

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

MODELOS E MÉTODOS DE TOMADA DE DECISÃO PARA
APOIO À GESTÃO ESTRATÉGICA EM EMPRESAS

Júlio Cesar Braz de Queiroz

Belo Horizonte
2009

Júlio Cesar Braz de Queiroz

**MODELOS E MÉTODOS DE TOMADA DE DECISÃO PARA
APOIO À GESTÃO ESTRATÉGICA EM EMPRESAS**

**Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como
requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia
Elétrica**

Orientador: Petr Iakovlevitch Ekel

Co-Orientador: Reinaldo Martinez Palhares

Belo Horizonte

2009

Júlio Cesar Braz de Queiroz

Modelos e métodos de tomada de decisão para apoio à gestão em empresas

Tese de Doutorado, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, 2009

Petr Iakovlevitch Ekel (Orientador) - UFMG

Reinaldo Martinez Palhares (Co-Orientador) - UFMG

João Antônio de Vasconcelos - UFMG

Rodney Rezende Saldanha - UFMG

Adiel Teixeira de Almeida - UFPE

Carlos Francisco Simões Gomes - IBMEC RJ

*A meus pais, em memória,
verdadeiros merecedores dos frutos de seu fruto.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, nosso Senhor, por ter iluminado este longo e árduo caminho, e pelas bênçãos que tem derramado sobre a minha família.

A meu orientador, Petr Iakovlevitch Ekel, exemplo de simplicidade e sabedoria, pela dedicação incansável e preocupação com o sucesso deste empreendimento, mesmo diante de todas as adversidades que enfrentou.

Ao meu co-orientador, Reinaldo Martinez Palhares, pelo respaldo técnico e apoio logístico para a superação das dificuldades.

Aos senhores doutores, membros da banca examinadora, por suas críticas construtivas e contribuições no direcionamento e definição do escopo do trabalho.

A colega Roberta Parreiras, pela parceria no desenvolvimento dos artigos.

A minha esposa e filha, pela compreensão e carinho nos inúmeros momentos de ausência, mesmo presente.

Aos colaboradores da CEMIG, que forneceram subsídios e valiosas informações para o desenvolvimento do trabalho, em especial para os exemplos de aplicação.

A todos que contribuíram e incentivaram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

*“O cavalo prepara-se para o dia da
batalha, mas a vitória vem do Senhor.”
Provérbios, 21, 31*

RESUMO

Este trabalho apresenta um amplo estudo sobre os problemas enfrentados pelas empresas que adotam a metodologia *Balanced ScoreCard* em suas atividades de gestão estratégica, especialmente nos processos de tomada de decisão. Como forma de minimizar os impactos da introdução desta metodologia, que aumenta o universo de dados e informações a ser analisado e ainda introduz incertezas ao ambiente, são apresentadas várias formas de representação das preferências dos decisores sobre as alternativas de solução dos problemas, através de modelos quantitativos e qualitativos, estes últimos fundamentados na teoria de conjuntos *fuzzy*. Para viabilizar o processamento das informações em diferentes estruturas, são utilizadas funções de transformação que reduzem essas estruturas a uma única base, qual seja, relações de preferência *fuzzy*. A preparação das informações para a tomada de decisão é realizada em duas etapas: aplicação de métodos para agregação das preferências e ordenação das alternativas de solução. São consideradas situações para a tomada de decisão multicritério individual e em grupo. Para situações de grupo, em particular, são apresentados esquemas de consenso, com destaque para a participação de um grupo moderador nos processos supervisionados. Ampliando a perspectiva de escolha da melhor alternativa, é proposta uma metodologia para análise da qualidade da solução, através do conceito de soluções harmoniosas. Neste sentido, é realizado um estudo sobre as combinações de operadores de agregação e ordenação com a posterior análise dos resultados, com destaque para a utilização do operador *min* para agregação das preferências e do operador *max* para a ordenação de alternativas. Como cenário para esse estudo, foi utilizada a prática de tomada de decisão na gestão estratégica de empresas de energia elétrica, em particular na Companhia Energética de Minas Gerais. Finalmente, o trabalho apresenta um protótipo computacional, no qual são implementadas as técnicas, abordagens, modelos e métodos desenvolvidos.

Palavras-chave: Gestão Estratégica, Metodologia *Balanced ScoreCard*, Tomada de Decisão Multicritério em Ambiente *Fuzzy*, Tomada de Decisão em Grupo, Empresas de Energia Elétrica.

ABSTRACT

This work presents a wide study on the problems faced by the companies that adopt the Balanced ScoreCard methodology in its activities of strategic management, especially in the decision making processes. As form of minimizing the impacts of the introduction of this methodology, that increases the universe of data and information to be analyzed and still introduces uncertainties to the environment, several forms of representation of decision makers' preferences over problem solution alternatives are presented, through quantitative and qualitative models, these last ones based on the fuzzy set theory. To make possible the processing information in different structures, transformation functions are used to reduce those structures to a unique base, that is, fuzzy preference relationships. The preparation of information for decision making is accomplished in two stages: application of methods for aggregating preferences and ordering solution alternatives. Situations for individual and group multicriteria decision making are considered. For group situations, in particular, consensus schemes are presented, with prominence for the participation of a moderator in supervised processes. Enlarging the perspective of the best alternative choice, a methodology is proposed for analysis of solution quality through the concept of harmonious solutions. In this sense, a study is accomplished on combinations of aggregation and ordering operators, with a posterior analysis of the results, with distinction for the use of *min* operator for preferences aggregation and *max* operator for alternatives ordering. As a scenario for this study, the practice of decision making in the strategic management of electric energy companies, in particular of the Minas Gerais State Energy Company, has been used. Finally, the work presents a computational prototype, in which the developed techniques, approaches, models and methods are implemented.

Key words: Strategy Management, Balanced ScoreCard Methodology, Multicriteria Decision Making in Fuzzy Environment, Group Decision Making, Electric Energy Companies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Evolução dos modos de atuação das empresas	25
Figura 2: A inflexão estratégica pretendida pela CEMIG com a implantação do Plano Diretor.....	30
Figura 3: Mapa estratégico da CEMIG distribuição - ciclo 2006 – 2010	30
Figura 4: Esquema do processo de tomada de decisão	36
Figura 5: Gráficos das Funções de Utilidade	64
Figura 6: Gráfico das Funções de Pertinência.....	65
Figura 7: Gráfico dos Quantificadores linguísticos.....	81
Figura 8: Esquema geral da tomada de decisão monocritério individual.....	104
Figura 9: Esquema geral da tomada de decisão monocritério em grupo.....	106
Figura 10: Esquema geral da tomada de decisão multicritério individual	107
Figura 11: Esquema geral da tomada de decisão multicritério em grupo	111
Figura 12: Diagrama geral de um processo de tomada de decisão	128
Figura 13: Evolução dos pesos de cada especialista na construção do consenso	134
Figura 14: Gráfico de evolução do Grau de Harmoniosidade	143
Figura 15: Principais componentes de um DSS.....	210
Figura 16: Tela de abertura do 2MDMS.....	212
Figura 17: Dados iniciais de um cenário pré-definido	213
Figura 18: Interface para entrada de dados iniciais de novos cenários	214
Figura 19: Interface para escolha da estrutura de modelagem de preferências	214
Figura 20: Interface para entrada de dados para as estruturas	215
Figura 21: Apresentação das preferências reduzidas a Relações de Preferência <i>Fuzzy</i>	216
Figura 22: Métodos de agregação	217
Figura 23: Quantificador linguístico	217
Figura 24: Interface para definição dos coeficientes de importância	218
Figura 25: Interface para seleção do operador de ordenação	218
Figura 26: Interface para definição da necessidade de construção de consenso	218
Figura 27: Interface para definição dos parâmetros de consenso	219

Figura 28: Interface para entrada de parâmetros para a abordagem Autocrática	219
Figura 29: Evolução das iterações na construção de consenso segundo a abordagem autocrática	220
Figura 30: Histórico de alterações dos coeficientes de importância sobre os especialistas na construção de consenso segundo a abordagem autocrática.....	220
Figura 31: Comportamento do grau de harmoniosidade da solução	221
Figura 32: Interface com o usuário para manter as preferências sobre determinados critérios	221
Figura 33: Interface com o grupo moderador para a condução da construção de consenso segundo a abordagem supervisionada	222

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Classificação dos métodos para solução de problemas MODM.....	39
Tabela 2 - Critérios de ordenação levando em conta a média e o desvio padrão	98
Tabela 3 - Ordem das preferências e alternativas por especialista.....	129
Tabela 4 - Consenso sobre cada alternativa e de grupo	129
Tabela 5 - Ordenação das preferências e alternativas com a exclusão de um especialista.	130
Tabela 6 - Níveis de consenso considerando a exclusão de um especialista	131
Tabela 7 - Ordenação das preferências e alternativas com a exclusão do especialista 1	131
Tabela 8 - Contribuição de cada especialista na opinião do grupo.....	131
Tabela 9 - Evolução dos pesos sobre cada especialista, a cada iteração	132
Tabela 10 - Construção do consenso com base na Abordagem Autocrática.....	143
Tabela 11 - Características do processo com aplicação da Abordagem Autocrática.....	144

LISTA DE SIGLAS

AHP - *Analytic Hierarchy Process*

BSC - *Balanced ScoreCard*

CEMIG - *Companhia Energética de Minas Gerais*

DDM - *Diálogo, Dados e Modelagem*

DSS - *Decision Support Systems*

ELECTRE - *Élimination Et Choix Traduisant la Réalité*

ERP - *Enterprise Resource Planning*

FLOWA - *Fuzzy Linguistic Ordered Weighted Averaging*

LOWA - *Linguistic Ordered Weighted Averaging*

MADM - *Multi-Attribute Decision Making*

MCDM - *Multiple-Criteria Decision Making*

MODM - *Multi-Objective Decision Making*

OWA - *Ordered Weighted Averaging*

PROMETHEE - *Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations*

2MDMS - *Multiperson Multicriteria Decision Making System*

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Justificativa	18
1.2	Objetivos	19
1.3	Escopo.....	20
1.4	Contribuições.....	22
1.5	Publicações.....	23
1.6	Organização do Trabalho.....	23
2	FUNDAMENTOS DA METODOLOGIA <i>BALANCED SCORECARD</i>.....	25
2.1	Considerações Iniciais.....	25
2.2	A Metodologia <i>Balanced ScoreCard</i>	26
2.3	Aplicações da Metodologia <i>Balanced ScoreCard</i> ao Planejamento Estratégico de Empresas de Energia Elétrica.....	29
2.4	Considerações Finais.....	31
3	MODELOS E MÉTODOS DE TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO	33
3.1	Considerações Iniciais.....	33
3.2	Processos de Tomada de Decisão	34
3.3	Modelos e Métodos de Tomada de Decisão Multicritério	36
3.3.1	<i>Modelos e Métodos MODM</i>	38
3.3.2	<i>Modelos e Métodos MADM</i>	41
3.4	Métodos da Escola Americana	45
3.5	Métodos da Escola Francesa	46
3.6	Apoio à Tomada de Decisão	49
3.7	Considerações Finais.....	51
4	CONSTRUÇÃO E UNIFORMIZAÇÃO DE PREFERÊNCIAS.....	52
4.1	Considerações Iniciais.....	52
4.2	Construção de Preferências.....	52

4.3	Construção de Preferências em Ambiente de Incerteza.....	54
4.3.1	<i>Considerações Gerais</i>	<i>54</i>
4.3.2	<i>Análise e Comparação de Quantidades Fuzzy</i>	<i>57</i>
4.3.3	<i>Relações de Preferência Fuzzy.....</i>	<i>60</i>
4.3.4	<i>Função de Pertinência de Relação de Preferência Fuzzy Generalizada</i>	<i>61</i>
4.3.5	<i>Exemplo de Aplicação</i>	<i>62</i>
4.4	Uniformização das Preferências	72
4.4.1	<i>Exemplo de Aplicação</i>	<i>74</i>
4.5	Considerações Finais.....	76
5	TOMADA DE DECISÃO EM AMBIENTE FUZZY INDIVIDUAL E EM GRUPO.....	78
5.1	Considerações Iniciais.....	78
5.2	Agregação de Preferências	78
5.2.1	<i>Exemplo de Aplicação</i>	<i>85</i>
5.3	Ordenação de Alternativas.....	97
5.3.1	<i>Exemplo de Aplicação</i>	<i>100</i>
5.4	Tomada de Decisão Monocritério Individual.....	103
5.5	Tomada de Decisão Monocritério em Grupo	104
5.6	Tomada de Decisão Multicritério Individual	106
5.7	Tomada de Decisão Multicritério em Grupo.....	110
5.7.1	<i>Exemplo de Aplicação</i>	<i>112</i>
5.8	Considerações Finais.....	118
6	CONSTRUÇÃO DE CONSENSO SOBRE ALTERNATIVAS.....	120
6.1	Considerações Iniciais.....	120
6.2	Técnicas para a Construção de Consenso.....	120
6.3	Abordagens para a Construção de Consenso	123
6.3.1	<i>Abordagem Autocrática.....</i>	<i>123</i>
6.3.2	<i>Abordagem Interativa.....</i>	<i>124</i>
6.3.3	<i>Outras Abordagens.....</i>	<i>125</i>
6.4	Uma Nova Abordagem para a Construção de Consenso	126
6.5	Exemplo de Aplicação.....	129

