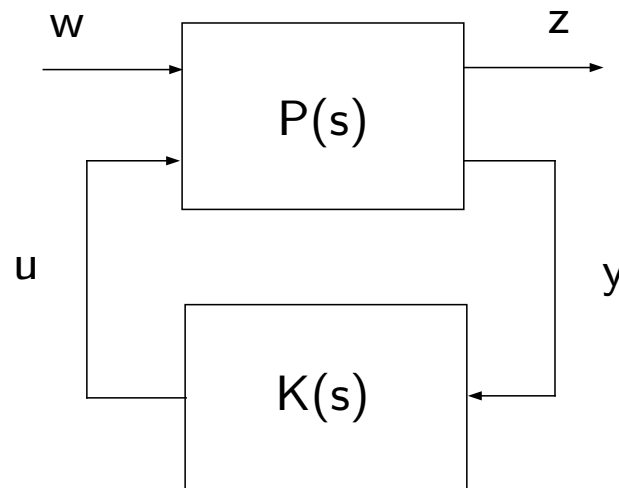


Controle Robusto \mathcal{H}_2

1. O problema de controle \mathcal{H}_2 padrão
2. Controle ótimo \mathcal{H}_2 por LMIs

Problema de Controle \mathcal{H}_2 padrão

“Encontre um controlador $K(s)$ que estabilize internamente o sistema descrito por $P(s)$, e minimize a norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência em malha fechada T_{zw} de w para z ”



Planta Generalizada associada ao sistema

Controle \mathcal{H}_2 por LMIs

Por que considerar LMIs? Facilidade de se tratar incertezas politópicas (e limitadas em norma também). Obtém-se facilmente problemas de otimização convexa

Implicações para o controle \mathcal{H}_2 com Incertezas? Introdução da noção de custo garantido

Realimentação de estados para o caso de modelos precisamente conhecidos, reproduz **exatamente a mesma solução** quando se considera uma abordagem por Riccati

Nota Há várias estratégias na literatura baseadas em Riccati que também permitem lidar com sistemas incertos, particularmente incertezas limitadas em norma (porém, sob o meu ponto de vista, a um custo em termos de manipulações razoavelmente grande)

Controle \mathcal{H}_2 por LMIs

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= I x(t), \quad u(t) = K x(t) \end{cases}$$

sendo que o sistema em malha fechada de $w \longrightarrow z$ é descrito por

$$T_{zw}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_f & B_w \\ \hline C_f & 0 \end{array} \right]$$

onde $A_f = A + B_u K$ e $C_f = C_z + D_{zu} K$

Controle \mathcal{H}_2 por LMIs

Ponto de partida? Resultado de análise para o **cálculo** da norma \mathcal{H}_2 em espaço de estados, baseado nos Grammianos de observabilidade ou controlabilidade, **e revisitados em termos de um problema de otimização**, ie

$$\min_K \|T_{zw}\|_2^2 = \min_{X_o \succ \mathbf{0}} \text{Traço} \left\{ B_w^T X_o B_w \right\}$$

$$\text{s.a} \quad A_f^T X_o + X_o A_f + C_f^T C_f \preceq \mathbf{0}$$

ou

$$\min_K \|T_{zw}\|_2^2 = \min_{X_c \succ \mathbf{0}} \text{Traço} \left\{ C_f X_c C_f^T \right\}$$

$$\text{s.a} \quad A X_c + X_c A^T + B_w B_w^T \preceq \mathbf{0}$$

Controle \mathcal{H}_2 por LMIs

Como garantir que se obtêm a norma \mathcal{H}_2 mínima? Já que não se utilizou diretamente os Grammianos de Observabilidade ou Controlabilidade, mas sim um problema de otimização? Em outras palavras, qual a relação entre X_o e L_o ?

- Note que do Grammiano de Observabilidade

$$A_f^T L_o + L_o A_f + C_f^T C_f = 0$$

e da LMI na primeira restrição anterior

$$A_f^T X_o + X_o A_f + C_f^T C_f \preceq 0$$

obtém-se do termo em comum $C_f^T C_f$

$$A_f^T X_o + X_o A_f \preceq A_f^T L_o + L_o A_f$$

$$A_f^T (X_o - L_o) + (X_o - L_o) A_f \preceq 0$$

Do Teorema de Lyapunov, se A_f é estável então $X_o - L_o \succ 0 \Rightarrow X_o \succ L_o$

Controle \mathcal{H}_2 por LMIs

- Como o problema de otimização é **convexo** (concorda?), então é fácil concluir que, $X_o \rightarrow L_o$ e

$$\min_{X_o \succ \mathbf{0}} \text{Traço} \left\{ B_w^T X_o B_w \right\} = \text{Traço} \left\{ B_w^T L_o B_w \right\} = \min_K \|T_{zw}\|_2^2$$

- O mesmo procedimento vale para o cálculo da norma \mathcal{H}_2 descrita pelo procedimento de otimização e o Grammiano de controlabilidade

