Controlador PID e Lugar das Raízes

1. Controlador PID
2. Minorsky (1922), “Directional stability of automatically steered bodies”, *Journal of the American Society of Naval Engineers*, Vol. 34, pp. 284 – Pilotagem de navios
3. Exemplo de projeto PID utilizando Lugar da Raízes (LR)

Controlador PID

▷ O controlador PID é largamente utilizado na indústria e tem uma estrutura com três termos relativamente simples:

$$u(t) = K_P\, e(t) + K_D\, \dot{e}(t) + K_I \int e(t)dt$$

$$\Downarrow \quad \mathcal{L}$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_D\, s + \frac{K_I}{s}$$

É razoavelmente robusto podendo ser usado também onde não se conhece precisamente o modelo da planta

Método de Ziegler-Nichols – Mais no Livro Texto! Ou na página do curso tem-se o artigo: Revisitando o Método de Ziegler-Nichols para Sintonia de PID

Controlador PID

▷ O processo de seleção dos ganhos do controlador PID é chamado de sintonia

Controlador Proporcional – Considerando $K_D = K_I = 0$, o PID é um controlador proporcional que pode ser visto como um controle de intensidade

- Aumentando-o ajuda a reduzir os efeitos dos distúrbios e a sensibilidade a variação de parâmetros na planta

- Porém não rejeita completamente distúrbios e erro em estado estacionário geralmente pode persistir (como já discutido)

- Note que aumentando muito o ganho proporcional, eventualmente pode levar o sistema em malha fechada à instabilidade

Controlador PID

Controlador Integral – Considerando $K_D = K_P = 0$, o PID é um controlador integral

- Uma vantagem imediata é que a ação integral inclui a redução ou eliminação de erros de rastreamento em estado estacionário

- Isto é possível já que se introduz um integrador na malha

- Um controlador proporcional e integral é denominado controlador PI:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

Controlador PID

Controlador Derivativo – Considerando $K_P = K_I = 0$, o PID é um controlador derivativo. Este tipo de controlador pode aumentar o amortecimento do sistema

- Normalmente o controlador derivativo é usado em conjunto com o proporcional (e integral). O controlador PD é:

$$G_c(s) = K_P + K_D s$$

- O termo derivativo é **implementado eletrônicamente** na forma $K_D s/(\tau_d s + 1)$, fazendo $\tau_d << \tau_{\text{processo}}$, i.e., o polo em -$1/\tau_d$ rad/s não domina a resposta temporal do sistema (muito rápido) e pode ser desprezado

▷ Um projeto PID completo envolve um compromisso entre os três parâmetros a serem sintonizados: K_P, K_D e K_I

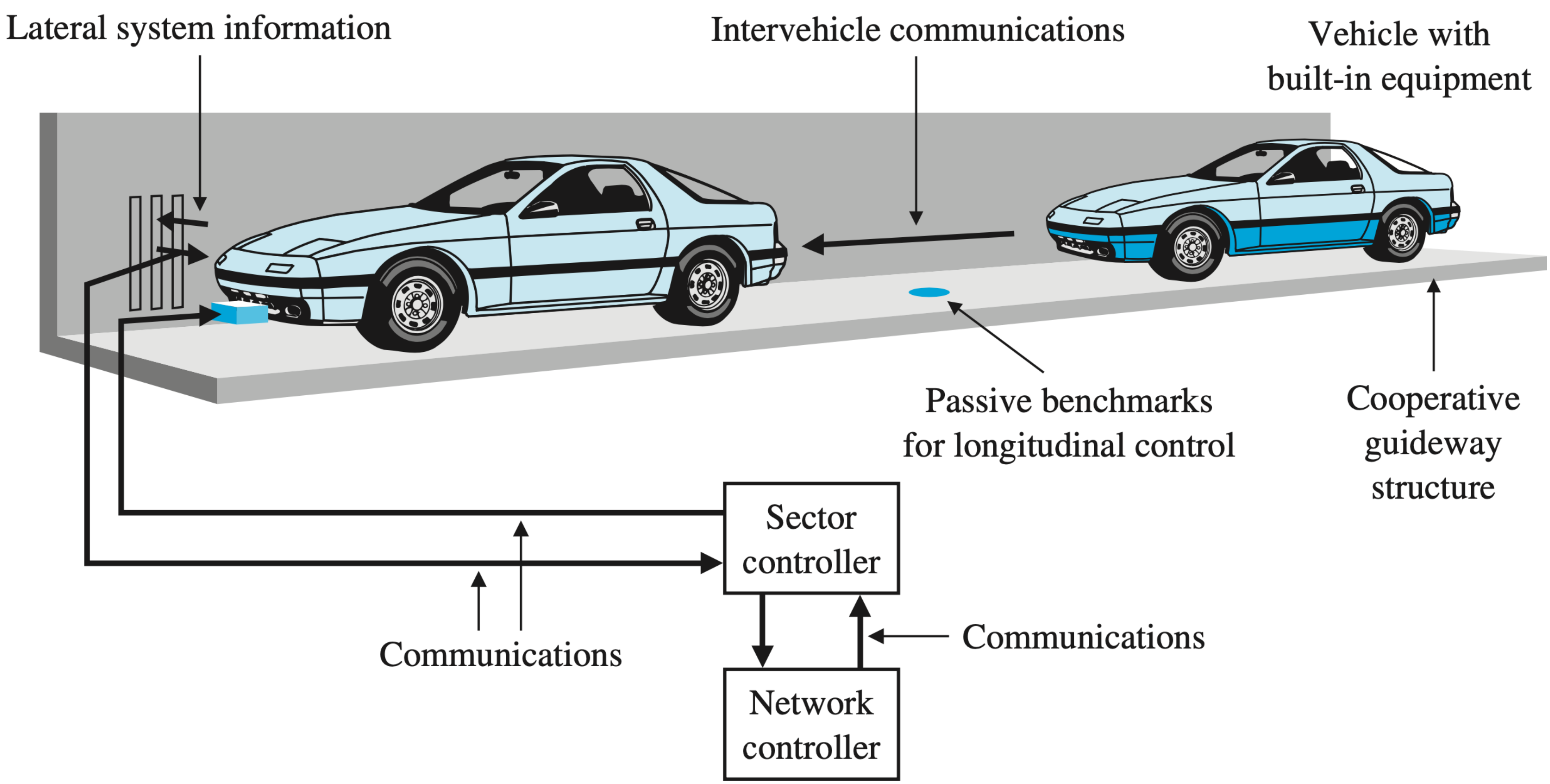
Controlador PID

Note que o PID pode ser reescrito na forma

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= K_P + K_D\, s + \frac{K_I}{s} \\
&= \frac{K_D\, s^2 + K_P\, s + K_I}{s} \\
&= K_D\, \frac{s^2 + \frac{K_P}{K_D}\, s + \frac{K_I}{K_D}}{s} = K_D\, \frac{(s + z_1)\,(s + z_2)}{s} \\
&= K_D\, \frac{s^2 + (z_1 + z_2)\, s + z_1 z_2}{s}
\end{aligned}
$$