6.6	Considerações Finais.....	139
7	ANÁLISE DA QUALIDADE NA TOMADA DE DECISÃO	140
7.1	Considerações Iniciais.....	140
7.2	Metodologia Proposta para Análise da Qualidade da Solução.....	140
7.2.1	<i>Exemplo de Aplicação</i>	142
7.3	Qualidade da Solução versus Operadores de Agregação e Ordenação	147
7.3.1	<i>Agregação pelo Operador Soma e Ordenação pelo Operador Soma</i>	148
7.3.2	<i>Agregação pelo Operador Soma e Ordenação pelo Operador Máximo</i>	151
7.3.3	<i>Agregação pelo Operador Soma e Ordenação pelo Operador Média e Desvio Padrão</i>	153
7.3.4	<i>Agregação pelo Operador Soma e Ordenação pelo Operador Grau de Não-Dominância</i>	156
7.3.5	<i>Análise dos Resultados da Utilização do Operador de Agregação Soma</i>	158
7.3.6	<i>Agregação pelo Operador OWA e Ordenação pelo Operador Soma</i>	159
7.3.7	<i>Agregação pelo Operador OWA e Ordenação pelo Operador Máximo</i>	162
7.3.8	<i>Agregação pelo Operador OWA e Ordenação pelo Operador Média e Desvio Padrão</i>	165
7.3.9	<i>Agregação pelo Operador OWA e Ordenação pelo Operador Grau de Não-Dominância</i>	168
7.3.10	<i>Análise dos Resultados da Utilização do Operador de Agregação OWA</i>	169
7.3.11	<i>Agregação pelo Operador Mínimo e Ordenação pelo Operador Soma</i>	170
7.3.12	<i>Agregação pelo Operador Mínimo e Ordenação pelo Operador Máximo</i>	174
7.3.13	<i>Agregação pelo Operador Mínimo e Ordenação pelo Operador Média e Desvio Padrão</i>	178
7.3.14	<i>Agregação pelo Operador Mínimo e Ordenação pelo Operador Grau de Não-Dominância</i>	182
7.3.15	<i>Análise dos Resultados da Utilização do Operador de Agregação Mínimo</i> ...	185
7.3.16	<i>Agregação pelo Operador Produto e Ordenação pelo Operador Soma</i>	187
7.3.17	<i>Agregação pelo Operador Produto e Ordenação pelo Operador Máximo</i>	190
7.3.18	<i>Agregação pelo Operador Produto e Ordenação pelo Operador Média e Desvio Padrão</i>	194

7.3.19	<i>Agregação pelo Operador Produto e Ordenação pelo Operador Grau de Não-Dominância.....</i>	198
7.3.20	<i>Análise dos Resultados da Utilização do Operador de Agregação Produto...</i>	202
7.3.21	<i>Análise Global.....</i>	203
7.4	Considerações finais.....	204
8	SISTEMAS DE APOIO A DECISÕES	206
8.1	Considerações Iniciais.....	206
8.2	Conceitos	207
8.3	Características	207
8.4	Tipos	208
8.5	Componentes	209
8.6	Protótipo de DSS Desenvolvido.....	210
8.6.1	<i>Tela de Abertura</i>	212
8.6.2	<i>Entrada de Dados Iniciais.....</i>	212
8.6.3	<i>Modelagem das Preferências</i>	214
8.6.4	<i>Escolha do Método de Agregação.....</i>	216
8.6.5	<i>Escolha do Método de Ordenação</i>	218
8.6.6	<i>Escolha da Abordagem de Consenso.....</i>	218
8.7	Considerações Finais.....	222
9	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	224
9.1	Conclusões.....	224
9.2	Trabalhos Futuros.....	225
10	BIBLIOGRAFIA	228

1 INTRODUÇÃO

O planejamento estratégico em empresas de médio e grande porte é uma atividade complexa, de grande responsabilidade, na qual profissionais de diversas áreas devem estabelecer as diretrizes a serem seguidas, considerando os objetivos estratégicos, as limitações de recursos financeiros e humanos, e principalmente as incertezas do cenário em que estão inseridos. Dessa forma, as empresas buscam fundamentar os seus procedimentos em metodologias consolidadas e aumentar a efetividade das decisões tomadas através da utilização de ferramentas de apoio para a elaboração do planejamento estratégico e para o acompanhamento das ações decorrentes desse planejamento. Entretanto, a diversidade de metodologias e ferramentas computacionais de aplicação geral, torna difícil a escolha e na maioria das vezes os recursos empregados não são capazes de atender plenamente todos os requisitos das organizações em suas necessidades.

Este trabalho está associado à solução dos problemas enfrentados pelas empresas que utilizam a metodologia *Balanced ScoreCard* (BSC) em sua gestão estratégica. Essas empresas têm constatado baixo desempenho em suas atividades de planejamento e execução, e uma possível explicação para esta situação está associada à ausência de modelos e métodos adequados e eficientes, e correspondentes ferramentas computacionais que permitam resolver os problemas relacionados à aplicação da metodologia. Muitos desses problemas estão relacionados à tomada de decisão, procedimento crítico e presente em várias etapas do planejamento estratégico, que apresentam múltiplos critérios, múltiplas alternativas de solução, envolvem pessoas com formação e interesses distintos e apresentam incertezas nas informações. Diante disso, emergem três questões fundamentais: a modelagem das informações (apreciações e preferências das pessoas envolvidas no processo decisório); a consideração das incertezas (informações incompletas e inconsistentes); e o processamento das informações (agregação das preferências sobre as alternativas e ordenação das alternativas de solução do problema).

Para aprofundar sobre a questão da modelagem das informações, foi realizada uma ampla abordagem sobre os modelos de representação das preferências humanas, momento inicial da tomada de decisão, no qual as pessoas envolvidas devem escolher a melhor forma para expressar as suas preferências sobre o conjunto de alternativas disponíveis para a solução do problema. Para tal, são apresentadas diferentes estruturas de modelagem, de natureza quantitativa e também qualitativa.

A consideração das incertezas presentes nas informações, é realizada através dos fundamentos da teoria dos conjuntos *fuzzy*, que possui uma estrutura flexível e permite processar as incertezas das apreciações humanas, incorporando mais consistência aos modelos propostos. Desta forma, as relações de preferência *fuzzy* são utilizadas como base para a modelagem final e o processamento das informações.

No processamento das informações, foram considerados diversos métodos de tomada de decisão individual e em grupo, monocritério e multicritério, em ambiente de incerteza. A aplicação desses métodos é fundamentada sobre a análise das alternativas, realizada em duas etapas: a primeira processa a agregação das preferências sobre as alternativas, levando em conta as preferências individuais e de grupo, bem como um ou mais critérios; a segunda realiza a ordenação das alternativas no conjunto de soluções possíveis, com base na intensidade das preferências. São apresentadas ainda, técnicas para construção de consenso e proposta uma metodologia para análise da qualidade das soluções obtidas.

Finalmente, é importante ressaltar que apesar dos exemplos apresentados estarem relacionados ao setor de energia elétrica, os resultados da presente tese podem ser aplicados em empresas de outros setores que utilizam a metodologia BSC ou outras metodologias semelhantes.

1.1 Justificativa

Considerando os aspectos teóricos da tomada de decisão, o levantamento bibliográfico permitiu encontrar um grande número de publicações, proporcionado farto material para o embasamento conceitual sobre as técnicas e abordagens utilizadas. Entretanto, a maioria dos trabalhos enfoca a construção de modelos e a aplicação de métodos, sem aprofundar sobre questões importantes como a eficácia e a eficiência das metodologias propostas. Diante disso, surgiu a motivação de realizar uma análise crítica sobre esses modelos e métodos, a fim de escolher os que apresentaram, segundo os autores, boa aceitação, aplicabilidade demonstrada, simplicidade de implementação e eficácia nos resultados obtidos. Foram identificadas também, algumas deficiências metodológicas que subsidiaram a elaboração de propostas de melhoria, apresentadas neste trabalho.

Considerando os aspectos práticos da tomada de decisão na gestão estratégica, a adoção da metodologia BSC introduziu novas variáveis aos cenários analisados e a ampliação do número de perspectivas consideradas, com o objetivo principal de ampliar a visão dos negócios,

permitindo um acompanhamento dinâmico das iniciativas estratégicas implementadas. A inclusão destes novos elementos aumentou não somente a dimensão do universo de dados considerado, mas também as incertezas e as dificuldades para a elaboração e manutenção do planejamento estratégico. Portanto, a utilização da metodologia BSC na gestão estratégica provocou mudanças substanciais nas tecnologias adotadas pelas empresas em suas práticas, principalmente as práticas relacionadas ao planejamento estratégico. Este trabalho visa atender a uma demanda dessas empresas, que diante das transformações ocorridas em seus processos de planejamento e decisórios, decorrentes da adoção da metodologia BSC, buscam fundamentos e ferramentas capazes de suportar estas atividades, aumentando não somente a eficiência na elaboração de seus planejamentos, mas principalmente a eficácia das ações tomadas.

A escolha de cenários associados a problemas enfrentados pelas empresas do setor energético, tratados nos exemplos, foi motivada por uma demanda tecnológica apresentada pela Companhia Energética de Minas Gerais - CEMIG, no segmento de Distribuição, associada ao desenvolvimento de novos materiais, equipamentos, metodologias, ferramentas e instalações piloto para gestão empresarial, de inovação e normalização técnica. Os resultados obtidos neste trabalho utilizaram informações disponibilizadas pela empresa e outros trabalhos futuros estão previstos.

1.2 Objetivos

A presente tese tem como objetivo amplo e geral o desenvolvimento, análise e aplicação de modelos, métodos e algoritmos eficientes para a tomada de decisão multicritério em grupo, dedicados ao apoio à solução plena e justificada dos problemas de gestão estratégica decorrentes da aplicação da metodologia BSC.

De modo especial, o trabalho abrange os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver e aperfeiçoar os modelos e métodos de análise multicritério em ambiente *fuzzy*, usando critérios tanto de caráter quantitativo quanto qualitativo, para a avaliação e/ou comparação de alternativas e ordenação das alternativas;

- Analisar os diversos tipos de operadores aplicáveis à agregação de preferências e a ordenação de alternativas e justificar a escolha de operadores que garantam as soluções mais harmoniosas;
- Propor e estudar uma metodologia para medição e avaliação da qualidade das soluções obtidas, com base no conceito de soluções harmoniosas;
- Propor e analisar uma nova conduta para a atuação de um grupo moderador sobre o processo de tomada de decisão em grupo, tornando a sua participação mais efetiva e produtiva na construção de consenso;
- Apresentar um protótipo de sistema computacional para apoiar e justificar as decisões tomadas por especialistas em cenários complexos;
- Aplicar os resultados do desenvolvimento do trabalho para os problemas típicos gerados pela utilização da metodologia BSC na gestão estratégica.

1.3 Escopo

Diante das numerosas possibilidades, técnicas e abordagens aplicáveis à tomada de decisão é importante e necessário apresentar os caminhos escolhidos, bem como os limites da pesquisa e aplicações. Dessa forma, o escopo da presente tese está relacionado a:

- Conceitos e fundamentos básicos da metodologia BSC e suas aplicações ao planejamento estratégico;
- Modelos e métodos de tomada de decisão multicritério e os métodos das tradicionais Escolas Americana ou Francesa;
- Abordagens para a construção de preferências, em especial as técnicas associadas a Esquema de Ordenação, Relação de Preferência Multiplicativa, Função de Utilidade,

Relações de Preferência *Fuzzy*, Função de Pertinência de Relação de Preferência *Fuzzy* Generalizada;

- Conceitos fundamentais da teoria de conjuntos *fuzzy*;
- Funções de transformação de estruturas de preferências em Relações de Preferência *Fuzzy*, em especial as estruturas mencionadas acima;
- Métodos de agregação de preferências, em especial as técnicas baseadas nos operadores Soma, Média Ponderada dos Argumentos Ordenados OWA, Mínimo e Produto;
- Métodos de ordenação de alternativas, em especial as técnicas baseadas nos operadores Soma, Máximo, Média e Desvio Padrão, e Grau de Dominância;
- Abordagens para a tomada de decisão monocritério e multicritério, individual e em grupo, com enfoque especial sobre a tomada de decisão multicritério em grupo;
- Esquemas para a construção de consenso, em especial as abordagens Autocrática e Interativa, e ainda a proposta de uma nova abordagem;
- Introdução de uma métrica para avaliação da qualidade da tomada de decisão, com base nos conceitos de harmoniosidade;
- Desenvolvimento de uma ferramenta computacional para apoio à tomada de decisão em estágio protótipo.
- Aplicação dos modelos e métodos estudados em exemplos associados aos problemas enfrentados pelo planejamento estratégico, decorrentes da utilização da metodologia BSC.

1.4 Contribuições

Como contribuição ampla deste trabalho, podemos destacar o desenvolvimento de fundamentos metodológico, informativo e computacional para a análise adequada e efetiva dos problemas de tomada de decisão multicritério, individual e em grupo, associados ao apoio na resolução dos problemas relacionados ao planejamento estratégico realizado nas empresas.

Como contribuições específicas, podemos relacionar:

- A consideração dos fatores multicritério e de incertezas na análise dos indicadores utilizados na gestão estratégica, como forma de aumentar a qualidade, efetividade e eficiência dos processos de tomada de decisão;
- A introdução de uma nova tecnologia para a representação de preferências, baseada no conceito de função de pertinência da relação de preferência *fuzzy* generalizada, e sua respectiva função de transformação para redução a relação de preferência *fuzzy* tradicional;
- A demonstração da possibilidade e da efetividade da presença de um grupo moderador para a condução do processo de tomada de decisão em grupo, com autonomia para interferir em vários pontos na construção de consenso;
- A proposição de uma métrica para avaliar a qualidade da solução, segundo os conceitos de soluções harmoniosas;
- A demonstração de que a utilização do operador Mínimo, para agregação de preferências e Máximo, para ordenação de alternativas, proporciona soluções mais harmoniosas;
- O desenvolvimento de uma ferramenta para apoio à tomada de decisão, com a implementação computacional dos modelos, métodos e técnicas desenvolvidos;
- A ampliação do escopo de temas abordados nas linhas de pesquisa conduzidas pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de

Minas Gerais, em particular com a inclusão de aspectos metodológicos e sistêmicos da tomada de decisão em práticas de planejamento estratégico;

- A divulgação dos conceitos e práticas, resultados do trabalho, em Publicações mundialmente reconhecidas e Congresso.