Controle \mathcal{H}_2 por LMIs

Receita de bolo... Uma vez de posse de um resultado de análise \mathcal{H}_2 em malha fechada (ou cálculo da norma \mathcal{H}_2 para um controlador K dado), basta proceder as substituições de A_f e C_f na LMI, ie considerando

$$A_f^T X_o + X_o A_f + C_f^T C_f \preceq 0$$



$$(A + B_u K)^T X_o + X_o (A + B_u K) + (C_z + D_{uz} K)^T (C_z + D_{uz} K) \preceq 0$$

 Schur

$$\begin{bmatrix} (A + B_u K)^T X_o + X_o (A + B_u K) & (C_z + D_{uz} K)^T \\ (C_z + D_{uz} K) & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

Controle \mathcal{H}_2 por LMIs

⇕ Transformação de Similaridade

$$\begin{bmatrix} X_o^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A + B_u K)^T X_o + X_o (A + B_u K) & (C_z + D_{uz} K)^T \\ (C_z + D_{uz} K) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_o^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0$$

⇕ $X \triangleq X_o^{-1}, Z \triangleq K X_o^{-1} = KX$

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & XC_z^T + Z^T D_{uz}^T \\ C_z X + D_{uz} Z & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

Controle \mathcal{H}_2 por LMIs

- Veja que com a mudança de variáveis linearizante $\mathbf{X} \triangleq \mathbf{X}_o^{-1}$ transformou a função objetivo da forma:

$$\text{Traço} \left\{ \mathbf{B}_w^T \mathbf{X}_o \mathbf{B}_w \right\} = \text{Traço} \left\{ \mathbf{B}_w^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B}_w \right\}$$

portanto **não-linear** !!

Dessa forma, ainda é necessário se fazer mais uma manipulação para que o problema possa ser descrito da forma linear ...

Controle \mathcal{H}_2 por LMIs

O que fazer? Introduce-se uma variável matricial adicional, J , lembrando que traço é um operador linear e utilizando Schur

$$\text{Traço}\{J\} \geq \text{Traço} \left\{ B_w^T X^{-1} B_w \right\}$$



$$J \succeq B_w^T X^{-1} B_w$$



$$J - B_w^T X^{-1} B_w \succeq 0$$

\Leftrightarrow agora linear ...

$$\begin{bmatrix} J & B_w^T \\ B_w & X \end{bmatrix} \succ 0$$

Controle ótimo \mathcal{H}_2 por LMIs – Contínuo

Portanto o problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 pode ser colocado da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{J=J^T, X=X^T, Z} \text{Traço}\{J\} \\ \text{s.a} \quad \begin{bmatrix} J & B_w^T \\ B_w & X \end{bmatrix} \succ 0 \\ \begin{bmatrix} AX + XA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & XC_z^T + Z^T D_{uz}^T \\ C_z X + D_{uz} Z & -I \end{bmatrix} \prec 0 \end{array} \right.$$

onde $K = ZX^{-1}$ e $\min \|T_{zw}\|_2^2 = \text{Traço}\{J\}$

Controle ótimo \mathcal{H}_2 por LMIs

Caso a tempo discreto Mesmo procedimento ... Particularmente do **cálculo** da norma \mathcal{H}_2 em termos de otimização, tem-se

$$\begin{aligned} \min_K \|T_{zw}\|_2^2 &= \min_{X_o > \mathbf{0}} \text{Traço} \left\{ B_w^T X_o B_w \right\} \\ \text{s.a} & A_f^T X_o A_f - X_o + C_f^T C_f \preceq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \min_K \|T_{zw}\|_2^2 &= \min_{X_c > \mathbf{0}} \text{Traço} \left\{ C_f X_c C_f^T \right\} \\ \text{s.a} & A_f X_c A_f^T - X_c + B_w B_w^T \preceq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Da primeira opção, obtém-se a síntese do controlador ótimo aplicando-se Schur na LMI, considerando as mudanças de variáveis linearizantes $X = X_o^{-1}$, $Z = K X_o^{-1}$, e levando em conta a introdução de uma variável extra na função custo, J

Controle ótimo \mathcal{H}_2 por LMIs – Discreto

Particularmente $A_f^T X_o A_f - X_o + C_f^T C_f \prec 0 \dots$

\Updownarrow Schur

$$\begin{bmatrix} X_o & A_f^T & C_f^T \\ A_f & X_o^{-1} & 0 \\ C_f^T & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0$$

\Updownarrow Pré- e pós-multiplicando por $\text{diag}\{X_o^{-1}, I, I\}$

$$\begin{bmatrix} X_o^{-1} & X_o^{-1}(A + B_u K)^T & X_o^{-1}(C_z + D_{zu} K)^T \\ (A + B_u K)X_o^{-1} & X_o^{-1} & 0 \\ (C_z + D_{zu} K)X_o^{-1} & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0$$

Aplicando as mudanças de variáveis linearizantes $X = X_o^{-1}$ e $Z = K X_o^{-1}$ obtém-se a última LMI da próxima página ...