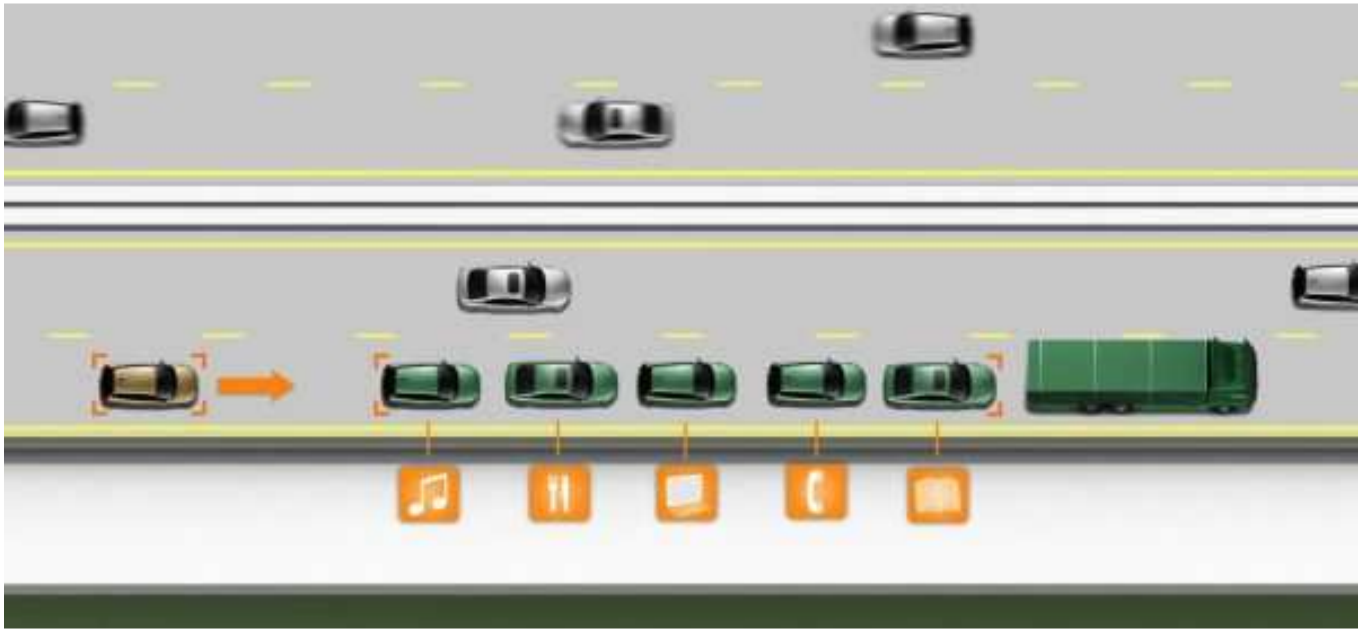
▷ Para o projeto faça $K = K_D$ com sendo a variável a ser obtida via Lugar das Raízes. Então, é necessário fixar as outras variáveis K_P e K_I, **pré selecionando** valores apropriados para z_1 e z_2 tais que: $z_1 + z_2 = \frac{K_P}{K_D}$ e $z_1 z_2 = \frac{K_I}{K_D}$

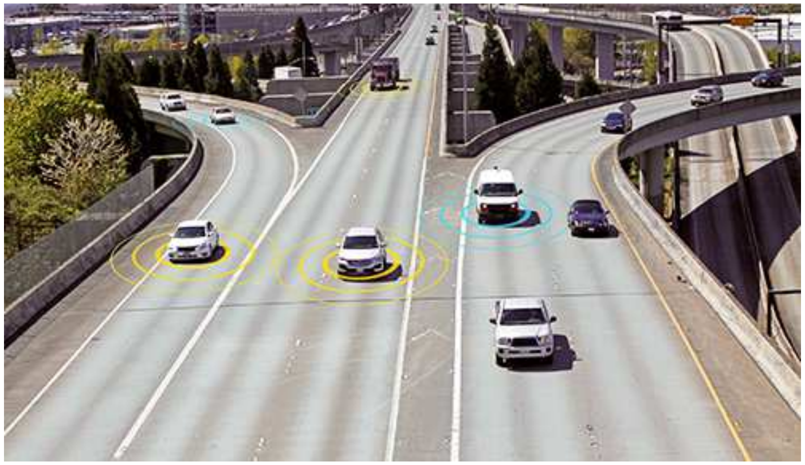
Navegação Autônoma em Rodovias



Nova roupagem tecnológica: What is vehicle platooning?

Navegação Autônoma em Rodovias





Controlador PID e LR – Exemplo

Navegação Autônoma em Rodovias Inteligentes – Controle de Velocidade

▷ Objetivo de controle

Manter a velocidade prescrita entre dois veículos e manobrar o veículo ativo conforme comandado

▷ Variável a ser controlada

Velocidade relativa entre os veículos denotada por $y(t)$

Controlador PID e LR – Exemplo

▷ Especificações de projeto

E1. Erro em estado estacionário nulo para entrada degrau

E2. Erro em estado estacionário para entrada rampa $\leq 25\%$ em relação a magnitude da entrada

E3. $M_p \leq 5\%$ para entrada degrau

E4. $t_a \leq 1.5$s para entrada degrau (critério de 2%)

Controlador PID e LR – Exemplo

- Considere realimentação unitária
- Modelo de 2a. ordem:

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+8)}}$$

- Curioso? Veja um modelo alternativo não linear e de 3a. ordem

O que fazer com as especificações ?

E1 – Qual o tipo do sistema $G(s)$? Tipo 0. Portanto o controlador deve "aumentar" o tipo do sistema para que $e_{ss} = 0$ (se for entrada degrau) e $e_{ss} < \infty$ (se for entrada rampa). Solução de projeto? O controlador $G_c(s)$ deve ter ao menos um integrador e a especificação E1 será atendida prontamente

Controlador PID e LR – Exemplo

E2 – Se o controlador ter ao menor um integrador, então $e_{ss} < \infty$ (para entrada rampa $R(s) = 1/s^2$). Note que do teorema do valor final tem-se

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s + sG_c(s)G(s)} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s)} = \frac{1}{Kv}$$

Como $e_{ss}(\infty) = \frac{1}{K_v}$, a constante de velocidade é $K_v = \frac{1}{e_{ss}(\infty)} = \frac{1}{0.25} \geq 4$.