1.5 Publicações

A presente tese resultou na publicação dos seguintes trabalhos:

[2007] L.Canha, P. Ekel, J. Queiroz, F. Schuffner Neto, Models and methods of decision making in fuzzy environment and their applications to power engineering problems. **Numerical Linear Algebra with Applications**, 14(4), 369-390.

[2009] P. Ekel, J. Queiroz, R. Parreiras and R. Palhares, Fuzzy set based models and methods of multicriteria group decision making, **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, in press.

Os resultados do segundo trabalho foram apresentados em **5th World Congress of Nonlinear Analysts**, 2008, Orlando, USA.

1.6 Organização do Trabalho

O trabalho foi organizado em capítulos, cuja distribuição de conteúdo é apresentada a seguir. O Capítulo 2, introduz os conceitos e fundamentos básicos associados à metodologia BSC, apresentando em especial, a experiência da CEMIG na implantação de seu sistema corporativo e implementação da metodologia em seus processos gerenciais. O Capítulo 3, apresenta uma revisão ampla da bibliografia a respeito de modelos para a representação de informações (preferências dos decisores) e métodos de processamento de informações, associados à tomada de decisão. O Capítulo 4, aborda os conceitos e técnicas para a construção de preferências, direcionando em especial para algumas abordagens tradicionais, os conceitos fundamentais da teoria de conjuntos *fuzzy*, aplicados ao contexto de algumas representações e

processamentos utilizados, e ainda os conceitos e técnicas para a transformação de diferentes estruturas de representação de preferências em uma única base para o processamento seguinte. O Capítulo 5, explora os processos de tomada de decisão, individual e em grupo, mono e multicritério, apresentando os conceitos e técnicas para agregação de preferências e ordenação de alternativas, direcionando à apresentação e aplicação de determinados operadores. O Capítulo 6, apresenta os conceitos e técnicas para a construção de consenso, aplica algumas abordagens tradicionais e realiza a proposta de uma nova abordagem. O Capítulo 7, apresenta uma proposta para a avaliação da qualidade dos processos de tomada de decisão, com base em conceitos de harmoniosidade da solução. O Capítulo 8, discute os fundamentos e características de sistemas de apoio a decisão e apresenta a implementação de um protótipo para apoio a tomada de decisão. Finalmente, o Capítulo 9, encerra com as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTOS DA METODOLOGIA *BALANCED SCORECARD*

2.1 Considerações Iniciais

Os resultados da presente tese estão associados a duas importantes linhas de pesquisa da área de gestão estratégica: o planejamento estratégico e a tomada de decisão. Este capítulo, em particular, é dedicado a algumas questões metodológicas da primeira linha.

Na evolução temporal dos modos de atuação das empresas, ilustrada na Figura 1 [1], distinguem-se três planos: Operacional, Tático e Estratégico.

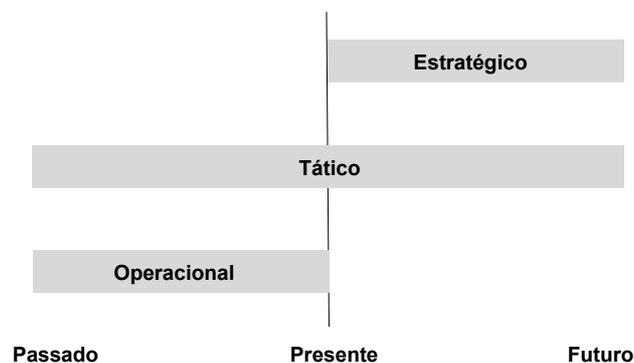


Figura 1: Evolução dos modos de atuação das empresas
Fonte: Apresentação realizada pela Petroquímica Triunfo no Fórum SAP 2006

No passado, o sucesso dos empreendimentos era determinado pelas habilidades nos planos tático e operacional, ou seja, alocação rápida dos recursos e tecnologias para aproveitar as oportunidades das economias de escala. Durante esse período, os sistemas de controle financeiro foram suficientes e eficazes nas tarefas de facilitar e monitorar a alocação de capital financeiro e físico. Entretanto, com a disponibilidade e o crescimento da influência da informação nos setores produtivo e gerencial, muitas das premissas fundamentais associadas a esta dinâmica tornaram-se ineficientes e obsoletas. Este fato foi confirmado por Reis em sua dissertação [2], na qual relata que as empresas não conseguem mais obter vantagens competitivas sustentáveis apenas com a rápida alocação de novas tecnologias a ativos físicos e com a excelência da gestão eficaz dos ativos e passivos financeiros. Segundo ele, uma das formas de adequar este modelo da

contabilidade financeira é ampliá-lo de modo que incorpore a avaliação dos ativos intangíveis e intelectuais de uma empresa.

O presente mostra uma preocupação crescente das empresas no sentido de aperfeiçoar seus sistemas de informação e buscar meios para aumentar a eficiência e a eficácia das ações que são suportadas por estes sistemas. Nas questões que envolvem o planejamento estratégico, em particular, destaca-se a metodologia *Balanced ScoreCard* (BSC).

2.2 A Metodologia *Balanced ScoreCard*

Já na década de 90, os norte-americanos mostravam-se preocupados com o desempenho de suas organizações, pois os métodos existentes, apoiados em indicadores contábeis e financeiros, estavam se tornando obsoletos.

Acadêmicos e executivos estudaram, pesquisaram e desenvolveram um modelo que considera os objetivos no curto e longo prazo, medidas financeiras e não financeiras, indicadores de performance e as perspectivas interna e externa do desempenho empresarial. A síntese desse modelo foi concebida por Robert S. Kaplan, professor da *Harvard Business School* e David P. Norton, presidente da *Renaissance Solutions*, em 1992. O objetivo inicial era apenas mostrar as desvantagens de usar somente medidas financeiras para julgar o desempenho empresarial e incentivar as empresas a medir também fatores como qualidade e satisfação do cliente. Entretanto, a grande aceitação levou o conceito a tornar-se uma metodologia, denominada *Balanced ScoreCard* [3].

A essência da metodologia BSC é baseada na criação e manutenção de um cenário com indicadores de desempenho para representar a dinâmica dos resultados das iniciativas estratégicas desenvolvidas pela empresa. Implementada computacionalmente, pode resultar numa poderosa ferramenta que permite uma rápida e abrangente visão da situação dos negócios. Segundo Kaplan e Norton [4], três aspectos são de fundamental importância para o sucesso da aplicação da metodologia BSC nas organizações:

- A integração entre as perspectivas financeira, do cliente, da organização e dos processos, para que estas não se tornem isoladas dentro do contexto empresarial;
- O balanceamento entre os graus de importância das perspectivas;

- A visão de que a metodologia é voltada para a gestão estratégica e não somente de gestão financeira.

As quatro perspectivas citadas acima foram definidas em [5]:

- **Perspectiva Financeira** - Avalia a lucratividade da estratégia. Permite medir e avaliar os resultados que o negócio proporciona e necessita para o seu crescimento e desenvolvimento, assim como para satisfação dos seus acionistas. Entre os indicadores financeiros que podem ser considerados, constam: o retorno sobre o investimento; o valor econômico agregado; a lucratividade; o aumento de receitas; a redução de custos e outros objetivos de cunho financeiro que estejam alinhados com a estratégia. Os objetivos financeiros contemplam metas de longo prazo e a geração de retornos acima do capital investido na unidade de negócios. A aplicação da metodologia BSC permite tornar os objetivos financeiros explícitos, além de permitir ajustes entre unidades de diferentes negócios e de diferentes fases de seus ciclos de vida e crescimento.
- **Perspectiva do Cliente** - Identifica os segmentos de mercado visados e as medidas do êxito da empresa nesses segmentos. Identificar os fatores que são importantes na concepção dos clientes é uma exigência da metodologia BSC, e a preocupação desses em geral situa-se em torno de quatro categorias: tempo, qualidade, desempenho e serviço. Em termos de indicadores considerados como essências nessa perspectiva, constam: as participações de mercado; a aquisição de novos clientes; a retenção de clientes atuais; a lucratividade dos clientes e o nível de satisfação dos consumidores. Representam metas para as operações, logística, marketing e desenvolvimentos de produtos e serviços da empresa.
- **Perspectiva dos Processos Internos** - É elaborada após as perspectivas financeira e dos clientes, pois essas fornecem as diretrizes para seus objetivos. Os processos internos são as diversas atividades empreendidas dentro da organização que possibilitam realizar desde a identificação das necessidades até a satisfação dos

clientes. Abrange os processos de inovação (criação de produtos e serviços), operacional (produção e comercialização) e de serviços pós-venda (suporte ao consumidor após as vendas). A melhoria dos processos internos no presente é um indicador chave do sucesso financeiro no futuro.

- Perspectiva Aprendizado e Crescimento - Oferece a base para a obtenção dos objetivos das outras perspectivas. Com ela, identifica-se a infra-estrutura necessária para propiciar o crescimento e melhorias em longo prazo, as quais provêm de três fontes principais: pessoas, sistemas e procedimentos organizacionais. Identifica também as capacidades de que a empresa deve dispor para conseguir processos internos capazes de criar valor para clientes e acionistas. Como indicadores importantes podem ser considerados: nível de satisfação dos colaboradores; rotatividade dos colaboradores; lucratividade por colaborador, capacitação e treinamento dos colaboradores e a participação dos colaboradores com sugestões para redução de custos ou aumento de receitas.

Diversas publicações foram dedicadas aos aspectos conceituais e da aplicação da metodologia BSC nas organizações, como por exemplo [3,6-10]. Uma preocupação presente em todas elas é a necessidade de uma integração balanceada as quatro perspectivas. Os autores destacam que estas perspectivas devem estar inter-relacionadas, através de vínculos de causa e efeito, que traduzem a estratégia da empresa. Além disso, as iniciativas estratégicas desenvolvidas para atender tais perspectivas, devem ser aplicadas com graus de importância relativa, porém equitativa, a fim de resultar num desenvolvimento real e equilibrado.

A aplicação da metodologia introduz novos processos que ajudam as empresas a conectar os objetivos de longo prazo às ações de curto prazo, ou seja, a empresa é capaz de monitorar os resultados de curto prazo sob as perspectivas e avaliar a estratégia à luz do desempenho recente. Além disso, este cenário propicia modificações na estratégia em função do aprendizado em tempo real. Identificados como vetores críticos por Kaplan e Norton em [7], estes novos processos são: tradução da visão, comunicação e conexão, planejamento de negócios e *feedback* e aprendizado.

2.3 Aplicações da Metodologia *Balanced ScoreCard* ao Planejamento Estratégico de Empresas de Energia Elétrica

Entre o número bastante limitado das publicações dedicadas às aplicações da metodologia BSC em empresas de energia elétrica, é possível distinguir o trabalho [11] que diretamente está relacionado à gestão estratégica. O trabalho referenciado está associado com as questões da implantação da metodologia BSC na Cemig Distribuição S.A., que é detalhado a seguir, objetivando o melhor entendimento da dinâmica do planejamento estratégico.

A Cemig começou a mobilizar-se em 2003 quando elaborou um plano estratégico que previa, entre outras medidas, a modernização de sua solução *Enterprise Resource Planning* (ERP), implementada inicialmente em 1998. A proposta era obter não apenas avanço tecnológico, mas também atender à demanda de diversas áreas da Cemig por soluções focadas em subsidiar a tomada de decisões estratégicas e a análise de riscos. Em dezembro de 2004, foi concluída a etapa de migração do ERP para uma nova versão. Em seguida, entrou em operação a segunda fase da agregação de valor ao negócio da Cemig, por meio da implementação de soluções de apoio às decisões estratégicas baseadas na metodologia BSC.

Em 2005, a empresa assumiu um compromisso de longo prazo através da aprovação de um Plano Diretor, consolidado na alteração do seu estatuto. Tal plano estipulou metas audaciosas para os próximos 30 anos e os objetivos estratégicos da corporação somente serão alcançados mediante o gerenciamento de projetos e iniciativas estratégicas, conforme mostra a Figura 2. A seleção dessas iniciativas visa à alocação eficiente de recursos de modo a gerar o maior impacto possível sobre os resultados empresariais.

A partir das diretrizes estratégicas definidas no Plano Diretor, a Diretoria Executiva da Cemig Distribuição S.A., elaborou o seu mapa estratégico [12,13]. A Figura 3 mostra o mapa estratégico da Diretoria Executiva da Cemig Distribuição para o ciclo 2006-2010 (o correspondente mapa estratégico também foi elaborado pela Cemig Geração e Transmissão S.A.).

