$ igual a $e^{\lambda t}$ no espectro de A. Faça $e^{At} = h(A)$

Método 2 – Encontre a Forma Canônica de Jordan de A dada por $\hat{A}$. Então $A = Q\hat{A}Q^{-1}$, e, claro: $e^{At} = Qe^{\hat{A}t}Q^{-1}$

Método 3:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!} \quad \rightarrow \quad (\text{Matlab, } \texttt{expm}\ldots)$$

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

Note ainda que aplicando a transformada de Laplace ao sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

obtém-se:

$$X(s) = (s\mathbf{I} - A)^{-1} BU(s)$$
$$Y(s) = \Big[C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D\Big]U(s)$$

Método 4 – Então outra forma é calcular:

$$\mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (s\mathbf{I} - A)^{-1} \;\; ; \;\; e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I} - A)^{-1}\right]$$

- Note também que $(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$ é uma função de $\boldsymbol{A}$ que pode ser computada de várias formas: diretamente pela inversa de $(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})$; via método 1; via método 2 ou a forma em série de potência discutida na seção de Álgebra

Exemplo – considere $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Obtenha $(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$

Cômputo direto:

$$(s\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

Método 1 Os autovalores de A são -1 e -1. Faça $h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda$. Se $f(\lambda) = (s-\lambda)^{-1}$ iguala os valores de $h(\lambda)$ no espectro de A, então

$$
\begin{aligned}
f(-1) = h(-1) \quad &\Rightarrow \quad (s+1)^{-1} = \beta_0 - \beta_1 \\
f'(-1) = h'(-1) \quad &\Rightarrow \quad (s+1)^{-2} = \beta_1
\end{aligned}
$$

Portanto obtendo β_0 e β_1 e substituindo em $h(\lambda)$:

$$h(\lambda) = \left[(s+1)^{-1} + (s+1)^{-2}\right] + (s+1)^{-2}\lambda$$

e

$$
\begin{aligned}
(s\mathbf{I} - A)^{-1} = h(A) \quad &= \quad \left[(s+1)^{-1} + (s+1)^{-2}\right]\mathbf{I} + (s+1)^{-2}A \\
&= \quad \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

Veja se considerarmos a equação:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

a solução é dada por

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- e^{At}?

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}\right\} \\
&= \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

e com $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}'$:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} x(0) \\
&+ \begin{bmatrix} -\int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \\ \int_0^t [1-(t-\tau)]e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

Propriedades Para a resposta à entrada nula ($u(t) \equiv 0$), tem-se que $x(t) = e^{At}x(0)$ que, por exemplo, considerando a forma de Jordan:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ gera (Chen, pg. 66 – (3.48))

$$e^{At} = Qe^{\hat{A}t}Q^{-1} = Q \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} Q^{-1}$$

Solução em Espaço de Estado – Tempo Contínuo

▷ É combinação linear de termos do tipo $t^k e^{\lambda t}$, determinados pelos autovalores e seus índices $\bar{n}_i$ (maior ordem dos blocos de Jordan associados a λ_i). São analíticos, i.e., diferenciáveis para todo t

▷ Se todo autovalor tem parte real negativa, a resposta à entrada nula tende para zero quando $t \to \infty$ (segue direto de $e^{\lambda t}$); se A possui algum autovalor com parte real positiva, a resposta à entrada nula cresce indefinidamente (diverge)

▷ Um autovalor com parte real nula mas com índice $\bar{n}_i = 1$ não causa o crescimento ilimitado; se o índice for 2 ou superior, o crescimento ilimitado pode ocorrer. Por exemplo, um autovalor igual a 0 com índice $\bar{n}_i = 2$ faz com que e^{At} contenha os termos $\{1, t\}$. O termo te^{0t}, para $t \to \infty$, implicará em crescimento ilimitado para a trajetória $x(t)$

Discretização

Considere o sistema a tempo contínuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

- Uma primeira ideia de aproximação discreta é usar Euler:

$$\dot{x}(t) = \lim_{T \to 0} \frac{x(t+T) - x(t)}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t+T) = \underbrace{x(t) + Ax(t)T}_{(\mathbf{I}+TA)x(t)} + Bu(t)T$$