Então: $K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) \geq 4$

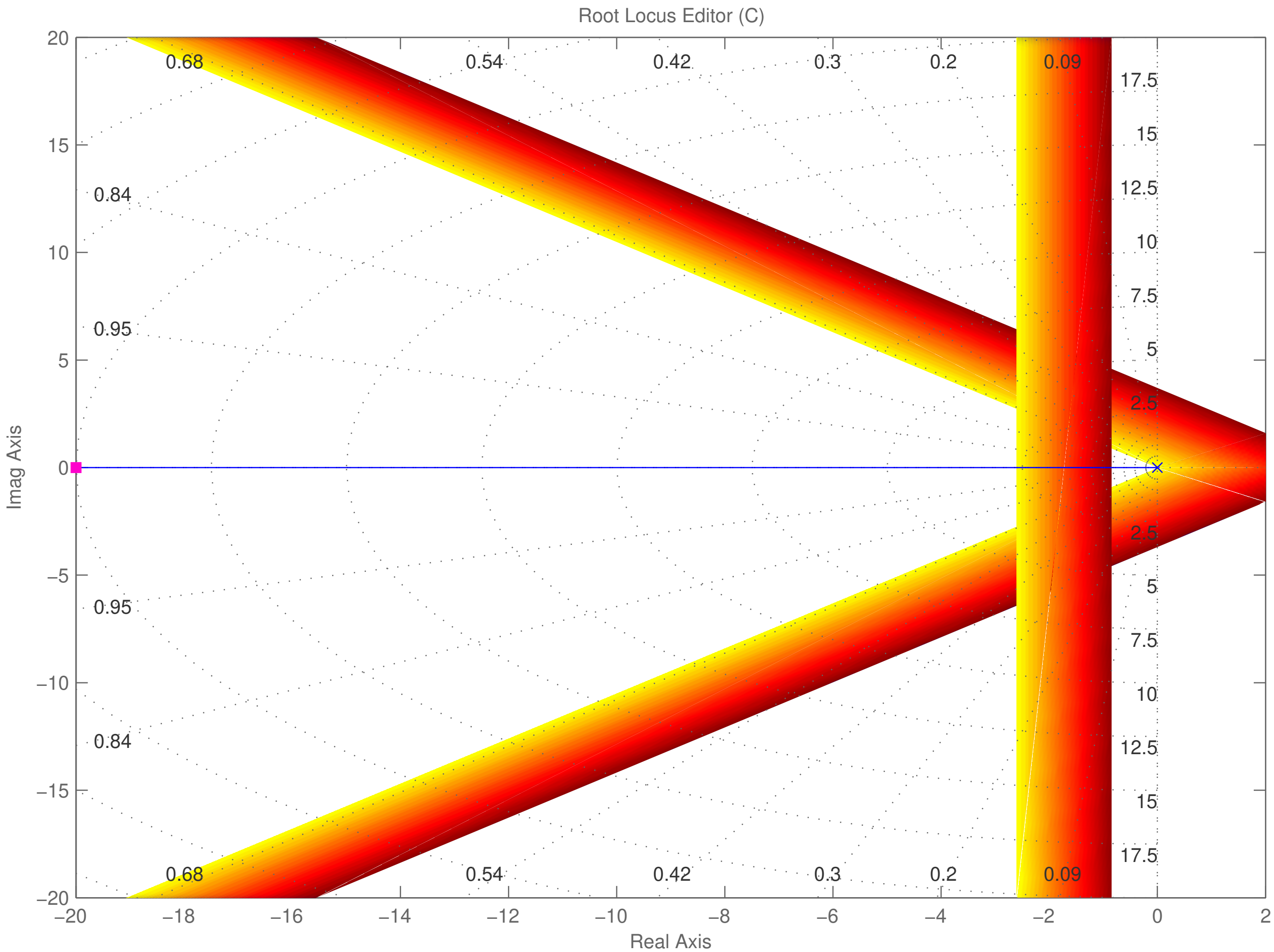
E3 – Da especificação de sobre-elevação $M_p \leq 5\% \Rightarrow \zeta \geq 0.69$

E4 – Da especificação de tempo de acomodação

$$t_a \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 1.5 \Rightarrow \zeta \omega_n \geq 2.66$$

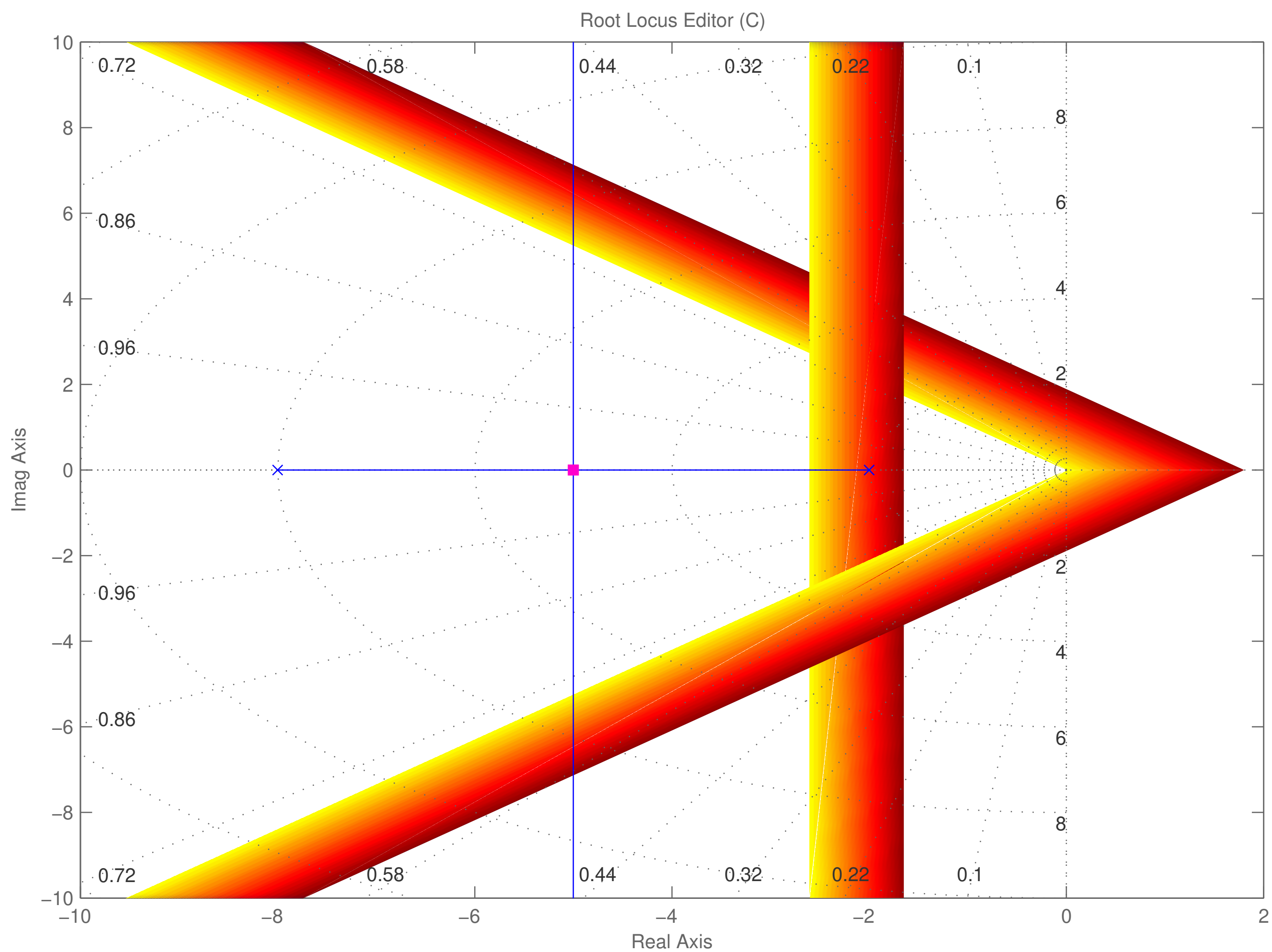
Controlador PID e LR – Exemplo

▷ Região desejada para alocar os polos em malha fechada ?