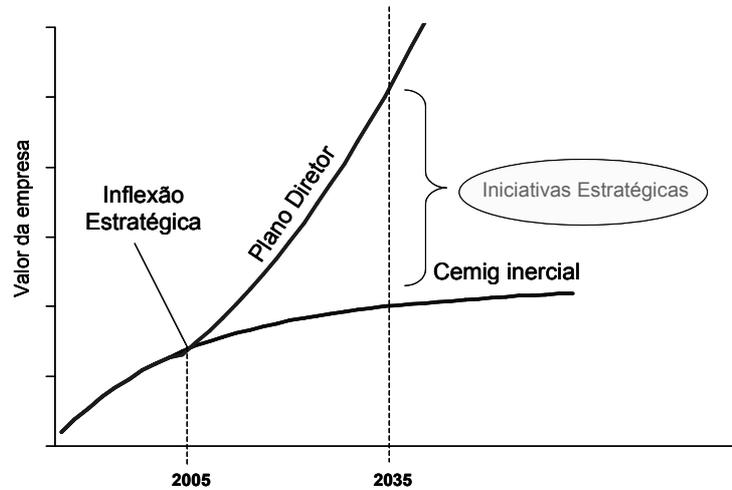


Figura 2: A inflexão estratégica pretendida pela CEMIG com a implantação do Plano Diretor
Fonte: Apresentação realizada pela Superintendência Regional da Distribuição Centro da Cemig em 2005

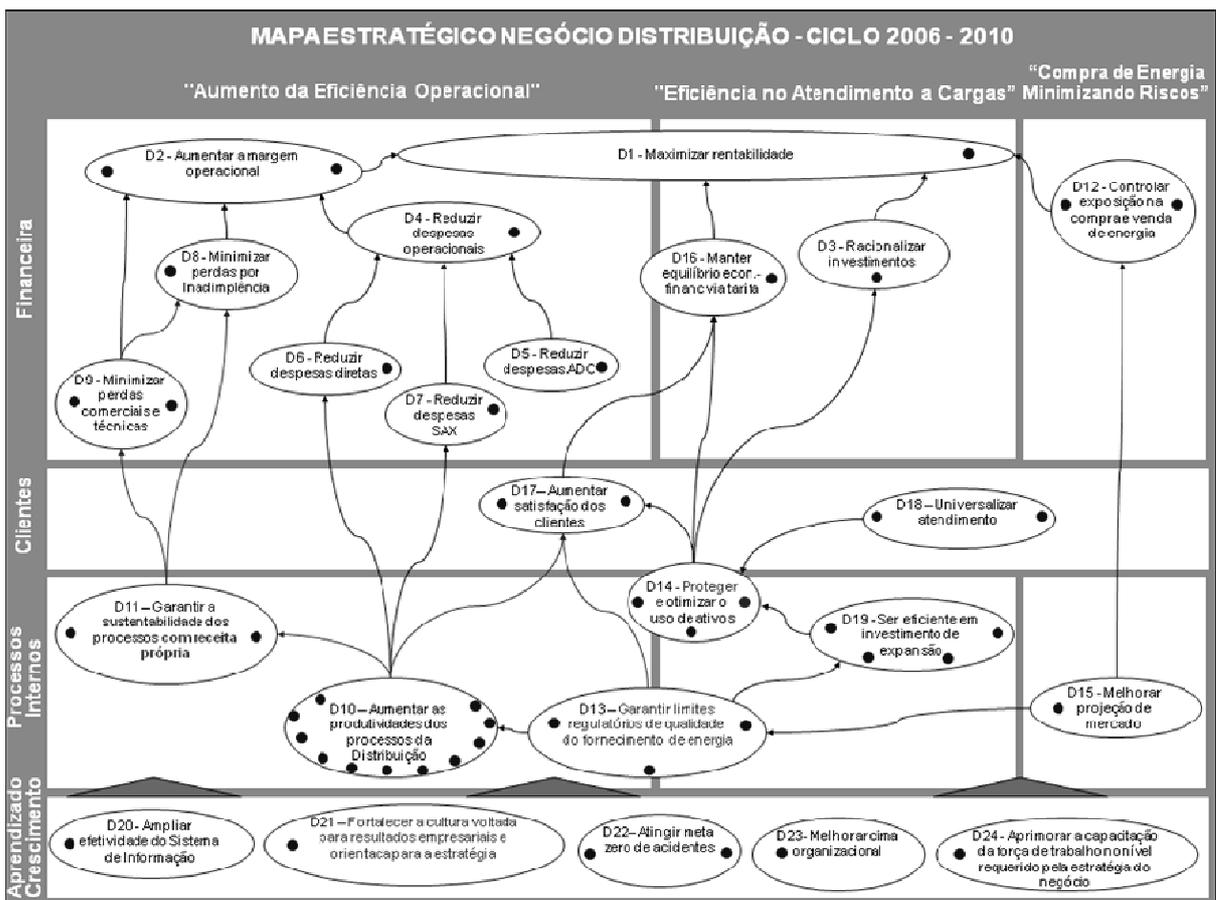


Figura 3: Mapa estratégico da CEMIG distribuição - ciclo 2006 – 2010
Fonte: Apresentação realizada pela Superintendência Regional da Distribuição Centro da Cemig em 2005

Na parte superior do mapa, é possível identificar as diretrizes estratégicas definidas no Plano Diretor da empresa: Aumento da Eficiência Operacional, Eficiência no Atendimento a Cargas e Compra de Energia Minimizando Riscos. Seguindo estas diretrizes, a Diretoria Executiva da Distribuição definiu as iniciativas estratégicas, representadas na Figura 2 pelos balões na área central, dentro da estrutura das quatro perspectivas da metodologia BSC, dispostas na lateral esquerda da Figura: Financeira, Clientes, Processos Internos e Aprendizado e Crescimento. Finalmente, com base nas iniciativas estratégicas, devem ser elaborados os esquemas de desenvolvimento, traduzidos na prática, em propostas de projetos.

2.4 Considerações Finais

A maioria das publicações associadas ao tema em questão está associada às questões de implantação da metodologia, como por exemplo em [11,14,15]. Não foram encontrados, todavia, trabalhos com foco nas questões decorrentes das mudanças que a implantação da metodologia BSC introduz no ambiente empresarial e o seu impacto sobre a gestão estratégica.

Esta questão é importante e com frequência discutida em seminários realizados pela *Symnetics* (empresa parceira no Brasil do *Balanced Scorecard Collaborative Inc.*), nos quais empresas brasileiras que adotaram a metodologia BSC, relatam insatisfação quanto ao desempenho de suas atividades de planejamento estratégico. Estas empresas atribuem este fato à ausência de modelos e métodos adequados e eficientes que permitam resolver os problemas relacionados à aplicação da metodologia. Entre os problemas decorrentes da utilização da metodologia, é possível distinguir:

- A construção de consenso na consideração das importâncias das perspectivas (financeira, clientes, processos internos, aprendizado e crescimento) de maneira equilibrada e justa;
- A construção do consenso na definição dos objetivos estratégicos e seus indicadores para as correspondentes perspectivas;

- A avaliação, comparação, escolha, priorização e ordenação das iniciativas estratégicas e esquemas de desenvolvimento;
- A alocação de recursos disponíveis entre as iniciativas e esquemas acima citados.

Na busca de prover facilidades que possam auxiliar na solução de alguns destes problemas, a presente tese aborda os aspectos fundamentais do processo de tomada de decisão na gestão estratégica, considerando a metodologia BSC, especificamente as questões associadas à participação dos especialistas nas atividades de avaliação, comparação, escolha, priorização, ordenação das alternativas (projetos e esquemas de desenvolvimento) e à construção de esquemas de consenso no processo de tomada de decisão.

3 MODELOS E MÉTODOS DE TOMADA DE DECISÃO MULTICRITÉRIO

3.1 Considerações Iniciais

Na etapa de planejamento estratégico, as empresas estabelecem metas e buscam alcançá-las através de recursos que incluem pessoas, materiais, dinheiro e o desempenho de funções gerenciais como planejamento, coordenação, direção e controle. No desempenho dessas funções, os gestores estão frequentemente envolvidos em processos de tomada de decisão. Cada decisão se dá através de um processo de avaliação, comparação, escolha, priorização e/ou ordenação num conjunto finito de alternativas, realizada por pessoas de diferentes níveis de formação, que sofrem diferentes influências e possuem diferentes opiniões.

Decisões podem ser tomadas individualmente ou em grupo. Segundo os autores de [16], decisões individuais são frequentemente tomadas em níveis gerenciais mais baixos e em pequenas empresas, enquanto decisões em grupo são usualmente tomadas em níveis gerenciais mais altos e em grandes organizações. No âmbito individual, pode haver conflito de preferências sobre as alternativas, que pode tomar proporções maiores ainda, quando levado ao âmbito de grupo.

Atualmente, a disponibilidade de tecnologias de informação e sistemas de comunicação proporciona maior visibilidade do cenário empresarial e conseqüentemente exige maior agilidade na geração de alternativas para a solução de problemas. Estas questões são fundamentais e podem ser atendidas, ao menos em parte, através da adoção da metodologia BSC na gestão estratégica. No quesito visibilidade, conforme discutido no capítulo anterior, a metodologia BSC introduz novos recursos de monitoramento dos indicadores de desempenho para representar os resultados das iniciativas estratégicas decorrentes das decisões. Entretanto, no que se refere ao aumento da agilidade em gerar alternativas, os resultados não são imediatos e nem tão pouco uma consequência natural. A adoção da metodologia BSC exige uma adaptação às modificações no cenário da informação e um aprimoramento na capacidade de aprendizado, a fim de desenvolver habilidades práticas na geração de alternativas para a solução de problemas. Neste novo cenário, a tomada de decisão torna-se mais complexa e difícil na medida em que aumenta o número de alternativas disponíveis.

Os reflexos dessas novas práticas também aparecem no contexto de todas as categorias de BSC (financeira, do cliente, da organização e dos processos), pois aumentam os riscos em decorrência das constantes mudanças no direcionamento estratégico. O custo de decisões equivocadas cresce em razão da complexidade das operações, automação e a reação em cadeia que um erro pode causar em vários setores da empresa, no sentido vertical e horizontal da organização. Finalmente, é preciso indicar que as contínuas mudanças no ambiente de negócios aumentam as incertezas presentes em elementos impactantes, incluindo fontes de informação e a própria informação.

As questões discutidas acima são muito importantes e tem motivado as organizações a procurar meios que possam auxiliar os processos de tomada de decisão e conseqüentemente aumentar a qualidade de suas decisões. Decisões de alta qualidade trazem inúmeros benefícios como maiores lucros, menores custos, maior agilidade no atendimento aos consumidores, atração de novos consumidores, etc.

Muitos indicadores são utilizados para classificar os problemas de decisões. Uma das possibilidades de classificação, citada em [16], é baseada na estrutura do problema: estruturado, semiestruturado ou não estruturado. Diferentes classes de problemas de tomada de decisão podem requerer diferentes modelos e métodos para a sua análise. Em um problema estruturado, os procedimentos para obtenção da melhor solução, ou da mais satisfatória, são conhecidos como métodos de solução padrão. Em geral, tais problemas podem ser descritos por modelos matemáticos de otimização clássicos. Ao mesmo tempo, um problema não estruturado, na realidade, é “*fuzzy*”, pois não se enquadra em nenhum método padrão. Em problemas não estruturados, a intuição humana é frequentemente a base para a tomada de decisão. Problemas típicos dessa natureza são encontrados nas atividades de planejamento. Problemas semiestruturados estão entre os descritos acima, apresentando ambas as estruturas de elementos. Solucioná-los, envolve uma combinação de procedimentos de solução padrão e julgamento humano.

3.2 Processos de Tomada de Decisão

A tomada de decisão é um processo cognitivo associado à seleção de um curso de ações sobre um conjunto de alternativas. Todo processo dessa natureza produz uma escolha final, comumente denominada solução. Em geral, o processo começa quando é necessário encontrar

uma solução, mas não existe a certeza de que a mesma será aceita por todas as pessoas envolvidas no processo decisório. O processo pode também ser visto como uma atividade que envolve raciocínio, que pode ser formal ou intuitivo e pode ser baseado em suposições explícitas ou tácitas.

Uma sistemática para o processo de tomada de decisão foi proposta por Simon [17] e ampliada conforme mostrado em [16]. A Figura 4, com algumas adequações, ilustra a proposta destes trabalhos.

O processo de tomada de decisão começa com a Fase Intelectual, na qual a realidade é analisada, o problema é identificado e declarado. Na Fase de Projeto, um modelo que representa o sistema é construído, a partir de considerações que simplificam a realidade e descrevem as relações entre todas as variáveis. O modelo é então validado e os critérios são definidos para a avaliação das alternativas de solução do problema. A Fase de Escolha inclui a seleção de uma das possíveis soluções propostas para o modelo. Esta solução é testada a fim de determinar a sua viabilidade. Se a solução escolhida for razoável, segue-se à última fase, de Implementação. Uma implementação bem sucedida resulta na solução do problema real. Uma falha provoca o retorno a uma das fases anteriores do processo.

Considerando o esquema geral da Figura 4, é possível imaginar que diferentes pessoas possam valorizar mais uma ou outra fase do processo, fazendo com que diferentes problemas de tomada de decisão possam requerer mais detalhes ou fases complementares e ainda técnicas para suportar uma ou mais fases. As publicações a respeito deste tema apresentam muitas teorias e resultados sobre como a decisão é tomada, com análises detalhadas e específicas e sugestões. Este capítulo é dedicado às questões relacionadas aos modelos e métodos de tomada de decisão envolvendo múltiplos critérios. Outras questões importantes como a influência da incerteza no processo de tomada de decisão e a tomada de decisão em grupo serão abordadas no Capítulo 4 e Capítulo 5, respectivamente.