Discretização

- Se os sinais contínuos são computados em instantes discretos $t = kT$, $k = 0,1,2,\ldots$ então:

$$\begin{cases} x((k+1)T) &= (\mathsf{I} + TA)x(kT) + TBu(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT) \end{cases}$$

- é uma forma simples, porém a representação pode ser imprecisa

Discretização Alternativa – Considerando que o sinal $u(t)$ é gerado em um computador digital e, que em seguida, o sinal passa por um conversor digital/analógico (DA), tem-se um sinal linear por partes. Usaremos esta ideia

Discretização

- Define-se o sinal linear por partes, mudando a cada instante k:

$$u(t) = u(kT) \triangleq u(k) \ \text{ para } \ kT \leq t < (k+1)T, \ \ k = 0,1,2,\ldots$$

Para esta entrada $u(t)$, a solução da equação diferencial dada por $x(t)$ é computada nos instantes $t = kT$ e $t = (k+1)T$, isto é:

$$x(k) \triangleq x(kT) = e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

e

$$x(k+1) \triangleq x[(k+1)T] = e^{A(k+1)T}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Discretização

Note que da equação anterior em $x(k+1)$ obtém-se

$$x(k+1) = e^{AT}\left[e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

usando o fato que $u(t) = u(k)$ e definindo-se a mudança de variável dada por $\alpha = kT + T - \tau$ obtém-se:

$$x(k+1) = e^{AT}x(k) + \left[\int_0^{T} e^{A\alpha}d\alpha\right]Bu(k)$$

Discretização

Portanto o sistema descrito a equações à diferença (equação de estado discreta no tempo) é dado por:

$$\begin{cases} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k) &= C_d x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

sendo

$$A_d = e^{AT}; \quad B_d = \left[\int_0^T e^{A\tau} d\tau\right] B; \quad C_d = C; \quad D_d = D$$

Nota – Não há aproximação envolvida! A solução em $t = kT$ é exata se a entrada for mantida constante no intervalo

- Cômputo de B_d ?

Discretização

Cômputo de B_d – Usando a descrição em série de potência

$$\int_0^T \left(\mathsf{I} + A\tau + A^2\frac{\tau^2}{2!} + \cdots \right) d\tau = T\mathsf{I} + \frac{T^2}{2!}A + \frac{T^3}{3!}A^2 + \frac{T^4}{4!}A^3 + \cdots$$

Se A é não singular, a série pode ser reescrita da forma (somando $\mathsf{I} - \mathsf{I}$) :

$$A^{-1}\left(TA + \frac{T^2}{2!}A^2 + \frac{T^3}{3!}A^3 + \cdots + \mathsf{I} - \mathsf{I} \right) = A^{-1}(e^{AT} - \mathsf{I})$$

$$\therefore \; B_d = A^{-1}\left(e^{AT} - \mathsf{I}\right) B \quad \text{se } \exists A^{-1}$$

MATLAB – c2d

Solução em Espaço de Estado – Tempo Discreto

NOTA – Sem perda de generalidade vamos utilizar a mesma notação de matrizes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, etc. para sistemas a tempo contínuo ou discreto. A indicação de $\boldsymbol{t}$ ou $\boldsymbol{k}$ (diferencial ou à diferença) basta para entender o contexto

Considere o sistema discreto:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(k+1)} & = & \boldsymbol{Ax(k) + Bu(k)} \\ \boldsymbol{y(k)} & = & \boldsymbol{Cx(k) + Du(k)} \end{cases}$$

Forma geral da solução:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x(1)} & = & \boldsymbol{Ax(0) + Bu(0)} \\ \boldsymbol{x(2)} & = & \boldsymbol{Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)} \\ \vdots & & \end{array}$$

Solução em Espaço de Estado – Tempo Discreto

Assim, a solução da equação à diferenças para $k > 0$ é:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} B u(m)$$

e a saída é descrita da forma:

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} CA^{k-1-m} B u(m) + D u(k)$$