Controlador PID e LR – Exemplo

▷ Considerando apenas os polos da planta...



Controlador PID e LR – Exemplo

Controlador? Se $G_c = K$? Infelizmente não satisfaz as especificações E1 e E2, já que é necessário ter ao menos um integrados na malha do sistema em para garantir $e_{ss}(\infty) = 0$ para entrada degrau e $e_{ss}(\infty) \leq 0.25$ para entrada rampa

Já sabemos: O controlador deve ter ao menos um integrador. Controlador PI:

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P\, s + K_I}{s} = K_P\, \frac{s + \frac{K_I}{K_P}}{s}$$

- Onde posicionar (fixar) o zero $z = -\frac{K_I}{K_P}$? É uma escolha de projeto!
- Para quais valores de K_p e K_I o sistema é estável? FT em malha fechada

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{K_P s + K_I}{s^3 + 10s^2 + (16 + K_P)s + K_I}$$

Controlador PID e LR – Exemplo

▷ Note que do arranjo de Routh associado a EC

$$\Delta(s) = s^3 + 10s^2 + (16 + K_P)s + K_I = 0$$

tem-se

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K_P + 16 \\ s^2 & 10 & K_I \\ s^1 & c_3 & \\ s^0 & K_I & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ c_3 = \frac{10(K_P + 16) - K_I}{10} > 0 \right.$$

$$\begin{aligned} K_I &> 0 \\ K_P &> \frac{K_I}{10} - 16 \end{aligned}$$

Controlador PID e LR – Exemplo

- Da especificação E2 (com $K_v \geq 4$) obtém-se

$$
\begin{aligned}
K_v &= \lim_{s\to 0} s\, G_c(s) G(s) \\
&= \lim_{s\to 0} \cancel{s}\, \frac{K_P s + K_I}{\cancel{s}} \, \frac{1}{(s+2)(s+8)} \\
&= \frac{K_I}{16} \\
&\geq 4
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\textbf{Portanto:} \quad K_I \geq 64}$$

Controlador PID e LR – Exemplo

▷ Note que no LR há 3 polos ($s = 0, -2, -8$) e 1 zero finito ($s = \frac{-K_I}{K_P}$). Então dois ramos seguirão para dois zeros em infinito ao longo de duas assíntotas com ângulos $\phi = 90^0$ e -90^0 e centradas em

$$\sigma_A = \frac{\sum(-p_i) - \sum(-z_i)}{n - M} = \frac{-2 - 8 - \left(-\frac{K_I}{K_P}\right)}{3 - 1} = -5 + \frac{1}{2}\frac{K_I}{K_P}$$

▷ Da restrição de tempo de acomodação tem-se $-\zeta\omega_n \leq -2.66$, então:

$$-5 + \frac{1}{2}\frac{K_I}{K_P} \leq -2.66$$

ou

$$\boxed{\frac{K_I}{K_P} \leq \frac{14}{3} = 4.66}$$

Controlador PID e LR – Exemplo

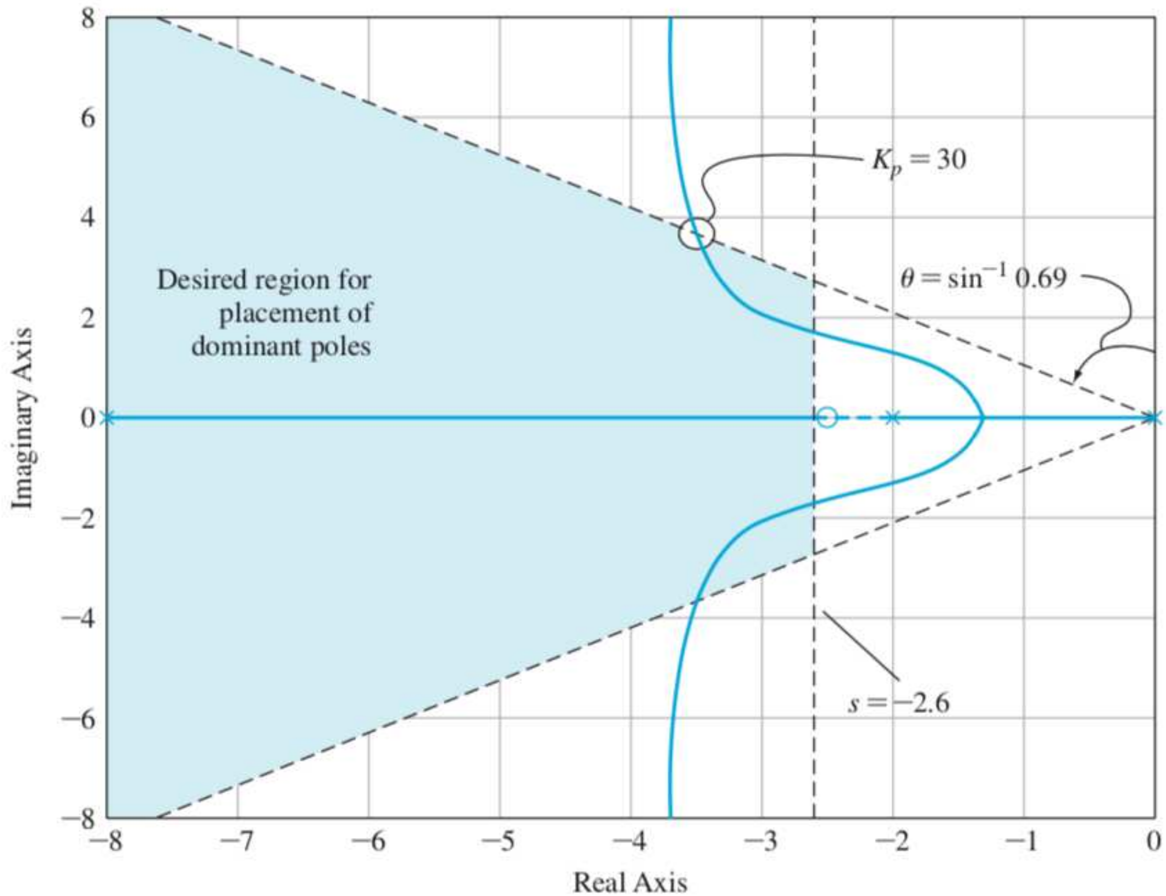
▷ Então, como uma primeira tentativa, pode-se selecionar K_P e K_I tais que

$$\boxed{\begin{array}{c} K_I > 64 \\[2em] K_P > \dfrac{K_I}{10} - 16 \\[2em] \dfrac{K_I}{K_P} < 4.66 \end{array}}$$

▷ Suponha que se escolha $\frac{K_I}{K_P} = 2.5$ (Lembre-se que $z = -K_I/K_P$, então de fato estamos escolhendo onde posicionar o zero do controlador PI)