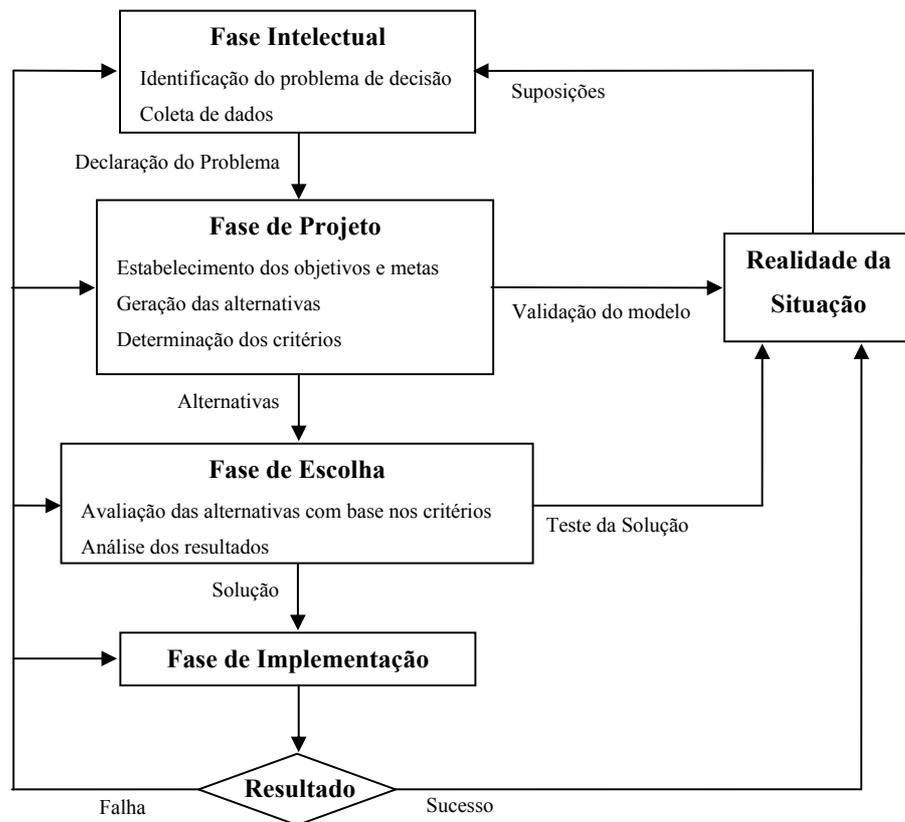


Figura 4: Esquema do processo de tomada de decisão

3.3 Modelos e Métodos de Tomada de Decisão Multicritério

Tomada de Decisão Multicritério, *Multiple-Criteria Decision Making* (MCDM), refere-se à tomada de decisão na presença de múltiplos e conflitantes critérios. Situações dessa natureza acontecem diariamente e compartilham as seguintes características [18]:

- Possuir múltiplos critérios, que podem ser objetivos ou atributos;
- Apresentar conflitos entre os critérios;
- Apresentar diferentes unidades de medida para os critérios.

Com base na primeira característica, é possível classificar os problemas MCDM em duas categorias [16]:

- Tomada de Decisão Multiobjetivo, *Multi-Objective Decision Making* (MODM) - são problemas que trabalham com espaços contínuos de decisão e estão associados, principalmente, à programação matemática com múltiplas funções objetivo (funções que permitem diferenciar alternativas);
- Tomada de Decisão Multiatributo, *Multi-Attribute Decision Making* (MADM) - são problemas que trabalham com espaços discretos de decisão. Como os atributos são frequentemente chamados de critérios, MADM é muitas vezes referida como MCDM.

Para ampliar a discussão sobre MODM e MADM, alguns conceitos e terminologias definidos em [18-20] são apresentados abaixo, acrescidos de complementos pertinentes a este trabalho:

- Critérios - são padrões de julgamento ou conjuntos de regras que permitem avaliar as alternativas mediante objetivos ou atributos.
- Objetivos - são reflexos do desejo dos decisores e indicam a direção na qual eles querem trabalhar.
- Atributos - características que representam propriedades ou capacidades das alternativas, para satisfazer a necessidade e/ou desejos do decisor.
- Decisor - também conhecido como Sujeito de Decisão, Agente de Decisão ou Tomador de Decisão, é a pessoa ou grupo de pessoas que, direta ou indiretamente, proporciona o juízo de valor final que poderá ser usado no momento de avaliar as alternativas disponíveis, com o objetivo de identificar a melhor escolha.

- Moderador - também denominado Analista, é a pessoa ou conjunto de pessoas (Grupo Moderador) encarregado de modelar o problema e eventualmente, fazer as recomendações e orientações relativas à seleção final.
- Conjunto de Alternativas - também chamado de Conjunto de Escolha, é um conjunto finito, do ponto de vista prático, constituído por um número relativamente pequeno de elementos que permite alcançar os objetivos de uma operação. As alternativas devem ser diferentes, exaustivas (a inclusão de novas alternativas implica na reformulação do modelo) e excludentes (não são permitidas soluções mistas).
- Coeficientes de Importância - são pesos ou importâncias atribuídas aos atributos a fim de diferenciá-los.

3.3.1 Modelos e Métodos MODM

MODM é conhecida como o ramo contínuo da MCDM. A principal característica da MODM é que os decisores precisam atender múltiplos objetivos, que geralmente são conflitantes e de difícil mensuração.

Um modelo para a solução de problemas MODM considera um vetor de variáveis de decisão, funções objetivo e restrições. Tradicionalmente, modelos que apresentam várias funções objetivo são denominados modelos $\langle X, M \rangle$ e são aplicáveis na solução de problemas nos quais as informações são determinísticas.

Quando são analisados os modelos $\langle X, M \rangle$, um vetor de funções objetivo $F(X) = \{F_1(X), \dots, F_q(X)\}$ é considerado, e o problema consiste na otimização simultânea de todas as funções objetivo, ou seja,

$$F_p(X) \rightarrow \underset{X \in L}{\text{extr}}, \quad p = 1, \dots, q, \quad (1)$$

onde L é a região das soluções viáveis no espaço Euclidiano R^n .

A abordagem geral para a análise dos modelos $\langle X, M \rangle$ é baseada na noção da região de compromisso, proposta por Edgeworth [21] e generalizada por Pareto [22]. Essa região, também chamada como conjunto de Edgeworth-Pareto ou, simplesmente, conjunto de Pareto $\Omega \subseteq L$, possui como propriedade o fato de que seus pontos $X \in \Omega \subseteq L$ representarem soluções eficientes ou não dominadas, que não podem ser simultaneamente melhorados para todos os critérios [19,23]. A importância dessa região está associada ao fato de que ela deve incluir a solução X^0 do problema. A construção dessa região é útil para a redução do número de alternativas, entretanto ela não permite obter uma solução única. Sendo assim, é necessário entrar na região de compromisso, considerando as informações adicionais fornecidas pelos decisores. Existem três abordagens para o uso dessas informações: a priori [19,24], a posteriori [24,25] e adaptativa [19,24].

Uma classificação mais detalhada é apresentada na Tabela 1 [16], que relaciona os métodos típicos para solução de problemas MODM à articulação das informações, ao tipo de informação e em que estágio ela ocorre.

Tabela 1 - Classificação dos métodos para solução de problemas MODM

	Estágio em que a informação é requerida	Tipo de informação	Métodos típicos
1	Não requer nenhuma informação, desde que as funções objetivo e as restrições tenham sido definidas		<ul style="list-style-type: none"> • Método do Critério Global [19,26]
2	Definição prévia das metas para as funções objetivo	Cardinal	<ul style="list-style-type: none"> • Método Ponderado [19,27]
		Ordinal e Cardinal	<ul style="list-style-type: none"> • Programação de Metas - GP [28]
3	Participação progressiva dos decisores no processo de tomada de decisão, a cada iteração	<i>Trade-off</i> explícito	<ul style="list-style-type: none"> • Solução Eficiente via Programação de Metas - ESGP [29] • Programação Linear MultiObjetivo Interativa - IMOLP [30] • Programação de Metas Sequenciais Interativas - ISGP [19] • Ziont e Wallenius - ZW [31]
		<i>Trade-off</i> implícito	<ul style="list-style-type: none"> • Método de Passos - STEM [32] • STEUER [33]
4	Definição posterior de um subconjunto de soluções não dominadas	<i>Trade-off</i> explícito / implícito	<ul style="list-style-type: none"> • Método Paramétrico [19] • Método de Restrições [19,27]

Como mostra Tabela 1, a primeira classe de métodos não requer nenhuma informação dos decisores, uma vez que as funções objetivo e restrições estão definidas.

A segunda classe de métodos assume que os decisores possuem um conjunto de metas para alcançar e essas metas são dadas antes da formulação do modelo matemático. A programação de metas, por exemplo, permite aos decisores especificar metas para as funções objetivo. Dessa forma, é possível minimizar os desvios em relação às metas definidas. Quanto à informação, a do tipo cardinal é formada por um conjunto de valores $\{v1_i, v2_i, \dots, vn_i\}$, onde cada vn_i é o valor assumido por uma alternativa de solução i , mediante cada um dos n critérios. Assim, é possível diferenciar a importância dos critérios através de pesos. A informação do tipo ordinal, estabelece uma ordem hierárquica, ou seja, os valores assumidos por uma alternativa de solução i são dispostos de maneira ordenada de acordo com a importância dos n critérios, como por exemplo no conjunto $\{v2_i, vn_i, \dots, v1_i\}$, em que o critério 2 é o mais importante e o critério 1 o menos importante.

A terceira classe, requer maior envolvimento dos decisores no processo de solução. A interação ocorre através de uma interface decisor-computador, a cada iteração. O conceito de *trade-off* está associado à substituição da importância relativa de um critério ou preferência sobre alternativa, em benefício de outro. Esta substituição pode ser explícita ou implícita e é utilizada a cada iteração para determinar uma nova solução. Desta forma, os decisores aumentam a capacidade de discernimento a respeito do problema à medida que tem a chance rever ou reavaliar uma situação.

Finalmente, a quarta classe determina um subconjunto de soluções não dominadas do problema. Esses métodos lidam estritamente com as restrições e não consideram a preferência dos decisores. O resultado desejado, todavia, fica limitado às possibilidades de ações e à seleção do curso de ações mais simples.

Segundo [24,34], a abordagem mais vantajosa é a interativa ou adaptativa. Aplicando essa abordagem, realiza-se o processo de melhoramento sucessivo da solução X^0 , como o resultado da transição de $X_\alpha^0 \in \Omega \subseteq L$ para $X_{\alpha+1}^0 \in \Omega \subseteq L$, considerando a informação adicional I_α do decisor [34,35], onde α representa o passo do processo de tomada de decisão. A solução procurada pode ser representada como uma sequência dos passos:

$$X_1^0, F(X_1^0) \xrightarrow{I_1} \dots \xrightarrow{I_{\alpha-1}} X_\alpha^0, F(X_\alpha^0) \xrightarrow{I_\alpha} \dots \xrightarrow{I_{\theta-1}} X_\theta^0, F(X_\theta^0) \quad (2)$$

No processo (2), são realizados dois tipos de adaptação: o computador deve ser adaptado às preferências da pessoa que toma as decisões; a pessoa que toma as decisões deve adaptar-se ao problema. O primeiro tipo de adaptação é baseado na informação recebida da pessoa que toma as decisões. O segundo é realizado como um resultado da execução de vários passos $X_{\alpha}^0, F(X_{\alpha}^0) \xrightarrow{I_{\alpha}} X_{\alpha+1}^0, F(X_{\alpha+1}^0)$, que possibilitam à pessoa que toma as decisões compreender a correlação entre as suas necessidades e as possibilidades de satisfação através do modelo (1).

Quando são analisados os problemas de otimização multicritério, é necessário resolver algumas questões específicas, relacionadas à normalização dos critérios, seleção de princípios de otimalidade e consideração das prioridades (importâncias) dos critérios locais. A resolução dessas questões e o desenvolvimento de métodos multicritério são realizados seguindo diferentes direções [19,23,36-38]: métodos de escalarização, imposição de restrições nos critérios, métodos da teoria de utilidade, programação de metas e utilização do princípio da garantia do resultado.

Sem aprofundar a discussão sobre estes métodos, é necessário salientar que uma das mais importantes questões da otimização multicritério é a qualidade das soluções obtidas. A qualidade da solução é considerada alta, se os níveis de satisfação dos critérios são iguais ou próximos uns dos outros, se não distinguimos as importâncias das funções objetivo (soluções harmoniosas) [39,40].

Deste ponto de vista, é necessário destacar o fundamento convincente e a perspectiva da direção baseada no princípio da garantia do resultado. Outras direções podem levar a soluções com níveis altos de satisfação de alguns critérios alcançados em detrimento dos níveis baixos de outros critérios, fato que pode ser confirmado nos trabalhos [30-42].

3.3.2 Modelos e Métodos MADM

MADM é conhecida como o ramo discreto da MCDM e consiste em estabelecer decisões de preferência (avaliação, comparação, escolha, priorização e ordenação) sobre um conjunto de alternativas, normalmente caracterizadas por múltiplos e conflitantes atributos. A principal característica da MADM está, usualmente, associada a um número limitado de alternativas predeterminadas que devem satisfazer o nível exigido para os atributos.

A metodologia de decisões multicritério discreta está associada à solução dos seguintes tipos de problemas [43]:

- Problema tipo α ($P\alpha$): tem como objetivo conduzir a decisão à escolha de um subconjunto tão restrito quanto possível, tendo em vista a escolha final de uma única alternativa. Esse conjunto conterá as “melhores alternativas” ou as “alternativas satisfatórias”. O resultado pretendido é, portanto, uma escolha ou um procedimento de seleção.
- Problema tipo β ($P\beta$): tem como objetivo conduzir a decisão a uma triagem resultante da alocação de cada alternativa a uma categoria (ou classe). As diferentes categorias são definidas *a priori* com base em normas aplicáveis ao conjunto de alternativas. O resultado pretendido é, portanto, uma triagem ou um procedimento de classificação.
- Problema tipo γ ($P\gamma$): tem como objetivo conduzir a decisão a um arranjo obtido pelo reagrupamento de todas ou parte (as mais satisfatórias) das alternativas em classes de equivalência. Essas classes são ordenadas de modo completo ou parcial, conforme as preferências. O resultado pretendido é, portanto, um arranjo ou um procedimento de ordenação.
- Problema tipo δ ($P\delta$): tem como objetivo conduzir a decisão a uma descrição, em linguagem apropriada, das alternativas e de suas consequências. O resultado pretendido é, portanto, uma descrição ou um procedimento cognitivo.