Solução em Espaço de Estado – Tempo Discreto

⇝ Da mesma forma como no caso a tempo contínuo, a resposta à entrada nula $A^k x(0)$ apresenta algumas propriedades

- Suponha que A tem um autovalor λ_1 com multiplicidade 4 e o autovalor λ_2 com multiplicidade 1

- Suponha ainda que A possui a forma de Jordan tal que

$$A^k = Q \begin{bmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & k(k-1)\lambda_1^{k-2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} Q^{-1}$$

i.e., λ_1 tem índice 3 e λ_2 tem índice 1

Solução em Espaço de Estado – Tempo Discreto

▷ Combinação linear de termos do tipo λ^k, $k\lambda^{k-1}$, $k^2\lambda^{k-2}$, determinados pelos autovalores e seus índices...

▷ Se todo autovalor tem magnitude menor que 1, a resposta à entrada nula tende para zero quando $k \to \infty$ (consequência de λ^k); se A possui algum autovalor com magnitude maior que 1 a resposta à entrada nula cresce indefinidamente

▷ Um autovalor com magnitude igual a 1 e índice 1 não causa o crescimento ilimitado; se o índice for 2 ou superior, o crescimento ilimitado pode ocorrer. Por exemplo, um autovalor igual a 1 com índice 2 faz com que A^k contenha os termos $\{1, k\}$, i.e., $k\lambda^{k-1} \to \infty$, quando $k \to \infty$

Equações Dinâmicas Equivalentes

Considere o sistema linear e invariante no tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz não-singular e $\bar{x} = Px$. A equação dinâmica

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t) \end{cases}$$

é equivalente ao sistema original sendo que: $\bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{B} = PB$, $\bar{C} = CP^{-1}$ e $\bar{D} = D$. P é a transformação de equivalência (similaridade)

Equações Dinâmicas Equivalentes

É fácil constatar que:

$$\bar{A} = PAP^{-1} = Q^{-1}AQ \quad \Rightarrow \quad Q\bar{A} = A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \bar{A} = \begin{bmatrix} Aq_1 & Aq_2 & \cdots & Aq_n \end{bmatrix}$$

e a i-ésima coluna de $\bar{A}$ é a representação de Aq_i na base $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. A e $\bar{A}$ são similares e $\bar{A}$ é simplesmente uma representação diferente de A

Note também que, por outro lado, vale $x = P^{-1}\bar{x}$ e $\dot{x} = P^{-1}\bar{x}$

Fatos: Equações Dinâmicas Equivalentes

▷ Se A e $\bar{A}$ são similares então têm os mesmos autovalores

$$
\begin{aligned}
\bar{\Delta}(\lambda) &= \det\left(\lambda \mathbf{I} - \bar{A}\right) \\
&= \det\left(\lambda P P^{-1} - P A P^{-1}\right) \\
&= \det\left[P(\lambda \mathbf{I} - A)P^{-1}\right] \\
&= \det(P)\det\left(\lambda \mathbf{I} - A\right)\det(P^{-1}) \\
&= \det\left(\lambda \mathbf{I} - A\right) \\
&= \Delta(\lambda)
\end{aligned}
$$

- Como $PP^{-1} = \mathbf{I}$, então $\det(P)\det(P^{-1}) = 1$

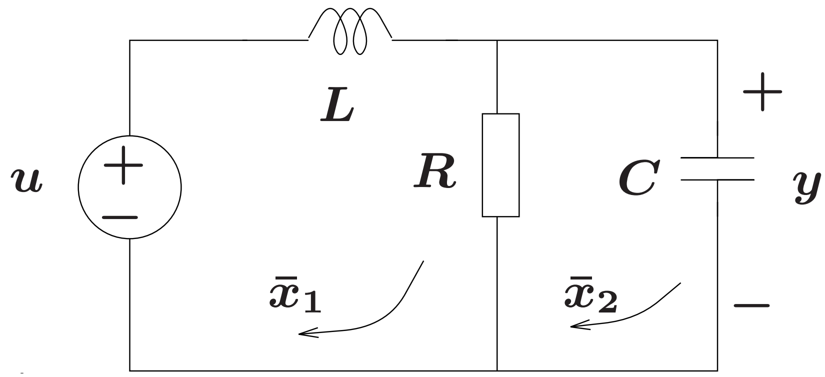
Fatos: Equações Dinâmicas Equivalentes

▷ Se A e $\bar{A}$ são similares, os sistemas têm a mesma função de transferência