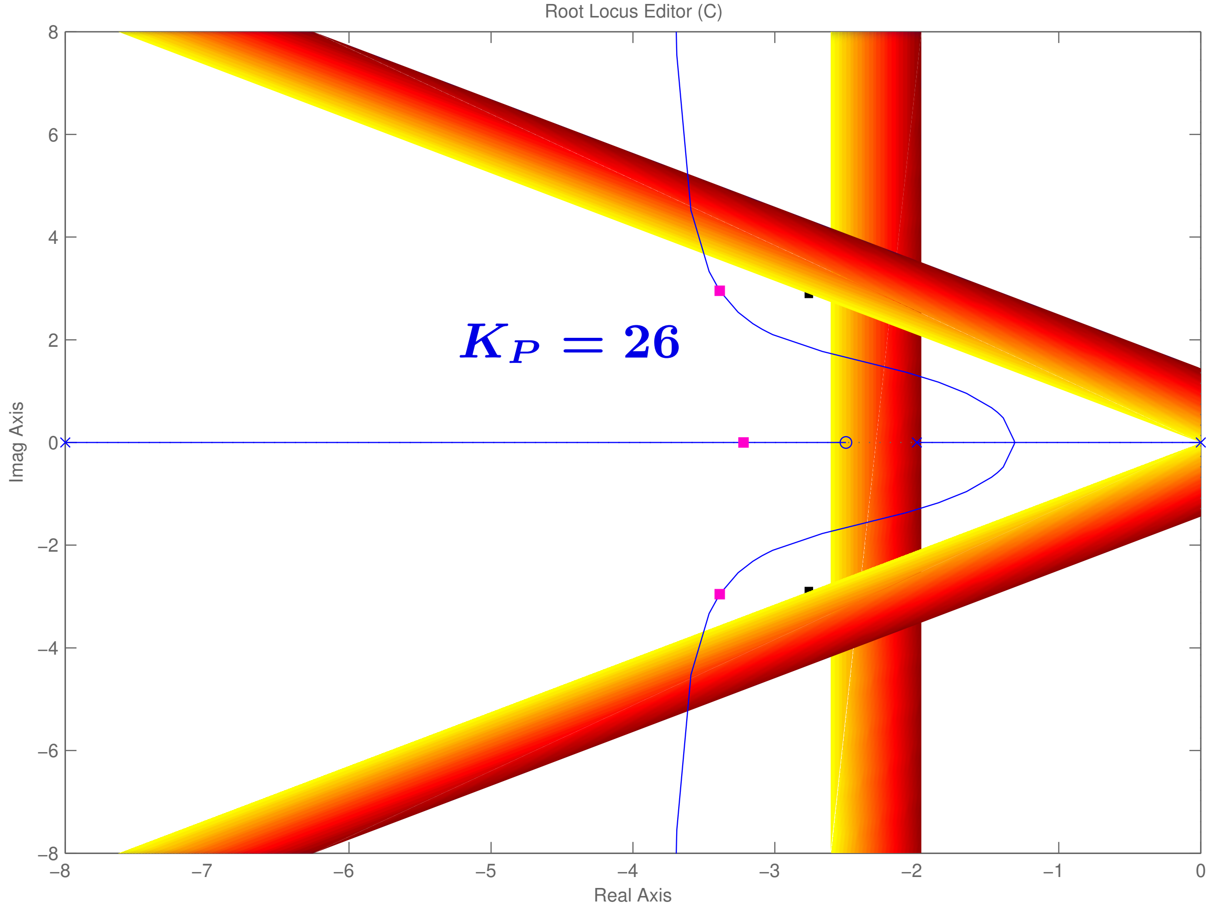
Controlador PID e LR – Exemplo

Neste caso a EC é: $\Delta(s) = 1 + K_P \dfrac{(s+2.5)}{s(s+2)(s+8)} = 0$



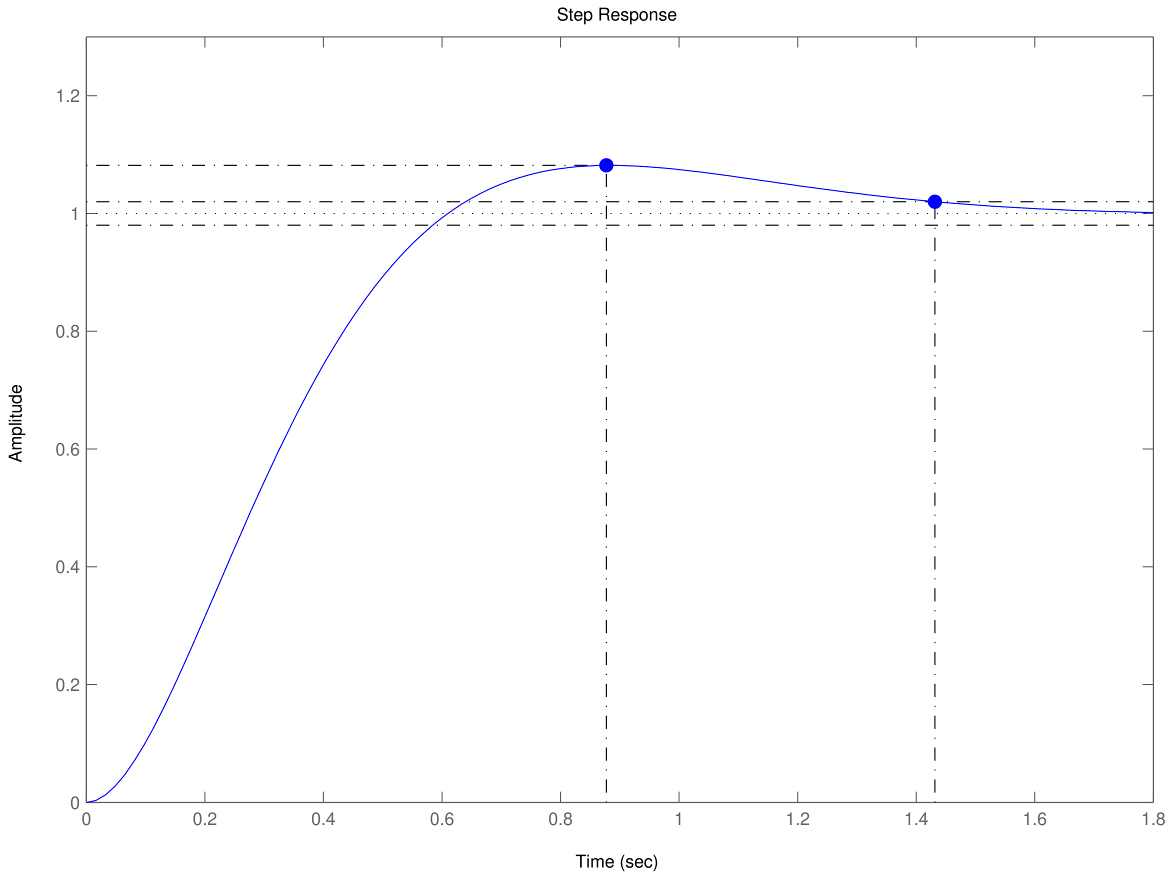
Controlador PID e LR – Exemplo

Escolhendo um polo s em malha fechada na região desejada, aplica-se a condição de módulo, i.e., $\left| K_P \frac{(s+2.5)}{s(s+2)(s+8)} \right|_{s=\blacksquare} = 1$ para obter K_P