Matematicamente, um problema MADM típico pode ser formulado como:

$$\textit{Selecionar: } X_1, X_2, \dots, X_n \quad \textit{considerando: } C_1, C_2, \dots, C_q \quad (3)$$

onde X_1, X_2, \dots, X_n representam as alternativas e C_1, C_2, \dots, C_q representam os atributos (critérios) sobre os quais serão avaliados o desempenho das alternativas. As informações envolvidas neste tipo de modelo podem ser expressas na forma matricial:

$$D = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \cdots & C_q \\ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1q} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nq} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4)$$

onde $r_{ij}, i=1, \dots, n, j=1, \dots, q$ são valores associados a cada alternativa X_i quando avaliada em relação ao atributo C_j , levando em consideração o correspondente coeficiente de importância ω_j associado ao atributo C_j .

Como cada pessoa tem as suas próprias idéias, atitudes, motivações e personalidade, é natural considerar que cada uma expressará as suas preferências de maneira diferente. Dessa forma, diversas formas de representação das preferências foram elaboradas, como por exemplo, através de esquemas de ordenação de alternativas [44-46], relações de preferência multiplicativas [46], uso de funções de utilidade [20,42], relações de preferência *fuzzy* [49-51], dentre outras [52-65].

Dentre as formas de representação das preferências mencionadas, as relações de preferência são as que têm despertado mais interesse e sido amplamente utilizadas. Estas formas de representação dão origem a modelos do tipo $\langle X, R \rangle$, que consideram um conjunto de alternativas, relações de preferência (que desempenham o papel das funções objetivo nos modelos $\langle X, M \rangle$) e atributos. Expressa na forma matricial, esta modelagem gera uma matriz de preferências do tipo:

$$R = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad \text{considerando: } C_1, \dots, C_k, \dots, C_q \quad (5)$$

onde r_{ij} , $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, q$ representa uma preferência da alternativa X_i em relação a X_j , quando avaliada em relação a um atributo C_k , levando em consideração o correspondente coeficiente de importância ω_k associado ao atributo C_k .

A análise de modelos $\langle X, R \rangle$ permite resolver os problemas de avaliação, comparação, ordenação, priorização e seleção das alternativas com base nos atributos, caracterizando uma situação de decisão.

A princípio, é possível levantar algumas questões em relação aos métodos MADM: a avaliação das alternativas mediante atributos quantitativos e qualitativos; a comparação de valores de naturezas distintas (referentes ao desempenho das alternativas); a adequação e eficiência da metodologia empregada na ordenação e priorização das alternativas; a seleção da melhor alternativa. Estas questões são fundamentais no contexto da solução de problemas MADM e serão abordadas em detalhe no próximo capítulo.

Em [18], Hwang e Yoon classificaram 17 métodos MADM típicos, utilizando como parâmetro de diferenciação, o tipo e as particularidades da informação fornecida pelos decisores. Posteriormente, os mesmos autores estabeleceram uma taxonomia modificada para 13 métodos [66]. Nesta classificação, os métodos são inicialmente categorizados pelo tipo de informação recebida dos decisores: se nenhuma informação é disponibilizada, o método de dominância é aplicável; se as informações no ambiente são tanto pessimistas quanto otimistas, os métodos *max-min* ou *min-max* são aplicáveis; se as informações sobre os atributos são dadas, os métodos são agrupados em subcategorias. A informação disponibilizada pelos decisores pode seguir um nível padrão de importância para os atributos (mesmos coeficientes de importância para todos os atributos), característica esta, associada aos métodos conjuntivos e disjuntivos. Por outro lado, a importância entre os atributos pode ser diferente, o que remete aos métodos de Ponderação Aditiva Simples [67], TOPSIS [18], ELECTRE [68] e AHP [69].

A seguir, são discutidos os métodos tradicionalmente chamados de Métodos da Escola Americana e Métodos da Escola Francesa.

3.4 Métodos da Escola Americana

Os primeiros métodos da Escola Americana estão associados à Teoria da Utilidade Multiatributo, como por exemplo utilizada em [70], que se baseia na hipótese de que, em qualquer problema de decisão, existe uma função de valor real sobre o conjunto de alternativas, função esta que agrega os atributos e que deve ser definida pelo decisor. Desta forma, a teoria assume que o decisor é capaz de identificar várias alternativas discretas para avaliação e é capaz de estruturar os critérios sobre os quais as alternativas serão avaliadas de maneira hierárquica.

Pertence à Escola Americana, um dos métodos mais conhecidos e talvez o mais usado no mundo: o Método de Análise Hierárquica, AHP [69]. Esse método é baseado no conceito de análise hierárquica, que estabelece uma estruturação de critérios em níveis hierárquicos, de modo a criar uma homogeneidade entre os critérios do mesmo nível, ou seja, os critérios devem possuir o mesmo nível de importância, facilitando, assim, sua compreensão e avaliação. Após construir tal estrutura, cada decisor deve realizar uma comparação entre os pares de alternativas em um dado nível hierárquico, criando uma matriz de preferências, também conhecida como matriz de decisão. O método, em sua versão clássica, utiliza uma escala (que varia de 1 a 9) para a comparação das alternativas, denominada Escala Fundamental.

Outras versões foram construídas sobre o método clássico, buscando a superação de algumas deficiências, como por exemplo:

- AHP Multiplicativo, proposto por Lootsma [71], que introduziu modificações sobre a regra de agregação das preferências;
- AHP Referenciado proposto por Watson e Freeling [72], que introduziu uma constante de proporcionalidade, resultado da comparação dos valores relativos dos critérios e das alternativas;

- AHP B-G, proposto por Belton e Gear [73], que utiliza o maior valor de preferência entre as alternativas (identificado após a comparação das alternativas) para a normalização das preferências em relação às demais.

3.5 Métodos da Escola Francesa

Na Europa, diversos trabalhos foram desenvolvidos em contraposição aos métodos da escola americana. Esses métodos são baseados no conceito de sobreclassificação seguem a linha de pensamento chamada, na literatura, Escola Francesa. A origem do termo Escola Francesa vem do fato de que o conceito de sobreclassificação e os primeiros métodos a empregá-lo foram desenvolvidos por pesquisadores franceses. No entanto, a pesquisa sobre tomada de decisão segundo essa linha de pensamento não ficou restrita à França. Os métodos da Escola Francesa propõem modelos mais flexíveis que não pressupõem, necessariamente, a comparação entre as alternativas e não impõem ao decisor uma estruturação hierárquica dos critérios.

Os primeiros métodos dessa escola foram os da família ELECTRE (*Elinúation Et Choix Traduisant Ia Réalité*), cuja principal característica está associada a um novo conceito de modelo de preferências, que pretende ser uma representação mais realista que o utilizado na Teoria da Decisão Clássica. Enquanto a Teoria da Decisão Clássica fornece basicamente duas situações de preferência para avaliação das alternativas, supostamente transitivas, designadas por preferência estrita (P) e por indiferença (I), o novo conceito inclui outras duas: preferência fraca (Q) e incomparabilidade (R), compondo dessa forma, o Modelo de Preferência Humana. Para obter a ordenação das alternativas, os métodos ELECTRE utilizam o conceito de superação para a captura das relações de preferência que estão bem definidas nas relações apresentadas pelos decisores. O conceito de superação está associado a uma combinação de três relações do SFRP: (I), (Q) e (P). Os métodos ELECTRE também consideram pesos como uma medida de importância que cada critério tem para o decisor. É interessante ressaltar que esses pesos não atuam como uma taxa marginal de substituição, visto que o procedimento de agregação dos vários critérios utilizado pelo ELECTRE não tem caráter compensatório. Esses métodos empregam a informação dos pesos com a finalidade de construir índices de concordância ou discordância. Uma alternativa é dita pelo menos tão boa ou melhor do que outra, se para a maior parte dos critérios (critérios concordantes) essa afirmativa é verdadeira e a oposição a esta afirmativa (feita pelos critérios discordantes), não é suficientemente forte para invalidá-la. Esta

dinâmica permite ao decisor construir as suas preferências, considerando que as informações iniciais são instáveis ou inexistentes [20,74]. Dessa forma, ao contrário dos métodos baseados na Teoria Clássica, que geralmente envolvem longas entrevistas com o decisor, os métodos ELECTRE extraem do decisor apenas as informações consideradas confiáveis e significativas. Em geral, envolvem a especificação de poucos parâmetros de entrada e a execução de algoritmos complexos, que realizam as comparações entre os pares de alternativas, para construir um modelo coerente com as informações fornecidas pelo decisor. Esta abordagem baseia-se em modelos mais completos da preferência humana que admitem incertezas, situações de incomparabilidade entre alternativas e, às vezes, julgamentos intransitivos. Por outro lado, a complexidade desses modelos torna os métodos de decisão menos transparentes, o que pode dificultar seu uso operacional.

As versões dos métodos ELECTRE diferenciam-se pela problemática que tentam resolver (problemas de seleção, de ordenação ou de classificação), pelas informações inter e intracritérios utilizadas e pela quantidade de relações de superação construídas e pesquisadas, conforme segue:

- ELECTRE I, proposto por Roy [75], que utiliza os fundamentos clássicos descritos
- ELECTRE II, proposto por Roy e Bertier [76], que busca melhorar o processo de decisão por meio da ordenação das alternativas;
- ELECTRE III, proposto por Roy [77], que introduz a possibilidade de veto por parte do decisor, como forma de traduzir a recusa ou incapacidade de realizar uma comparação;
- ELECTRE IV, proposto por Roy e Hugonnard [78], que utiliza pseudocritérios (como a versão III) em vez de noções de concordância e discordância;
- ELECTRE IS, proposto por Roy e Skalka [79], que busca melhorias no processo de decisão por meio da seleção das alternativas;

- ELECTRE TRI, proposto por Yu [80], que busca a solução de um problema por meio da comparação de cada alternativa com uma alternativa de referência.

Outra família de métodos da escola francesa, mais recente, recebe o nome PROMETHEE (*Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations*). Uma das referências pioneiras sobre este método é o artigo de Brans, Mareshal e Vincke [81]. Outra referência, apresenta comparações entre os métodos ELECTRE e PROMETHEE [82]. Uma terceira, mais recente, apresenta uma ampla revisão dos métodos tradicionais da escola francesa e propõe novos métodos de decisão baseados no método PROMETHEE [83].

Os métodos PROMETHEE usam comparações binárias entre as alternativas, avaliando os seus desempenhos critério a critério, a fim de dispor as alternativas em ordem de prioridade. Além disso, utilizam o conceito de pseudocritério, com a possibilidade de associar aos pseudocritérios limites de indiferença e de preferência estrita. Dessa forma, segundo as diferenças dos desempenhos existentes entre as alternativas, o decisor poderá variar o grau de preferência (ou índice de credibilidade) de uma alternativa em relação à outra. A seguir são relacionadas as versões da família PROMETHEE:

- PROMETHEE I - a ordenação obtida corresponde a uma pré-ordem parcial, pois pode existir uma relação de incomparabilidade entre as alternativas;
- PROMETHEE II - a relação de incomparabilidade entre as alternativas não é permitida nesta versão, que gera uma pré-ordem total;
- PROMETHEE III - é obtida uma ordem por intervalos, pois este método trabalha com limites variáveis;
- PROMETHEE IV - generaliza a versão II, para o caso de um número infinito de alternativas;

- PROMETHEE V - amplia a aplicação do PROMETHEE II, sendo apropriado para o caso em que é necessário selecionar um subconjunto de alternativas, dentre as consideradas, em razão de restrições existentes no problema [84];
- PROMETHEE VI - auxilia o decisor na determinação dos coeficientes de importância associados aos critérios, de modo a melhorar a expressão de suas preferências.

3.6 Apoio à Tomada de Decisão

O grande número de variáveis, funções e parâmetros envolvidos na modelagem de informação e na aplicação de métodos de tomada de decisão, demanda dos decisores um grande esforço na coleta, análise e seleção de alternativas para a solução de problemas. Depois de tomadas as decisões, é necessário monitorar o desempenho dos processos e as consequências tais decisões. Eventos de decisões são cada vez mais constantes no dia a dia das empresas e despertam nas organizações a necessidade de procurar novas metodologias e ferramentas que possam auxiliar seus processos e conseqüentemente seus resultados.

Em muitas atividades, as ferramentas computacionais já conquistaram espaço e demonstraram a sua eficiência. Entretanto, na medida em que cresce a importância das atividades e conseqüentemente o impacto sobre os resultados da empresa, a presença humana ainda é predominante. Por outro lado, a aceitação e implantação de novas tecnologias nos processos de gestão das organizações tem sido significativa, no sentido de buscar a aplicação e a evolução do capital intelectual nas empresas. No cenário atual, os sistemas de informação como Internet e Intranet já são vitais para vários tipos de organizações, incluindo negócios e governo. Outra constatação interessante é que as aplicações computacionais nas organizações estão se movendo dos processos de monitoramento, controle e transações, para processos de análise e busca de soluções de problemas. Da mesma forma, os serviços baseados na tecnologia *Web* estão mudando da apresentação de informações online e acessos de dados para serviços de informação inteligentes, personalizados e interativos.

A análise de processos online e apoio a decisão em tempo real, com o auxílio de computadores, podem contribuir de forma significativa para a melhoria do desenvolvimento de negócios, comércio e administração. Nas empresas, cresce a demanda por prover os gestores com sistemas de apoio capazes de auxiliá-los diretamente em suas tarefas mais importantes: tomar

decisões. Nesta direção, conforme mencionado anteriormente, a implantação computacional da metodologia BSC proporciona a ampliação dos recursos de monitoramento através da disponibilização de indicadores de desempenho que auxiliam no acompanhamento dos resultados das iniciativas estratégicas decorrentes das decisões.

