UFMG
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MINAS GERAIS

Teoria de Sistemas Lineares

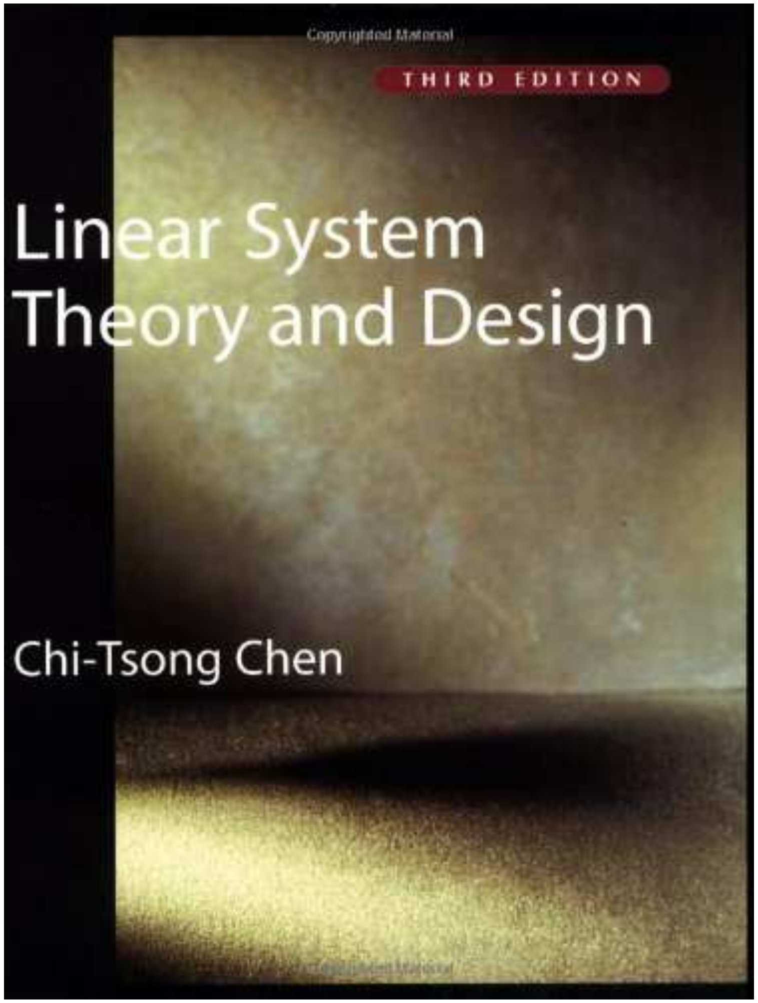
Prof. Reinaldo Martínez Palhares

Contato: Sala 2605 (BLOCO 1) — mailto: rpalhares@ufmg.br

www.cpdee.ufmg.br/∼palhares/TeoriaSistemasLineares.html

Bibliografia Básica

Livro Texto – Chi-Tsong Chen, Linear System Theory and Design, 3rd ed., Oxford University Press, 1999.



Extras

- Artigos em periódicos e outros livros no tema
- Há farto material na web envolvendo o tema

Aspectos Burocráticos

Avaliações

- Três provas de 30 pontos cada – Datas?
- Trabalho Computacional – 10 pontos

(Pré-)Requisitos Desejáveis

- Noções de controle clássico e moderno (+ para moderno)
- Conceitos iniciais de Sinais e Sistemas

Motivação e Contexto

Sistema: " é um ajuntamento ou conjunto de elementos combinados, pela natureza ou pelo homem, de modo a formar um todo integrado e complexo". É uma definição que acontece em várias disciplinas como: engenharia, biologia, medicina, direito, sociologia, antropologia, história, ciências políticas, informática, administração, economia & finanças; na natureza como um todo, etc.

Teoria de Sistemas: é o estudo das interações e comportamento de tal conjunto de elementos quando sujeito a certas condições ou entradas. A natureza abstrata da teoria de sistemas é devido ao fato que está relacionado com propriedades matemáticas mais do que com a forma "física ou *conceitual*" das partes que o compõem

Motivação e Contexto

- Estudo de sistemas físicos descritos por modelos lineares (o que é isso?)