Controlador PID e LR – Exemplo

▷ Selecionando $K_P = 26$ então de $K_I/K_P = 2.5$ obtém-se $K_I = 65$. A resposta ao degrau em malha fechada é mostrada abaixo com $M_p = 8\%$ e $t_a = 1.43$s



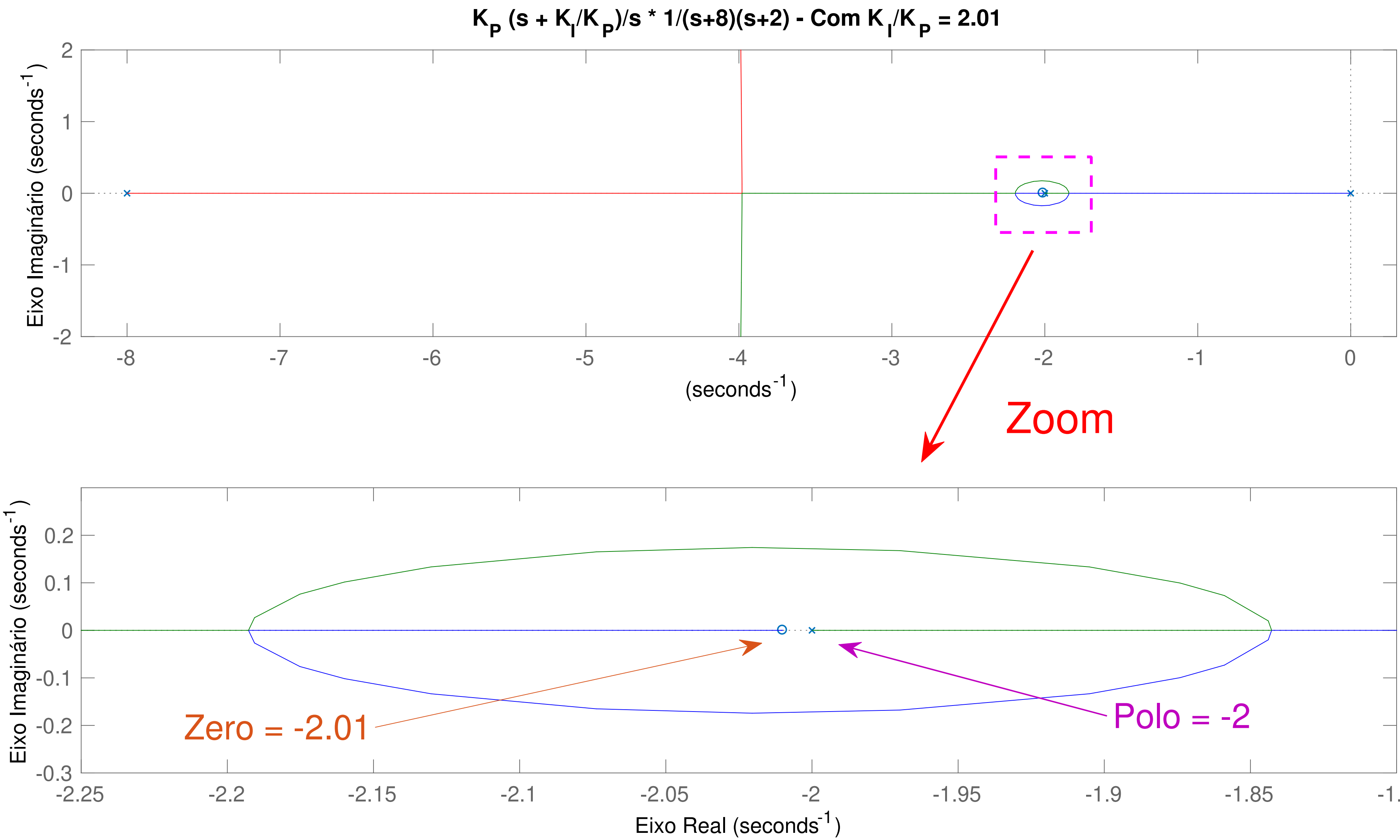
Controlador PID e LR – Exemplo

▷ Pode-se interativamente refinar o projeto para garantir as especificações desejadas já que, de fato, o sistema em malha fechada é um sistema de $\mathbf{3}$a. ordem e não tem exatamente o desempenho de um de $\mathbf{2}$a. ordem. Opções de refinamento: 1) alterar o ganho K_P selecionando um novo ponto do LR na região desejada; 2) escolher um novo valor para o zero do controlador PI (implica em um novo traçado para o LR)

▷ Uma estratégia: pode-se escolher o zero do controlador PI em $-\mathbf{2}$ (i.e., $K_I/K_P = \mathbf{2}$) tal que o polo em $-\mathbf{2}$ seja cancelado, resultando assim em um sistema de $\mathbf{2}$a. ordem e, provavelmente, deve-se garantir as especificações

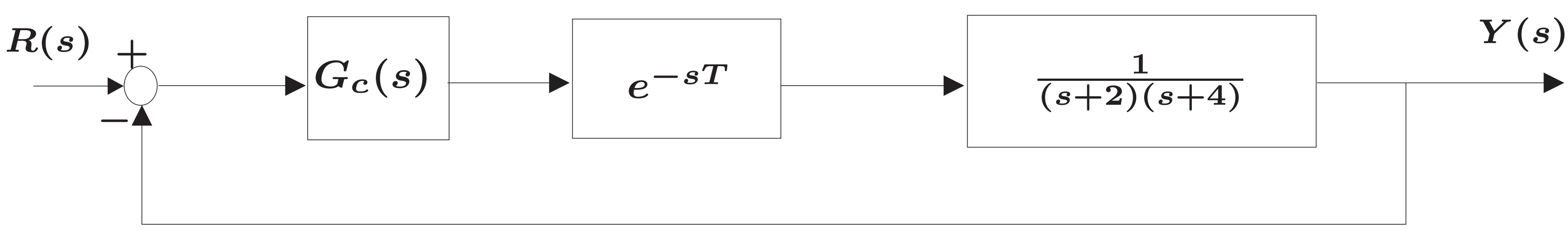
▷ Note que apesar da estratégia anterior ser relativamente fácil deve-se, no entanto, ter em mente que é válida apenas para o modelo matemático da planta, i.e., se o modelo não representar de forma adequada a planta, poderá não ocorrer o efeito (de cancelamento) desejado

Curiosidade: se $K_I/K_P = 2.01$?



Exercício Computacional – Sirva-se sozinho...