As tecnologias de apoio a tomada de decisão, incluindo modelos, métodos e sistemas, podem ajudar de várias formas:

- Permitir aos decisores processar um grande número de operações e aumentar a capacidade de resposta às situações emergenciais;
- Permitir o acesso imediato a dados armazenados em diferentes bases, dentro e fora das organizações, em diferentes formatos e aumentar a capacidade de acompanhamento de tendências instantâneas e históricas;
- Permitir a automatização de procedimentos, reduzir o risco de erro humano e aumentar a efetividade dos resultados das decisões;
- Permitir a realização de simulações de cenários considerando diferentes possibilidades de alternativas e a avaliação dos impactos decorrentes das decisões tomadas.

Em sua essência, todas as funcionalidades citadas têm como objetivo proporcionar aos decisores uma melhor compreensão da natureza do problema, e conseqüentemente, aumentar a qualidade das decisões tomadas.

A utilização de ferramentas de apoio computacional a tomada de decisão, em particular na solução de problemas complexos, permite gerar e avaliar mais alternativas considerando um volume maior de dados, inclusive os de natureza incerta. Desta forma, um maior número de decisões complexas pode ser viabilizado e conduzido de maneira efetiva.

3.7 Considerações Finais

Neste momento, é importante estabelecer alguns pontos sobre o amplo universo de assuntos tratados. De acordo com os objetivos previamente propostos, serão explorados os métodos de ordenação de alternativas ($P\gamma$) como base para a escolha da melhor solução ($P\alpha$), associados à metodologia de solução de problemas MADM. Nos capítulos 4 e 5, serão aprofundadas as questões associadas à construção e uniformização de preferências e à modalidade de tomada de decisão individual e em grupo, respectivamente. Neste contexto, serão privilegiados os modelos do tipo $\langle X, R \rangle$, considerando fundamentalmente as relações de preferência *fuzzy*.

4 CONSTRUÇÃO E UNIFORMIZAÇÃO DE PREFERÊNCIAS

4.1 Considerações Iniciais

O processo de tomada de decisão, conforme introduzido no Capítulo 3, começa com uma Fase Intelectual, que no caso da solução de problemas típicos do tipo MADM, consiste em construir as preferências individuais dos decisores com base na avaliação e comparação das alternativas, procedimento este, nem sempre trivial. Além disso, a construção das preferências pode demandar diferentes estruturas de representação e como consequência, necessitar de artifícios de transformação para reduzir estas informações em uma única base para processamento. A fim de superar estas dificuldades, é apresentada uma abordagem mais amigável e natural, baseada no conceito de função de pertinência da relação de preferência *fuzzy* generalizada. Este procedimento requer apenas a avaliação das alternativas, sem a necessidade de confrontá-las comparativamente.

Este capítulo aborda também as questões associadas à presença de incerteza no ambiente de tomada de decisão e a necessidade de se utilizar, além dos parâmetros quantitativos tradicionais, parâmetros qualitativos para a construção das preferências.

4.2 Construção de Preferências

Na etapa de construção das preferências, é natural que cada pessoa tenha a sua própria percepção do problema, sofra diferentes influências, tenha diferentes interesses e acesso a diferentes fontes e formas de informação. Como consequência, é de se esperar que cada um sintase mais confortável expressando as suas opiniões usando diferentes modos de apresentação de preferências ou diferentes estruturas de preferências [85-88]. A escolha de uma estrutura de preferências é subjetiva e geralmente baseada em aspectos como: apelo intuitivo, nível de precisão desejado, facilidade de compreensão ou facilidade de avaliação da preferência [16]. Os autores de [89] distinguem quatro tipos de estruturas de preferência. No trabalho [90], são consideradas quatro possibilidades adicionais.

A princípio, é possível dividir as abordagens para a construção de preferências em dois grupos: abordagem quantitativa, que utiliza diretamente parâmetros numéricos como forma de

representação das preferências; e abordagem qualitativa, que utiliza inicialmente parâmetros simbólicos, que posteriormente são convertidos em parâmetros numéricos. A seguir, são apresentadas algumas estruturas de representação de preferências baseadas na abordagem quantitativa:

- Esquema de Ordenação

No esquema de ordenação de preferências sobre alternativas, apresentado em [44-46], a pessoa deve expressar as suas preferências sobre as alternativas de $X = \{X_1, \dots, X_n\}$, levando em conta um critério C_k , formando conjuntos ordenados do tipo

$$O_{C_k} = \{o_{C_k}(X_1), \dots, o_{C_k}(X_n)\}, \quad (6)$$

onde $o_{C_k}(X_i)$ é uma função de permutação sobre um conjunto de índices $\{1, \dots, n\}$, que expressa a preferência sobre a alternativa X_i . Desta forma, um vetor ordenado de alternativas, da melhor para o pior, é formado.

- Relação de Preferência Multiplicativa

Na construção da relação de preferência multiplicativa, descrita em [47,48], as alternativas de X são comparadas aos pares, segundo um critério C_k , e as preferências descritas por uma matriz de relações de preferências positivas do tipo

$$A_{C_k} \subset X \times X, A_{C_k} = a_{C_k}(X_{ij}), \quad (7)$$

onde $a_{C_k}(X_{ij})$ indica uma proporção da intensidade de preferência da alternativa X_i em relação a X_j , ou seja, quantas vezes X_i é melhor que X_j . É usual considerar uma escala de 1/9 a 9, na qual $a_{C_k}(X_{ij})=1/9$ indica indiferença entre X_i e X_j , $a_{C_k}(X_{ij})=9$ indica que X_i possui grande preferência em relação a X_j , e os demais valores indicam avaliações intermediárias. É usual

também, assumir a propriedade da reciprocidade multiplicativa, ou seja, $a_{C_k}(X_{ij}) \cdot a_{C_k}(X_{ji}) = 1 \quad \forall i, j$.

- Função de Utilidade

Uma função de utilidade é construída atribuindo-se um valor numérico maior para a melhor alternativa e um valor menor para a alternativa com menor preferência, como mostrado em [20,43,85,91]. A obtenção de valores numéricos intermediários permite construir a curva da função de utilidade que é única para cada pessoa. Dessa forma, a pessoa atribui as suas preferências sobre as alternativas de X , para um dado critério C_k , como um conjunto de valores de utilidade

$$U_{C_k} = u_{C_k}(X_i), \quad u_{C_k} \in [0,1], \quad (8)$$

onde $u_{C_k}(X_i)$ representa a avaliação de utilidade atribuída à alternativa X_i .

4.3 Construção de Preferências em Ambiente de Incerteza

4.3.1 Considerações Gerais

Antes de abordar especificamente a questão da construção de preferências em ambiente de incerteza, é necessário indicar o seguinte.

Na formulação e solução de problemas relacionados ao projeto, planejamento e controle de sistemas complexos, é possível encontrar diferentes tipos de incertezas. As diversas manifestações da incerteza são causadas, por exemplo, por [92,92]:

- Impossibilidade ou irracionalidade, por força de considerações de caráter técnico-econômico, de obter informações suficientes com um grau de confiabilidade adequado;

- Falta de predições confiáveis das características e comportamento de sistemas complexos, que refletem as suas respostas às ações externas e internas;
- Metas e restrições de projeto, planejamento e controle, definidas de maneira incompleta;
- Impossibilidade de formalização de alguns fatores e critérios, e também a necessidade de considerar informações qualitativas (simbólicas, semânticas, contextuais, etc.);
- Influência do fator humano no processo de tomada de decisão.

O ponto de partida na formação de modelos matemáticos é a exigência de uma correspondência rigorosa dos mesmos ao nível de incerteza de informações utilizadas. Somente observando essa correspondência, é possível falar sobre a adequação da apresentação do objeto, sistema ou processo e sobre a possibilidade de obter o efeito real como resultado da solução dos correspondentes problemas de caráter de otimização. Qualquer simplificação do modelo, empreendida com o intuito de implementação, podem distorcer a essência de muitos problemas e diminuir o valor prático dos resultados. Considerando isso, nos trabalhos [94,95] coloca-se em dúvida a justificativa da ampla orientação na aplicação de métodos probabilísticos [96-98]. Em particular, os autores de [94] indicam que, da mesma forma que a solução de problemas de tomada de decisão com base em métodos determinísticos supõe o conhecimento exato da informação, o que usualmente não corresponde à realidade, a aplicação dos métodos probabilísticos supõe também o conhecimento exato das leis de distribuição e seus parâmetros, o que nem sempre corresponde às possibilidades reais de obtenção de todo espectro da descrição probabilística.

A solução de problemas em condições de incerteza está associada à necessidade de superação de algumas dificuldades, incluindo as de caráter conceitual. Sua redução a problemas matemáticos, formulados rigorosamente, é possível somente com base na desconsideração da incerteza através da introdução de correspondentes hipóteses. Considerando isso, surge a necessidade de utilizar modelos e métodos especiais para resolver os problemas em condições de incerteza. Uma das mais conhecidas e difundidas abordagens [99-102], utiliza elementos da

teoria de jogos. Essa abordagem consiste na construção de uma matriz *payoff* (a qual reflete o efeito, obtido para diferentes variantes da solução conforme as diferentes combinações dos dados iniciais), cuja análise é baseada em critérios especiais (critérios de Wald, Savage, Laplace, Hurwicz, critério generalizado, etc.). Essa abordagem apresenta-se como eficiente e suficientemente universal e encontrou aplicações amplas em diferentes áreas [103,104]. Entretanto, é necessário mencionar que os critérios citados acima apresentam desvantagens [36,94]. Em particular, eles não são apoiados completamente em informações aproximadas ou não diretas sobre a situação real e, por isso, são subjetivos, e para muitos casos, contraditórios. Além disso, somente a aplicação destes critérios também é indesejável pelo fato de que eles conciliam as incertezas existentes, e de tal forma, não permitem passar para um nível informativo mais alto, através de sua superação. Isso leva a uma perda injustificada da eficiência das decisões tomadas. Por isso, na solução de problemas reais, primeiramente é necessário, da melhor forma possível, direcionar os esforços na busca de possibilidades da superação completa ou, ao menos parcial, da incerteza [105-107]. Na realidade, fala-se que a característica da informação inicial incerta (dada usualmente através de intervalos; se a lei de distribuição da grandeza é considerada como conhecida, é possível falar sobre especificação intervalar dos parâmetros dessa lei) pode, e deve ser complementada por suposições justificadas, formadas (não com base em métodos probabilísticos ou, pelo menos, não somente com base neles) de maneira concreta sobre a confiabilidade diferenciada dos diferentes valores dos fatores de incerteza. Uma ilustração convincente da eficiência desse caminho é o método da divisão em regiões [36], que pode ser utilizado para análise dos problemas, onde a solução é escolhida dentre um número não muito grande de parâmetros discretos. Levando o exposto em consideração, é conveniente indicar que a orientação na utilização de elementos da teoria de jogos apresenta-se racional, somente na falta de possibilidades de distinção dos diferentes valores dos fatores incertos.

O complemento da característica da informação inicial incerta através da confiabilidade diferenciada dos seus diferentes valores é a generalização natural da especificação intervalar dos fatores de incerteza. Entretanto, isso demanda a renúncia da construção tradicional de modelos matemáticos e a aplicação de outra abordagem matemática. Neste trabalho, é empregada a teoria dos conjuntos *fuzzy*, cujos fundamentos foram lançados por Zadeh [108]. O estímulo para a utilização da teoria dos conjuntos *fuzzy* deve-se a um dos seus aspectos mais importantes: o aspecto linguístico [109,110], aplicado aos diferentes problemas de tomada de decisão e às

diferentes estruturas de preferências [86-88]. A utilização da teoria dos conjuntos *fuzzy* proporciona vantagens sensíveis, tanto de caráter substancial (com possibilidades de obtenção justificada de soluções efetivas, menos “cautelosas” e de consideração combinada de diferentes manifestações do fator de incerteza), quanto de caráter computacional [25], ou seja, serve não somente para o aumento da adequação dos modelos construídos, mas, também, para a criação de uma interface convincente “homem-orientada” (não “máquina-orientada”) entre a pessoa que toma as decisões e o computador [34], o que em condições de “intelectualização” geral de computadores é muito importante.

As questões sobre a correlação entre a teoria da probabilidade e a teoria dos conjuntos *fuzzy* e sobre a interpretação da função de pertinência do conjunto *fuzzy* [109,110] são objetos de discussões e têm, essencialmente, um caráter metodológico ou filosófico. Dessa forma, a abordagem da teoria dos conjuntos *fuzzy* não compete com os métodos probabilísticos. Ela permite preencher uma lacuna, onde não é possível, corretamente, utilizar os métodos probabilísticos.

4.3.2 *Análise e Comparação de Quantidades Fuzzy*

A análise e comparação de números *fuzzy* têm um caráter fundamental na solução dos problemas de programação matemática *fuzzy* (por exemplo, [111-113]). Além disso, como é mostrado abaixo, a análise e comparação de números *fuzzy* podem servir como base para a construção das relações de preferência *fuzzy*. Levando isso em consideração, abaixo são consideradas algumas noções associadas aos conjuntos *fuzzy* e, particularmente, com números *fuzzy* e são discutidas técnicas de sua comparação.