$$
\begin{aligned}
\bar{G}(s) &= \bar{C}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} \\
&= CP^{-1}\left[sPP^{-1} - PAP^{-1}\right]^{-1} PB + D \\
&= CP^{-1}\left[P(s\mathbf{I} - A)P^{-1}\right]^{-1} PB + D \\
&= CP^{-1}P\,(s\mathbf{I} - A)^{-1}\,P^{-1}PB + D \\
&= C\,(s\mathbf{I} - A)^{-1}\,B + D \\
&= G(s)
\end{aligned}
$$

Equações Dinâmicas Equivalentes

Exemplo – Circuito RLC



Variáveis de estado?

x_1 : corrente no indutor;

$x_2 = y$: tensão no capacitor

ou

$\bar{x}_1$: corrente na malha 1;

$\bar{x}_2$: corrente na malha 2

Equações Dinâmicas Equivalentes

Escolhendo como variáveis de estado x_1 (corrente no indutor) e x_2 (tensão no capacitor):

$$x_1 = \underbrace{\frac{x_2}{R} + C\dot{x}_2}_{\text{corrente...}} \quad \text{e} \quad \underbrace{L\dot{x}_1 + x_2}_{\text{tensão...}} = u$$

então

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \\ \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} \end{cases}$$

Equações Dinâmicas Equivalentes

No entanto, se as correntes de malhas forem escolhidas como variáveis de estado:

$$u = \underbrace{L\dot{\bar{x}}_1 + R(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}_{\text{tensão...}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{x}}_1 = -\frac{R}{L}\bar{x}_1 + \frac{R}{L}\bar{x}_2 + \frac{1}{L}u$$

Veja que a corrente no capacitor é: $\bar{x}_2 = C\dot{v}_C = C(R(\dot{\bar{x}}_1 - \dot{\bar{x}}_2))$ ou

$$\dot{\bar{x}}_2 = \dot{\bar{x}}_1 - \frac{1}{RC}\bar{x}_2$$

como $\dot{\bar{x}}_1 = \frac{1}{L}\left(u - R(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\right)$ então

$$\dot{\bar{x}}_2 = \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}\bar{x}_1 + \frac{R}{L}\bar{x}_2 - \frac{1}{RC}\bar{x}_2$$

Equações Dinâmicas Equivalentes

Então tem-se:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\bar{x}}} & = & \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & \dfrac{R}{L} \\ -\dfrac{R}{L} & \dfrac{R}{L} - \dfrac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}}_{\bar{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}}_{\bar{B}} u \\
 & & \\
y & = & \underbrace{\begin{bmatrix} R & -R \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}}_{\bar{x}}
\end{array}\right.$$

Equações Dinâmicas Equivalentes

▷ Qual é a transformação de similaridade que escreve as formas equivalentes? Note que a corrente no indutor x_1 é igual a corrente de malha $\bar{x}_1$. Já a tensão no capacitor, x_2, é igual a tensão no resistor R ou, em outras palavras, $x_2 = R(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$. Então:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ R & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{ou com} \begin{bmatrix} R & 0 \\ R & -R \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-R} \begin{bmatrix} -R & 0 \\ -R & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x}$$

Usando a mudança de coordenadas $\bar{x} = Px, \bar{A} = PAP^{-1}, \bar{B} = PB, \bar{C} = CP^{-1}$...

Equações Dinâmicas Equivalentes

Então pode-se obter a forma equivalente:

$$\bar{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R & -R \end{bmatrix}}_{P^{-1}} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{R}{L} \\ -\frac{R}{L} & \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R & -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -R \end{bmatrix}$$

E vice-versa, já que $\exists P^{-1}$. Então, com as matrizes acima pode-se retornar a forma equivalente original fazendo $x = P^{-1}\bar{x}$, $A = P^{-1}\bar{A}P$, $B = P^{-1}\bar{B}$, $C = \bar{C}P^{-1}$.