Controle ótimo \mathcal{H}_2 por LMIs – Discreto

Portanto o problema de controle ótimo \mathcal{H}_2 para sistemas a tempo discreto é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{J, X, Z} \quad \text{Traço} \{J\} \\ \\ \text{s.a} \quad \begin{bmatrix} J & B_w^T \\ B_w & X \end{bmatrix} \succ 0 \\ \\ \begin{bmatrix} X & XA^T + Z^T B_u^T & XC_z^T + Z^T D_{uz}^T \\ AX + B_u Z & X & 0 \\ C_z X + D_{uz} Z & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0 \end{array} \right.$$

onde $K = ZX^{-1}$ e $\min \|T_{zw}\|_2^2 = \text{Traço} \{J\}$

Controle robusto \mathcal{H}_2 por LMIs – Custo Garantido

- Incertezas politópicas? Bastante simples de ser aplicado nos procedimentos de otimização convexa descritos por LMIs. É suficiente testar nos vértices do politopo
- Valor da norma \mathcal{H}_2 ? No caso de sistemas incertos, considerando estabilidade quadrática, tem-se o denominado **custo garantido \mathcal{H}_2** . Isto é, $(\text{Traço } \{J\})^{1/2}$ é um **limitante superior** assegurando que em cada vértice, o valor da norma \mathcal{H}_2 é **limitado** por este custo garantido
- Solução conservadora? Considerando estabilidade quadrática, com a matriz de Lyapunov fixada para todos os vértices, o custo garantido pode ser bastante conservador com relação a norma \mathcal{H}_2 realmente obtida para cada vértice

Exercícios

Sistema de Tanques Interativos (STI) Este sistema piloto é composto de dois tanques conectados, utilizando sensores e atuadores industriais^a. As matrizes do modelo em espaço de estado são

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma & 0 \\ -\gamma & \delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B_u = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$
$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; D_{zu} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

onde x_1 e x_2 são os níveis de cada tanque, e $\dot{x}_3 = x_2$ é um estado extra adicionado para evitar erros em estado estacionário em x_2 (ie, um integrador...). As matrizes C_z , e D_{zu} ponderam os estados e o controle

^aV.J.S. Leite, M.F.Miranda, P.L.D. Peres and F.G. Jota, "Robust pole location for an interacting tank system with uncertain parameters". *IEEE 28th IECON*, pp. 1618-1623, 2002.

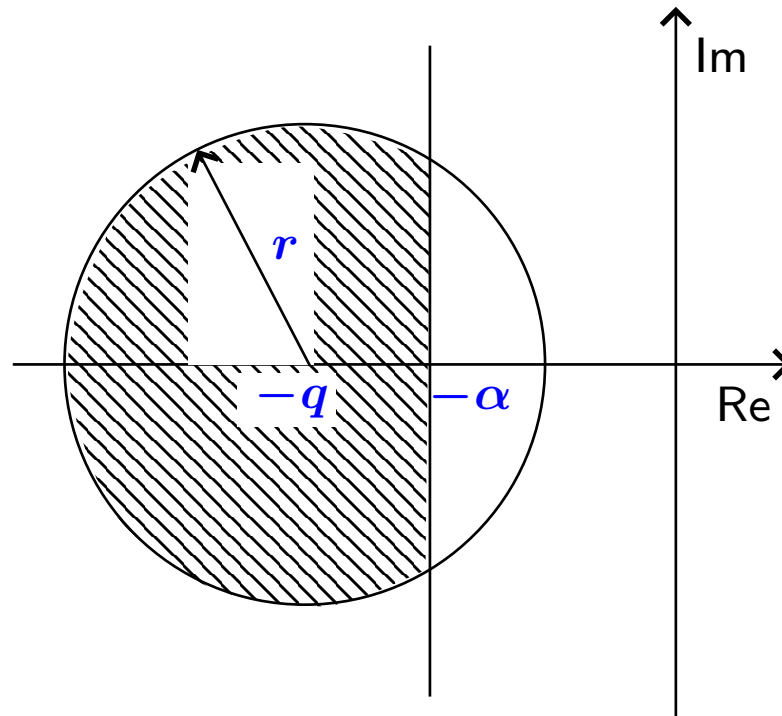
Exercícios

Usando dados experimentais, o comportamento do sistema pode ser representado por um politopo com $\kappa = 3$ vértices, onde os valores dos parâmetros de cada ponto de operação são listados na Tabela abaixo

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
$\gamma \times 10^{-2}$	3.576	3.576	2.262
$\delta \times 10^{-2}$	-3.583	-3.579	-2.264
$b_{11} \times 10^{-3}$	6.201	12.294	12.109
$b_{22} \times 10^{-3}$	8.248	2.181	1.822

Encontre o controlador robusto \mathcal{H}_2 , o custo garantido \mathcal{H}_2 e as respectivas normas \mathcal{H}_2 em cada vértice, quando considera-se alocar os pólos em malha fechada em uma região LMI do tipo:

Exercícios



Região LMI: intersecção de um disco com um semi-plano

sendo $\alpha = 0.2$, $q = 2.31$, e $r = 2.3$