Para o mesmo sistema de Navegação Autônoma, projete um controlador $G_c(s)$ que garanta as especificações E1, E3 e E4 quando o sistema apresenta um atraso na atuação do controlador (i.e., retardo no tempo e^{-sT}), como descrito na figura abaixo. Suponha que o retardo no tempo seja $T = 0.25$s. Além disso, considere que o retardo no tempo possa ser aproximado por uma FT de 2a. ordem usando a função pade do Matlab (Note que a proximação de Padé introduzirá dois zeros no semi-plano direito e dois polos no semi-plano esquerdo)



Projeto sequencial: leitura de um acionador de disco

▷ Para o projeto de controle do acionador de disco, note que o modelo do *drive* já possui um integrador. Neste caso vamos considerar um **controlador PD,** $G_c = K_P + K_D s$

▷ Função de transferência do ganho em malha aberta:

$$G_c(s)G_1(s)G_2(s) = \frac{5000(K_P + K_D s)}{s(s+20)(s+1000)} = \frac{5000K_D(s+z)}{s(s+20)(s+1000)}$$

sendo que o zero do controlador, $z = K_P/K_D$, é escolhido *a priori*

▷ Selecionando, por exemplo, $z = 1$ obtém-se

$$G_c(s)G_1(s)G_2(s) = \frac{5000K_D(s+1)}{s(s+20)(s+1000)}$$

Selecione K_D via LR e depois obtenha $K_P = z \times K_D$, com $z = 1$ dado

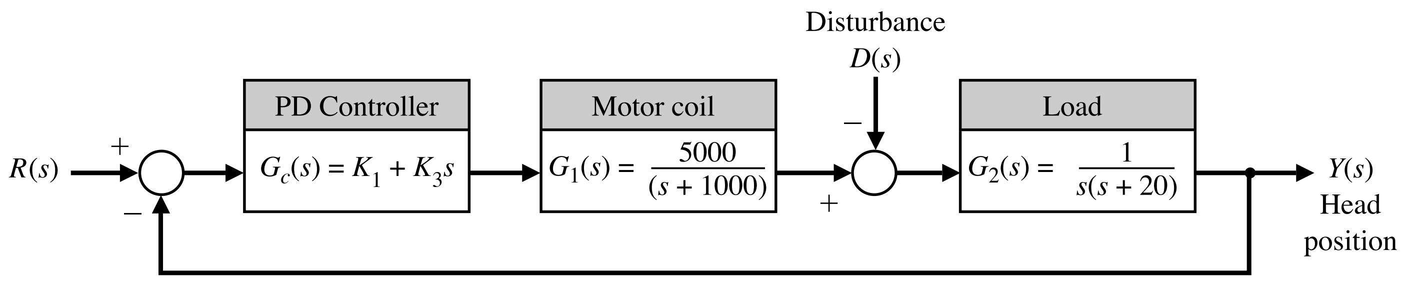


Figure 7.45 Disk drive control system with a PD controller

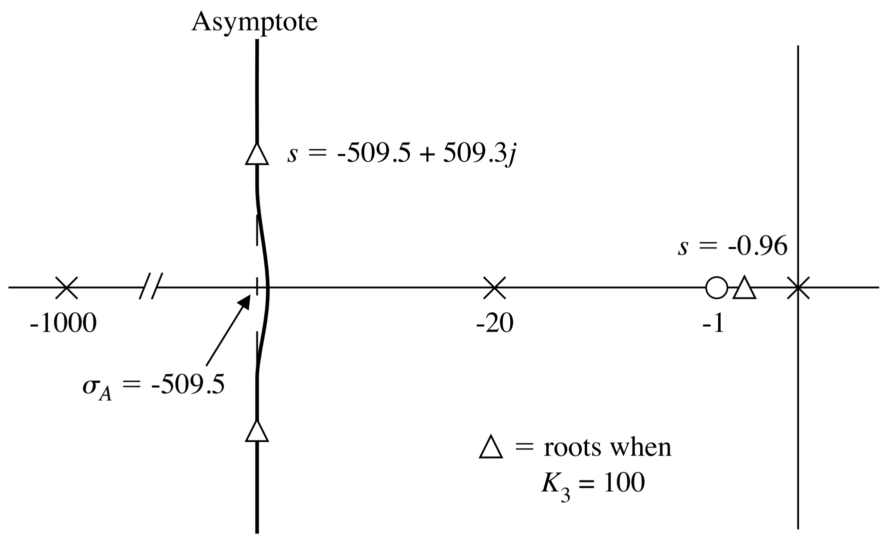


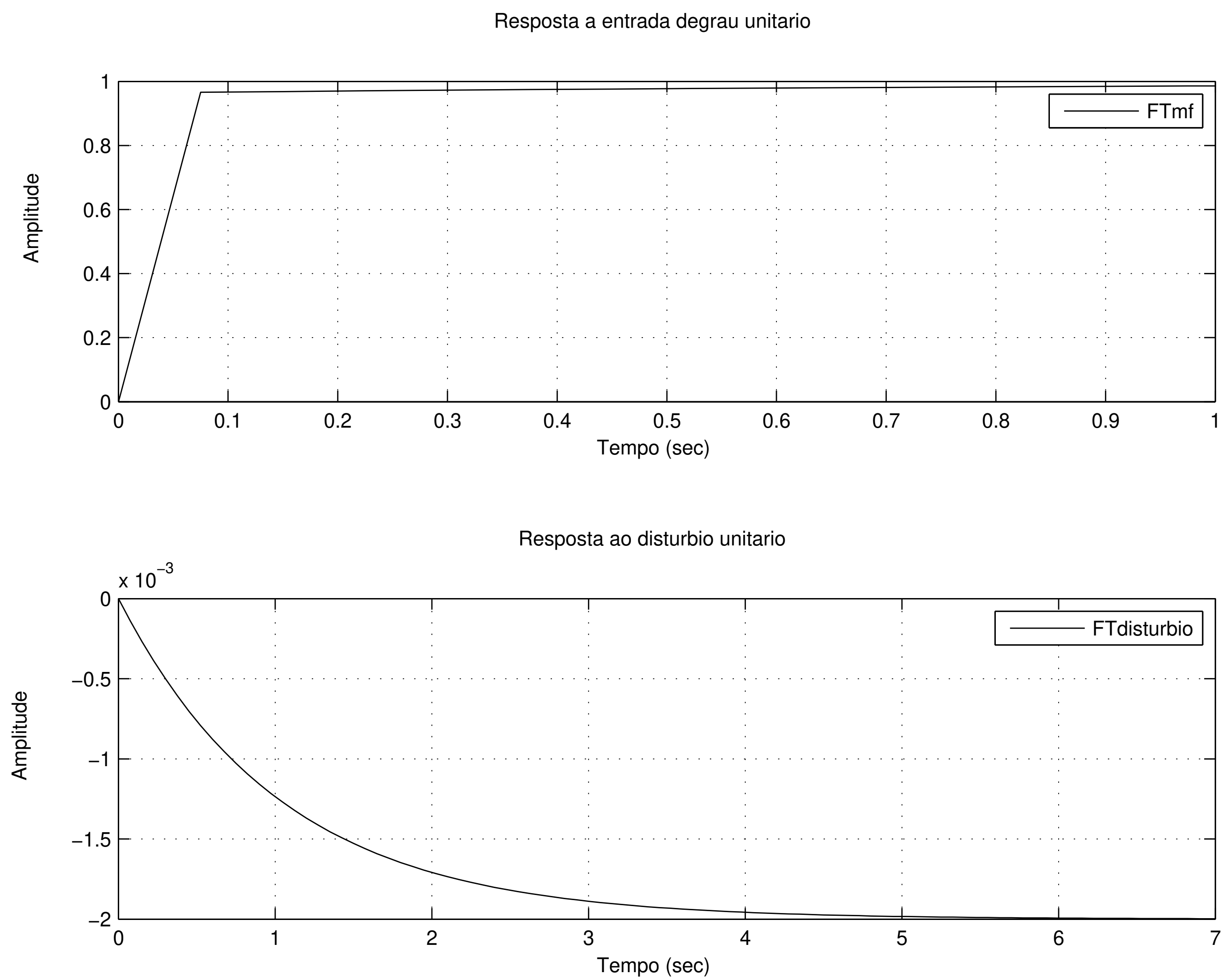
Figure 7.46 Sketch of the root locus

Simulação da Resposta Temporal em Malha Fechada – HD

▷ Usando MATLAB© para avaliar: *(a)* a resposta de $r(t)$ para $y(t)$; *(b)* a máxima resposta ao distúrbio unitário $d(t)$ para $y(t)$.

```
z=1; Kd=100; Kp=z*Kd;
s=tf('s')                                  % variável "s"
g1=tf([5000],[1 1000])                     % G1(s)
g2=tf([1],[conv([1 0],[1 20])])            % G2(s)