Ou obter outra forma equivalente qualquer para o mesmo circuito. Basta definir P !!

Forma Canônica Companheira

Forma Companheira representação de A na base

$$Q = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & \cdots & A^{n-1}b_1 \end{bmatrix}$$

sendo b_1 a primeira coluna de B, então:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4$$

MATLAB `[sistemaCanonico,Q]=canon(sistema,'type')`, forma companheira se `type=companion` para `sistema=ss(A,B,C,D)` com Q sendo a transformação

Forma Canônica Modal

Considere $\boldsymbol{A}$ com dois autovalores reais e um par complexo conjugado (dados por $\boldsymbol{\lambda_1}$, $\boldsymbol{\lambda_2}$, $\boldsymbol{\alpha + j\beta}$ e $\boldsymbol{\alpha - j\beta}$). A representação na base formada pelos autovetores ($\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$, $\boldsymbol{q_3}$ e $\boldsymbol{q_4}$, respectivamente, com $\boldsymbol{q_3}$ e $\boldsymbol{q_4}$ complexo conjugados) fornece (sendo $\boldsymbol{Q}$ formada pelo autovetores obtidos diretamente de `eig`):

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ \quad \text{(Jordan)}$$

▷ $\hat{\boldsymbol{A}}$ pode ser transformada em uma matriz similar real?

Forma Canônica Modal

Definem-se

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5j \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5j \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & j & -j \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \bar{Q}^{-1}\hat{A}\bar{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \rightarrow \text{Forma modal}$$

▷ As duas transformações podem ser combinadas: $\bar{A} = \bar{Q}^{-1}Q^{-1}AQ\bar{Q}$

Forma Canônica Modal

Note que as duas transformações podem ser combinadas em uma:

$$Q\bar{Q} \triangleq P^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5j \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \mathrm{Re}\,(q_3) & \mathrm{Im}\,(q_3) \end{bmatrix}$$

lembrando que q_3 e q_4 são complexo conjugados

MATLAB `[MODAL,P]=canon(sistema,'type')`, forma modal se `type=modal` para `sistema=ss(A,B,C,D)` com P sendo a transformação

Forma Canônica Modal

Exemplo $A = \begin{bmatrix} -0.4326 & -1.1465 & 0.3273 & -0.5883 \\ -1.6655 & 1.1909 & 0.1746 & 2.1832 \\ 0.1253 & 1.1892 & -0.1867 & -0.1364 \\ 0.2877 & -0.0376 & 0.7258 & 0.1139 \end{bmatrix}$

Autovalores: $\mathbf{2.1559, -1.3857, -0.0423 \pm j0.8071}$

```
Ac=jordan(A),
Ac =
  -0.0423 - 0.8071i        0                  0                  0
        0          -0.0423 + 0.8071i          0                  0
        0                  0              -1.3857                0
        0                  0                  0              2.1559
```

Forma Canônica Modal

```
Qb=[1/2 -1/2*j 0 0;1/2 1/2*j 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1],
 Qb =
   0.5000                  0 - 0.5000i         0                   0
   0.5000                  0 + 0.5000i         0                   0
        0                  0              1.0000                   0
        0                  0                   0              1.0000
```

```
Qbi=inv(Qb),
 Qbi =
   1.0000             1.0000                   0                   0
        0 + 1.0000i        0 - 1.0000i         0                   0
        0                  0              1.0000                   0
        0                  0                   0              1.0000
```

Forma Canônica Modal

```
Ab=Qbi*Ac*Qb,

 Ab =
   -0.0423   -0.8071         0         0
    0.8071   -0.0423         0         0
         0         0   -1.3857         0
         0         0         0    2.1559
```

CURIOSIDADE usando a função canon...

```
A;B=[0;0;0;0];C=[0 0 0 0];D=0; sys=ss(A,B,C,D);[sysc,P]=canon(sys,'modal')

a =
              x1          x2          x3          x4
   x1      2.156           0           0           0
   x2          0      -1.386           0           0
   x3          0           0    -0.04232      0.8071
   x4          0           0     -0.8071    -0.04232

b =
        u1
   x1    0
   x2    0
   x3    0
   x4    0
```