$\rightsquigarrow$ É razoável descrever (aproximar) diferentes tipos de sistemas físicos como sendo lineares em determinadas faixas de operação

$\rightsquigarrow$ O estudo pode ser sistematizado (via Álgebra Linear)

$\looparrowright$ Computacionalmente bastante eficientes

$\looparrowright$ Extensões para sistemas físicos não lineares?

- Há aspectos qualitativos e quantitativos envolvidos

Motivação e Contexto

Especificamente...

Dado um modelo linear do sistema a ser avaliado e um conjunto de especificações, encontrar uma ação *adequada* que altere o desempenho do mesmo de forma satisfatória

Aplicações

- Engenharias: Elétrica, Mecânica, de Sistemas, Aeronáutica ...
- Sistemas de Controle Automático; Análise, Simulação e Projeto de Circuitos
- Comunicações; Processamento de Sinais; Navegação
- Economia & Finanças

Métodos Empíricos

- Aplicação de várias entradas e observação das saídas
  - $\rightarrowtail$ requer experiência do projetista (tentativa e erro...)
  - $\rightarrowtail$ sistemas de grande dimensão ou complexos, o que fazer?

- Apesar de métodos empíricos serem uma linha metodológica que povoa diferentes disciplinas na graduação, não faz parte do escopo deste curso

Motivação e Contexto

Estudo Analítico

- Modelagem
- Descrição Matemática
- Análise do Modelo
- Projeto

Motivação e Contexto

Modelagem

- Distinção entre sistemas físicos e modelos

- Resistor linear com resistência constante (modelo válido dentro de certos limites de potência); indutor com indutância constante é um modelo (a indutância pode variar com a corrente)

- Enfim, dependendo do contexto pode-se ”elaborar” modelos diferentes para um mesmo sistema físico (um satélite pode ser modelado como um corpo rígido ou um corpo flexível)

Motivação e Contexto

Descrição Matemática

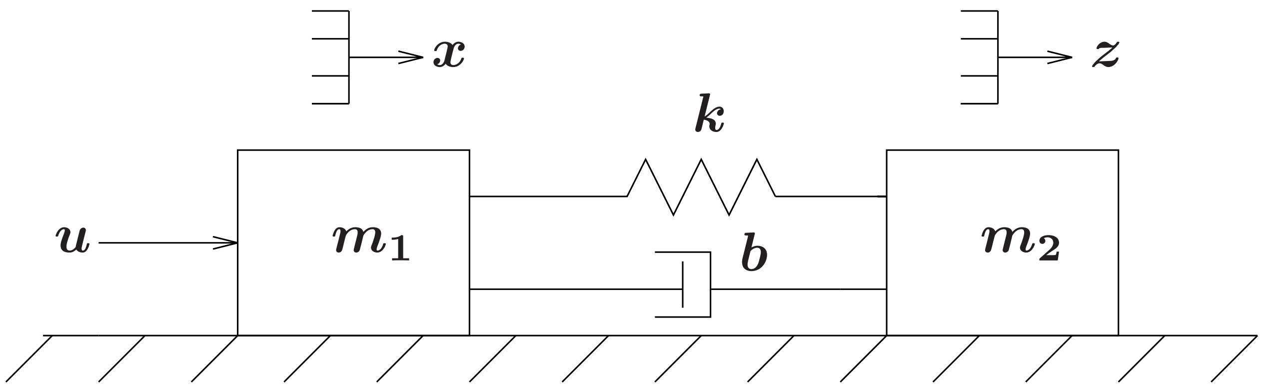
- Uma vez definido um modelo para um sistema físico, aplicam-se as leis da física para se obter uma descrição matemática do sistema

- Modelagem Física: baseada nas Leis de Newton (sistemas mecânicos), Leis de Kirchhoff (tensão e corrente em circuitos elétricos), leis da Termodinâmica, etc.