gc=Kd*s+Kp                                 % Controlador PD
FTmf=(gc*g1*g2)/(1+(gc*g1*g2))             % FT malha fechada R->Y
FTdisturbio=(-g2)/(1+(gc*g1*g2))           % FT malha fechada D->Y
subplot(2,1,1)
step(FTmf)
subplot(2,1,2)
step(FTdisturbio)
```

Resposta Temporal em Malha Fechada – HD



Exemplo de Circuito para PID Analógico

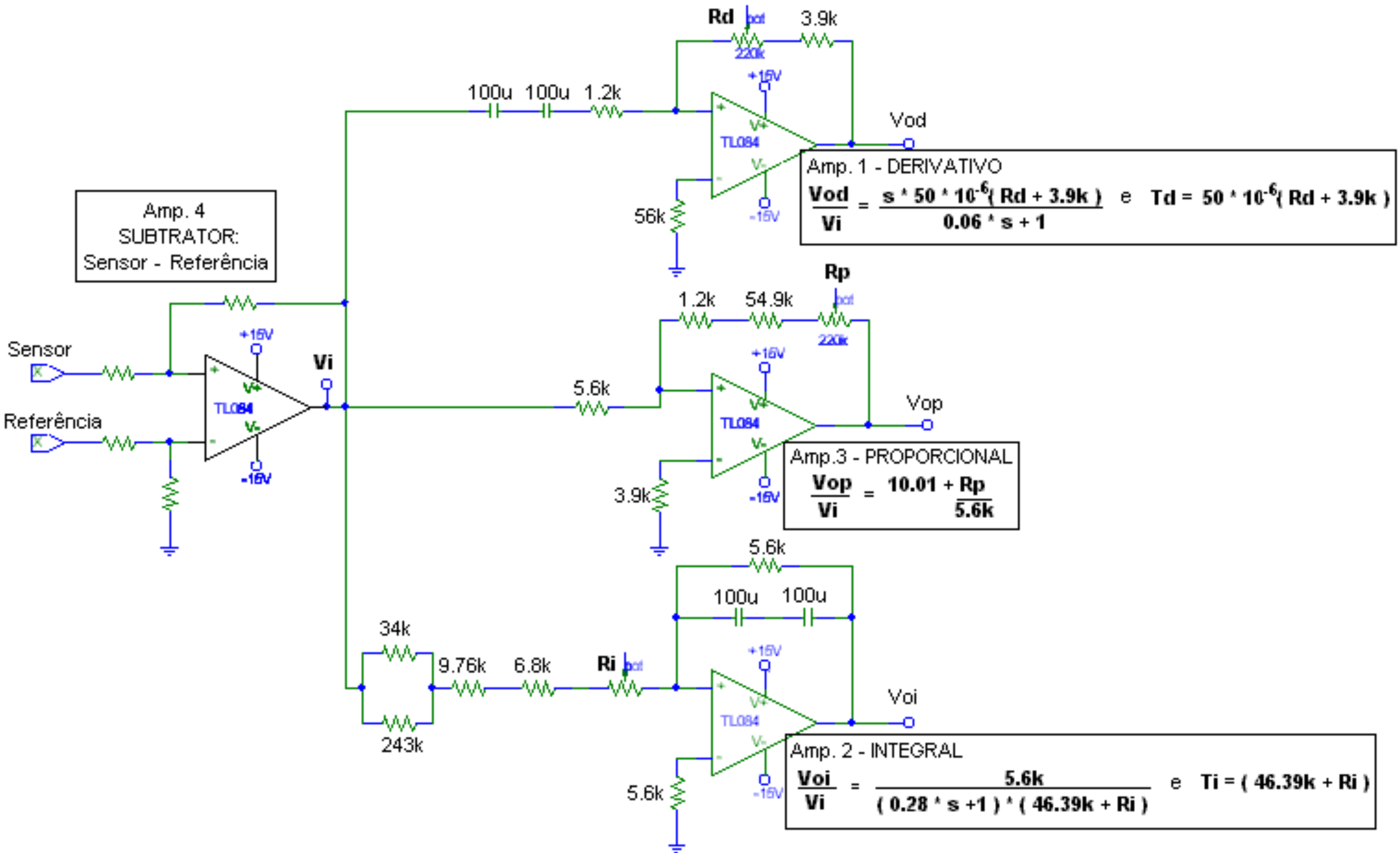
▷ Na próxima lâmina tem-se o circuito para um PID analógico que é utilizado para o controle de um processo térmico úmido no Laboratório de Controle da UFMG. Após o subtrator, tem-se o sinal do erro de rastreamento $e(t)$ que irá realimentar, em paralelo, a parcela Proporcional, Integral e Derivativa do PID e o resultado, após ser somado, é transmitido ao atuador

▷ Note que o ajuste "fino" para cada um dos ganhos do controlador PID pode ser feito usando os respectivos potenciômetros (R_p, R_i e R_d, vide circuito)

▷ Observe também que o sinal de controle gerado pelo PID para o atuador é:

$$u(t) = K_P \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t)dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

sendo que T_i é denominado tempo integrativo e T_d tempo derivativo. Grosso modo pode-se ter então $K_I = \frac{K_P}{T_i}$ e $K_D = K_P T_d$. A sintonia do controlador pode ser também realizada usando um dos métodos de Ziegler-Nichols – vide o livro texto para detalhes sobre estes métodos


Rd
pot
220k
3.9k
100u
100u
1.2k
+15V
TL084
V+
V-
-15V
56k
Vod
Amp. 1 - DERIVATIVO
Vod / Vi = s * 50 * 10-6(Rd + 3.9k) / 0.06 * s + 1 e Td = 50 * 10-6(Rd + 3.9k)
Amp. 4
SUBTRATOR:
Sensor - Referência
Sensor
Referência
Vi
Rp
1.2k
54.9k
5.6k
3.9k
Vop
Amp.3 - PROPORCIONAL
Vop / Vi = 10.01 + Rp / 5.6k
5.6k
100u
100u
34k
243k
9.76k
6.8k
Ri
Voi
Amp. 2 - INTEGRAL
Voi / Vi = 5.6k / (0.28 * s +1) * (46.39k + Ri) e Ti = (46.39k + Ri)