CURIOSIDADE usando a função `canon`...

```
c =

        x1   x2   x3   x4
   y1    0    0    0    0


d =

        u1
   y1    0


Continuous-time model.
P =
     0.3956   -0.8017   -0.2992   -0.9511
     1.0220    0.5127   -0.1369   -0.3580
    -0.6708    0.1341   -0.8730    0.1519
    -0.0337   -0.1357    0.0498    1.0286
```

Forma Canônica Modal

Exemplo – Forma modal de uma matriz com autovalores λ_1, $\alpha_1 \pm j\beta_1$ e $\alpha_2 \pm j\beta_2$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 & \mathrm{Re}\,(q_2) & \mathrm{Im}\,(q_2) & \mathrm{Re}\,(q_4) & \mathrm{Im}\,(q_4) \end{bmatrix}$$

sendo q_1, q_2 e q_4 autovetores associados, respectivamente a λ_1, $\alpha_1 + j\beta_1$ e $\alpha_2 + j\beta_2$

Realizações

Considere um sistema linear e invariante no tempo descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

A sua descrição entrada/saída (matriz de transferência)

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

pode ser obtida (de maneira única) a partir da equação de estado

E o contrário?

Realização – Dada uma matriz de transferência $G(s)$, encontrar uma descrição no espaço de estados

Realizações

▷ Uma matriz de transferência é realizável se existe um sistema de equações de estado de dimensão finita que o representa. Ou, simplesmente, se existem matrizes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ tais que

$$\boldsymbol{G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D}$$

$\boldsymbol{\{A, B, C, D\}}$ é uma realização de $\boldsymbol{G(s)}$

▶ Nem toda função $\boldsymbol{G(s)}$ admite uma realização (por exemplo, sistemas a parâmetros distribuídos). Porém, se $\boldsymbol{G(s)}$ é realizável, então ela possui infinitas realizações (em outras palavras, sistemas equivalentes)

Realizações

Teorema Uma matriz de transferência é realizável se, e somente se, $G(s)$ é uma matriz racional própria

Demonstração $(\longrightarrow)$ Para uma matriz de transferência:

$$C(s\mathbf{I}-A)^{-1}B = \frac{1}{\det(s\mathbf{I}-A)}C[\text{Adj }(s\mathbf{I}-A)]B$$

Note que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, então $\det(s\mathbf{I}-A)$ tem grau n. Todo elemento de Adj $(s\mathbf{I}-A)$ é um determinante de uma submatriz $(n-1)\times(n-1)$ de $(s\mathbf{I}-A)$, e suas combinações lineares têm no máximo grau $(n-1)$. Assim, $C(s\mathbf{I}-A)^{-1}B$ é uma matriz racional estritamente própria. Se $D \neq \mathbf{0}$, então $C(s\mathbf{I}-A)^{-1}B + D$ é própria ($G(\infty) = D$). Como conclusão, se $G(s)$ é realizável, $G(s)$ é uma matriz racional própria

Realizações

$(\longleftarrow)$ Deseja-se agora mostrar que se $G(s)$ é uma matriz $q \times p$ racional própria, então existe uma realização. Suponha que $G(s)$ é decomposta na forma

$$G(s) = G_{ep}(s) + G(\infty)$$

com $G_{ep}(s)$ correspondendo à parte estritamente própria. Considere o polinômio mônico (i.e., o coeficiente do termo de grau mais alto é 1) abaixo

$$d(s) = s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \cdots + \alpha_{r-1} s + \alpha_r$$

que denota o mínimo denominador comum de todos os elementos de $G_{ep}(s)$. Então, $G_{ep}(s)$ pode ser escrita na forma

$$G_{ep}(s) = \frac{1}{d(s)}\Big[N(s)\Big] = \frac{1}{d(s)}\Big[N_1 s^{r-1} + N_2 s^{r-2} + \cdots + N_{r-1} s + N_r\Big]$$

sendo N_i matrizes constantes $q \times p$ (compondo o numerador)

Realizações

Suponha que o conjunto de equações

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \mathbf{I}_p & -\alpha_2 \mathbf{I}_p & \cdots & -\alpha_{r-1} \mathbf{I}_p & -\alpha_r \mathbf{I}_p \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_p \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{0}_p \\ \mathbf{0}_p \\ \vdots \\ \mathbf{0}_p \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_{r-1} & N_r \end{bmatrix} x + G(\infty) u \end{cases}$$

é uma realização de $G(s)$ (a se comprovar...)