- Modelagem Experimental: baseada em relações entrada-saída (modelos por séries temporais: por exemplo, modelos auto-regressivos de médias móveis (em inglês: Auto-Regressive Moving Average ou ARMA))

Motivação e Contexto

Considere o sistema massa-mola com atrito viscoso:



As equações do movimento podem ser obtidas pela Lei de Newton: $F = ma$

F: resultante das forças que agem sobre o corpo; a: aceleração relativa a uma referência inercial ; m_i: massa dos corpos

Motivação e Contexto

Sistema de equações diferenciais:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_1}(\dot{x} - \dot{z}) + \frac{k}{m_1}(x - z) = \frac{u}{m_1}$$

$$\ddot{z} + \frac{b}{m_2}(\dot{z} - \dot{x}) + \frac{k}{m_2}(z - x) = 0$$

$\rightsquigarrow$ Molas e amortecedores modelados como elementos lineares

$\rightsquigarrow$ Com as equações, pode-se determinar o comportamento do sistema (isto é, as posições x, z e as velocidades $\dot{x}$, $\dot{z}$) para qualquer força externa u aplicada

Descrição por Variáveis de Estado:

Definem-se: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $z_1 = z$ e $z_2 = \dot{z}$, obtendo-se as equações lineares vetoriais de primeira ordem:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

Descrição por Função de Transferência

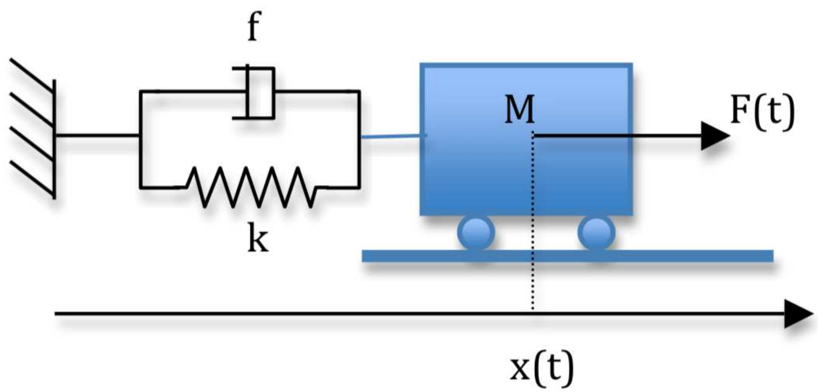
Aplicando a Transformada de Laplace (com condições iniciais nulas) tem-se:

$$s^2X(s) + \frac{b}{m_1}s(X(s) - Z(s)) + \frac{k}{m_1}(X(s) - Z(s)) = \frac{1}{m_1}U(s)$$

$$s^2Z(s) + \frac{b}{m_2}s(Z(s) - X(s)) + \frac{k}{m_2}(Z(s) - X(s)) = 0$$

e obtêm-se as relações $\dfrac{X(s)}{U(s)}$ e $\dfrac{Z(s)}{U(s)}$

Outro exemplo em espaço de estados...



Da segunda Lei de Newton tem-se o empilhamento das equações diferenciais:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F(t)$$

Ou, definindo as variáveis de estado $x_1 = x$ e $x_2 = \dot{x}$, obtém-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -f \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

Análise do Modelo

Quantitativo: cálculo das respostas para determinadas entradas; verificação da acuidade do modelo

Qualitativo: propriedades gerais do sistema como estabilidade, controlabilidade e observabilidade; permite o desenvolvimento de técnicas de projeto

Motivação e Contexto

Projeto

$\rightsquigarrow$ Se o comportamento do sistema, embora fiel ao modelo descrito, é insatisfatório tendo em vista certas especificações de desempenho desejadas, é necessário projetar uma ação que leve o sistema a apresentar as características desejadas.

Tópicos Principais

- Álgebra linear
- Sistemas lineares com entradas e saídas; espaço de estado
- Estabilidade, controlabilidade e observabilidade
- Controle e Estimação

Ferramentas Computacionais

MATLAB

Scilab