- $A(rp \times rp)$ está na forma bloco-companheira, r linhas e r colunas de matrizes $p \times p$; $B(rp \times p)$, $C(q \times rp)$ consiste de r matrizes N_i, cada qual $q \times p$. A realização de dimensão rp é chamada forma canônica controlável

Realizações

Para demonstrar que de fato esta é uma realização de $G(s)$, define-se

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_r \end{bmatrix} \triangleq (s\mathbf{I} - A)^{-1}B$$

sendo que cada bloco Z_i é $p \times p$ e Z é $rp \times p$. Então a matriz de transferência da realização é

$$C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + G(\infty) = N_1 Z_1 + N_2 Z_2 + \cdots + N_r Z_r + G(\infty)$$

Re-escrevendo a expressão de $Z = (s\mathbf{I} - A)^{-1}B$ tem-se

$$(s\mathbf{I} - A)Z = B \quad \Longrightarrow \quad sZ = AZ + B$$

Levando em conta a forma bloco companheira de A, do segundo ao último bloco da equação $sZ = AZ + B$ (note que: $\dot{x}_2 = \mathrm{I}_p x_1$; $\dot{x}_3 = \mathrm{I}_p x_2, \ldots$), tem-se:

$$sZ_2 = Z_1 \ , \ sZ_3 = Z_2 \ , \ \ldots \ , \ sZ_r = Z_{r-1}$$

e, portanto: $Z_2 = \frac{1}{s} Z_1 \ , \ Z_3 = \frac{1}{s^2} Z_1 \ , \ \ldots \ , \ Z_r = \frac{1}{s^{r-1}} Z_1$, que, substituído no primeiro bloco de $sZ = AZ + B$ (veja que da forma canônica controlável: $\dot{x}_1 = -\alpha_1 \mathrm{I}_p x_1 - \alpha_2 \mathrm{I}_p x_2 - \ldots - \alpha_r \mathrm{I}_p x_r + \mathrm{I}_p$) fornece:

$$\begin{aligned} sZ_1 &= -\alpha_1 Z_1 - \alpha_2 Z_2 - \cdots - \alpha_r Z_r + \mathrm{I}_p \\ &= -\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{s} + \cdots + \frac{\alpha_r}{s^{r-1}}\right) Z_1 + \mathrm{I}_p \end{aligned}$$

ou

$$\left(s + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{s} + \cdots + \frac{\alpha_r}{s^{r-1}}\right) Z_1 = \mathrm{I}_p$$

Realizações

Usando a definição do polinômio $d(s)$:

$$d(s) = s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \alpha_2 s^{r-2} + \cdots + \alpha_{r-1} s + \alpha_r$$

pode-se re-escrever a igualdade anterior da forma:

$$\left(s + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{s} + \cdots + \frac{\alpha_r}{s^{r-1}}\right) Z_1 = \frac{d(s)}{s^{r-1}} Z_1 = \mathbf{I}_p. \quad \text{Então} \quad Z_1 = \frac{s^{r-1}}{d(s)} \mathbf{I}_p$$

Assim,

$$Z_1 = \frac{s^{r-1}}{d(s)} \mathbf{I}_p \ , \ \ Z_2 = \frac{s^{r-2}}{d(s)} \mathbf{I}_p \ , \ \ \ldots \ , \ \ Z_r = \frac{1}{d(s)} \mathbf{I}_p$$

Finalmente, substituindo na expressão da função de transferência, tem-se

$$C(s\mathbf{I} - A)^{-1} B + G(\infty) = \frac{1}{d(s)} \left[N_1 s^{r-1} + N_2 s^{r-2} + \cdots + N_{r-1} s + N_r \right] + G(\infty)$$

e, portanto, de fato a equação de estado é uma realização de $G(s)$

Exemplo

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{4s-10}{2s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-12}{2s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

Note que o mínimo denominador comum de $G_{ep}(s)$ é

$$d(s) = (s+0.5)(s+2)^2 = s^3 + 4.5s^2 + 6s + 2$$

Portanto

$$G_{ep}(s) = \frac{1}{s^3 + 4.5s^2 + 6s + 2} \begin{bmatrix} -6(s+2)^2 & 3(s+2)(s+0.5) \\ 0.5(s+2) & (s+1)(s+0.5) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{d(s)} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{N_1} s^2 + \underbrace{\begin{bmatrix} -24 & 7.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}}_{N_2} s + \underbrace{\begin{bmatrix} -24 & 3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}}_{N_3} \right)$$

e uma realização de $G(s)$ (de dimensão 6) é...

Realizações

é:

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -4.5 & 0 & -6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4.5 & 0 & -6 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -6 & 3 & -24 & 7.5 & -24 & 3 \\ 0 & 1 & 0.5 & 1.5 & 1 & 0.5 \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Realizações

Exemplo Caso particular $p = 1$ (SIMO). Por simplicidade, assuma $r = 4$ e $q = 2$ (se aplica para quaisquer outros valores de r e q...). Considere:

$$G(s) = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4} \begin{bmatrix} \beta_{11} s^3 + \beta_{12} s^2 + \beta_{13} s + \beta_{14} \\ \beta_{21} s^3 + \beta_{22} s^2 + \beta_{23} s + \beta_{24} \end{bmatrix}$$

A realização é obtida aplicando-se o resultado anterior

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} u$$

MATLAB

Numerador:

```
n={0.5*conv([4 -10],conv([1 2],[1 2])) 3*conv([1 2],[1 0.5]);
0.5*[1 2] conv([1 1],[1 0.5])}
```

Denominador: `d=[1 4.5 6 2]`

```
G=tf(n,d)


Transfer function from input 1 to output...

      2 s^3 + 3 s^2 - 12 s - 20
 #1:  -------------------------
       s^3 + 4.5 s^2 + 6 s + 2

             0.5 s + 1
 #2:  -----------------------
      s^3 + 4.5 s^2 + 6 s + 2
```

Realizações

```
Transfer function from input 2 to output...

         3 s^2 + 7.5 s + 3
 #1:  ----------------------
      s^3 + 4.5 s^2 + 6 s + 2

         s^2 + 1.5 s + 0.5
 #2:  ----------------------
      s^3 + 4.5 s^2 + 6 s + 2
```

Realizações

```
sys=ss(G)
a =
           x1     x2     x3     x4     x5     x6
   x1    -4.5     -3     -1      0      0      0
   x2       2      0      0      0      0      0
   x3       0      1      0      0      0      0
   x4       0      0      0   -4.5     -3     -1
   x5       0      0      0      2      0      0
   x6       0      0      0      0      1      0


b =
         u1   u2
   x1     4    0
   x2     0    0
   x3     0    0
   x4     0    2
   x5     0    0
   x6     0    0
```

Realizações

```
c =
              x1        x2        x3        x4        x5        x6
   y1       -1.5        -3        -3       1.5     1.875      0.75
   y2          0    0.0625     0.125       0.5     0.375     0.125

d =
          u1   u2
   y1      2    0
   y2      0    0
```

Realizações

```
t=tf(sys)
Transfer function from input 1 to output...
      2 s^3 + 3 s^2 - 12 s - 20
 #1:  -------------------------
       s^3 + 4.5 s^2 + 6 s + 2

             0.5 s + 1
 #2:  -----------------------
      s^3 + 4.5 s^2 + 6 s + 2

Transfer function from input 2 to output...
         3 s^2 + 7.5 s + 3
 #1:  -----------------------
      s^3 + 4.5 s^2 + 6 s + 2

         s^2 + 1.5 s + 0.5
 #2:  -----------------------
      s^3 + 4.5 s^2 + 6 s + 2
```