A teoria dos conjuntos *fuzzy*, introduzida por Zadeh em 1965 [108], tem como princípio básico a consideração de incerteza e imprecisão na solução de problemas e permitir que se trabalhe com descrições simplificadas da realidade, possibilitando com isto que modelagens de sistemas extremamente complexos possam ser realizadas e conclusões possivelmente corretas extraídas. A seguir, são apresentadas algumas definições básicas:

Um conjunto *fuzzy* F de X é definido por uma função de pertinência

$$\mu_F : X \rightarrow [0,1], \quad (9)$$

a qual atribui a cada elemento do conjunto X , um grau de pertinência $\mu_F(X_i)$, que representa o grau com que o elemento X_i pertence ao conjunto F . Desta forma, quanto mais próximo o grau de pertinência está de 1, maior é a participação de X_i em F . Um conjunto *fuzzy* F pode ser representado como um conjunto de pares ordenados dos elementos X_i e seus respectivos graus de pertinência $\mu_F(X_i)$, como segue:

$$F = \{(X_i, \mu_F(X_i)) \mid X_i \in X\}. \quad (10)$$

Quando X é um conjunto finito com n elementos, um conjunto *fuzzy* F de X é expresso como:

$$F = \{(X_1, \mu_F(X_1)), \dots, (X_n, \mu_F(X_n))\}. \quad (11)$$

Um conjunto *fuzzy* F é normal, se existe ao menos um elemento $X_i \in R$ tal que $\mu_F(X_i) = 1$. Dado qualquer $\alpha \in (0, 1]$, o α -corte de um conjunto *fuzzy* F , é o conjunto clássico

$$F_\alpha = \{X_i \in X \mid \mu_F(X_i) = 1\} \quad (12)$$

e qualquer conjunto fuzzy é completamente determinado pelos seus α -cortes, definido como $[F_\alpha^L, F_\alpha^R]$. Um conjunto *fuzzy* F é convexo se todos os seus α -cortes são conjuntos convexas (clássicos).

O suporte de um conjunto *fuzzy* F é o conjunto

$$\text{sup}(F) = \{X_i \in X \mid \mu_F(X_i) \neq 0\}. \quad (13)$$

Um número *fuzzy* é um conjunto *fuzzy* F de X que satisfaz as seguintes condições:

- F é normal;
- F é convexo;
- F_α é um intervalo fechado para todo $\alpha \in (0,1]$;
- O suporte de F é limitado.

Não aprofundando sobre as questões das operações com números *fuzzy* (as correspondentes informações podem ser encontradas em [16,114]), vamos considerar os elementos da comparação de números *fuzzy*.

Ao contrário dos números reais, os números *fuzzy* não têm uma ordem natural. A idéia geral associada à análise e comparação de quantidades *fuzzy* é convertê-las em números reais e basear a comparação nesses números. Partindo do princípio de que toda conversão acarreta em algum prejuízo, essas abordagens apresentam limitações. Wang e Kerre [115] suportam esse ponto de vista pela citação de Freeling [116]: “pela redução de toda nossa análise ao um único número, nós perdemos muita informação que com premeditação foi preservada nos cálculos”. Lee-Kwang [117] e Cheng [118] compartilham esta opinião. Os autores de [118,119] indicam situações em que diferentes técnicas de comparação *fuzzy* produzem resultados diferentes para um mesmo problema. Os autores de [117,118,120-122] destacam que a comparação baseada em números *fuzzy* nem sempre correspondem à intuição. Os autores de [123] indicam que a maioria dos métodos de comparação *fuzzy* pressupõe que funções de pertinência de números *fuzzy* são normalizadas. Entretanto, em muitos casos este fato não é verdadeiro. Os autores de [124] acreditam que os métodos de comparação *fuzzy* podem não refletir as preferências ou interesses dos decisores. Além disso, Chen e Klein [122] indicam que muitos métodos de comparação permitem somente estabelecer uma ordem entre números *fuzzy* e não permitem medir o grau de dominância entre eles, demandando um volume significativo de cálculos e uma programação pesada.

É importante destacar que a maioria das técnicas baseadas em quantidades *fuzzy*, cerca de 35 estão relacionados em [115,125], é proposta com uma aspiração de distinção obrigatória entre as alternativas. Entretanto, a experiência [126,127] mostra que frequentemente aparecem situações [52,109], nas quais não é possível distinguir plenamente todas as alternativas, criando situações de incerteza [107,120]. Esses casos podem ocorrer devido à insuficiência ou até mesmo ausência de informação, igualdade de preferência entre alternativas ou dificuldade de expressar explicitamente a preferência sobre as mesmas.

Para superar os aspectos indicados acima é possível utilizar uma abordagem mais natural, baseada no conceito de função de pertinência da relação de preferência *fuzzy* generalizada [42]. Este conceito é baseado na função de escolha introduzida por Orlovski [128-130] e está de acordo como os bem conhecidos e altamente citados índices de ordenação de Baas-Kwakernaak [131], Baldwin-Guild [132] e um dos índices de Dubois-Prade [133].

4.3.3 Relações de Preferência Fuzzy

Amplamente difundidas na modelagem das preferências, as relações de preferência *fuzzy* são consideradas como um caminho fundamentado e prático pelos autores de [134] e utilizadas em diversos trabalhos, como por exemplo em [49-52,56,57,59-63,65,86,87,109,135-139].

Esta representação estabelece que as preferências da pessoa sobre as alternativas de X devem ser descritas através de uma matriz de relações de preferência

$$R_{C_k} = \left[X \times X, \mu_{R_{C_k}}(X_{ij}) \right] \quad X_i, X_j \in X, \quad (14)$$

com funções de pertinência $\mu_{R_{C_k}} : X \times X \rightarrow [0,1]$, onde $\mu_{R_{C_k}}(X_{ij})$ denota o grau de preferência ou intensidade da alternativa X_i sobre X_j , para um critério C_k . Por exemplo, o valor $\mu_{R_{C_k}}(X_{ij}) = 0,5$ indica indiferença entre X_i e X_j , $\mu_{R_{C_k}}(X_{ij}) = 1$ indica que X_i possui grande preferência em relação a X_j , e $\mu_{R_{C_k}}(X_{ij}) > 0,5$ indica que X_i possui preferência em relação a X_j . É usual assumir que $\mu_{R_{C_k}}(X_{ij}) + \mu_{R_{C_k}}(X_{ji}) = 1$ e $\mu_{R_{C_k}}(X_{ii}) = 0,5$.

Entretanto, é necessário indicar os resultados apresentados pressupõem que os elementos correspondentes às preferências são definidos diretamente pela pessoa, com base em avaliações e comparações entre as alternativas, o que às vezes, é bastante complicado. Levando isso em consideração, abaixo é apresentada uma abordagem para a preparação dos elementos de uma matriz de relações de preferência *fuzzy* com base apenas na avaliação das alternativas, sem a necessidade de realizar a comparação entre elas.

4.3.4 Função de Pertinência de Relação de Preferência Fuzzy Generalizada

Nesta abordagem, cada pessoa tem a possibilidade de estabelecer a correspondência entre as alternativas e as respectivas estimativas *fuzzy* ou linguísticas, com funções de pertinência $\mu[f_{C_k}(X_i)]$, $k = 1, \dots, q$, $X_i \in X$, que caracterizam as alternativas do ponto de vista da função objetivo $\tilde{F}_{C_k}(X_i)$. A disponibilidade das estimativas $\mu[f_{C_k}(X_i)]$, $k = 1, \dots, q$, $X_i \in X$, permite construir as quantidades $\eta\{\mu[f_{C_k}(X_i)], \mu[f_{C_k}(X_j)]\}$ e $\eta\{\mu[f_{C_k}(X_j)], \mu[f_{C_k}(X_i)]\}$, que correspondem aos graus de preferências $\mu[f_{C_k}(X_i)] \succeq \mu[f_{C_k}(X_j)]$ e $\mu[f_{C_k}(X_j)] \succeq \mu[f_{C_k}(X_i)]$, (\succeq significa que uma alternativa não é pior que outra), representadas da seguinte forma:

$$\eta\{\mu[f_{C_k}(X_i)], \mu[f_{C_k}(X_j)]\} = \sup_{f_{C_k}(X_i), f_{C_k}(X_j) \in F} \min\{\mu[f_{C_k}(X_i)], \mu[f_{C_k}(X_j)], \mu_R[f_{C_k}(X_j), f_{C_k}(X_i)]\}, \quad (15)$$

$$\eta\{\mu[f_{C_k}(X_j)], \mu[f_{C_k}(X_i)]\} = \sup_{f_{C_k}(X_i), f_{C_k}(X_j) \in F} \min\{\mu[f_{C_k}(X_i)], \mu[f_{C_k}(X_j)], \mu_R[f_{C_k}(X_j), f_{C_k}(X_i)]\}. \quad (16)$$

onde $\mu_R[f_{C_k}(X_i), f_{C_k}(X_j)]$ e $\mu_R[f_{C_k}(X_j), f_{C_k}(X_i)]$ são as funções de pertinência das relações de preferência *fuzzy* correspondentes.

Se F é o eixo numérico sobre o qual os valores da função objetivo são traçados, e R é a ordem natural (\succeq) ao longo de F , então (15) e (16) [42] podem ser reduzidas para as expressões

$$\eta\{\mu[f_{C_k}(X_i)], \mu[f_{C_k}(X_j)]\} = \mu_{R_{C_k}}(X_i, X_j) = \sup_{\substack{X_i, X_j \in X \\ f_{C_k}(X_i) \geq f_{C_k}(X_j)}} \min\{\mu[f_{C_k}(X_i)], \mu[f_{C_k}(X_j)]\}, \quad (17)$$

$$\eta\{\mu[f_{C_k}(X_j)], \mu[f_{C_k}(X_i)]\} = \mu_{R_{C_k}}(X_j, X_i) = \sup_{\substack{X_i, X_j \in X \\ f_{C_k}(X_j) \geq f_{C_k}(X_i)}} \min\{\mu[f_{C_k}(X_i)], \mu[f_{C_k}(X_j)]\}, \quad (18)$$

se o k -ésimo critério está associado à maximização. Se o k -ésimo critério está associado à minimização, então (17) e (18) são escritas com $f_{C_k}(X_i) \leq f_{C_k}(X_j)$ e $f_{C_k}(X_j) \leq f_{C_k}(X_i)$, respectivamente.

Através das relações entre (17) e (18), é possível avaliar os níveis das preferências das alternativas comparadas e, de tal forma, construir as matrizes das relações de preferência *fuzzy* (14). É necessário indicar que se as funções de pertinência $\mu[f_{C_k}(X_i)]$ e $\mu[f_{C_k}(X_j)]$ formam ápices planos (funções de pertinência planas ou trapezoidais), as alternativas não podem ser sempre distinguidas, o que gera regiões de incerteza das soluções. Isso é bastante importante, pois permite modelar situações em que não existe preferência explícita de uma alternativa sobre outra.

4.3.5 Exemplo de Aplicação

Como exemplo de construção das relações de preferência *fuzzy*, consideramos um conjunto das alternativas $X = \{X_1, \dots, X_3\}$, avaliadas por um grupo de especialistas $E = \{E_1, \dots, E_5\}$, de ponto de vista da maximização de dois critérios $C = \{C_1, C_2\}$. Assumimos que cada especialista utiliza uma forma diferente para expressar as suas preferências.

Nota: Doravante, o termo *critério* será utilizado em substituição ao termo *atributo*, conforme justificado no Capítulo 3.

Especialista E_1

Supondo que o especialista E_1 estabeleça as suas preferências com base no Esquema de Ordenação. Assim,

$$O_{C_1} = \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \quad X_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad O_{C_2} = \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \quad X_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

mostra para o Critério 1 que a alternativa X_2 é melhor que a alternativa X_1 , que por sua vez é melhor que a alternativa X_3 . Ao mesmo tempo, do ponto de vista do Critério 2, a alternativa X_1 é melhor que a alternativa X_2 , que é melhor que a alternativa X_3 .

Especialista E_2

Supondo que o especialista E_2 expresse as suas opiniões através de Relação de Preferência Multiplicativa. Assim,

$$A_{C_1} = \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \quad X_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & 1 & 1/2 & 1/5 \\ \hline X_2 & 2 & 1 & 1/4 \\ \hline X_3 & 5 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad A_{C_2} = \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \quad X_3 \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & 1 & 1/3 & 1/7 \\ \hline X_2 & 3 & 1 & 1/6 \\ \hline X_3 & 7 & 6 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

mostra para ambos os Critérios que a alternativa X_1 é pouco pior que a alternativa X_2 e razoavelmente pior que a alternativa X_3 , e que a alternativa X_2 é razoavelmente pior que a alternativa X_3 .

Especialista E_3

Supondo que o especialista E_3 se expresse através de Função de Utilidade. Assim,

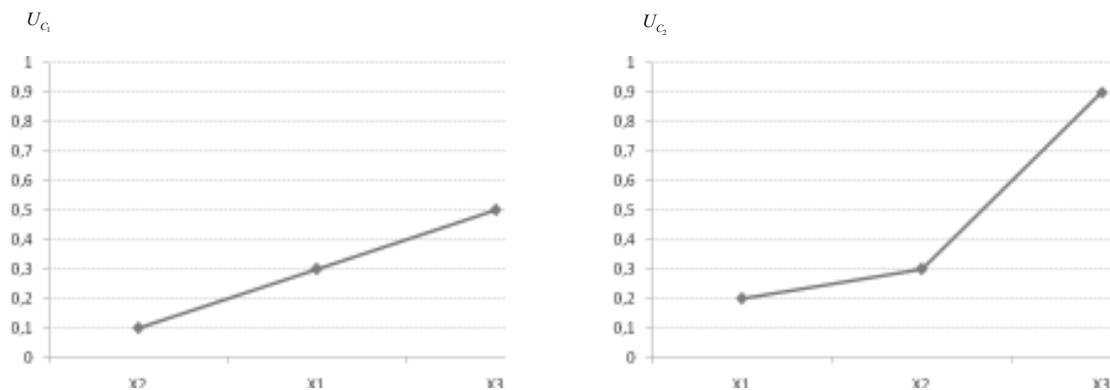


Figura 5: Gráficos das Funções de Utilidade

que resulta em:

$$U_{C_1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline 0,3 & 0,1 & 0,5 \\ \hline \end{array} \quad U_{C_2} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline 0,2 & 0,3 & 0,9 \\ \hline \end{array}$$

Para o Critério 1, a alternativa X_3 é pouco melhor que a alternativa X_1 , que por sua vez é pouco melhor que a alternativa X_2 ; e para o Critério 2 que a alternativa X_3 é muito melhor que a alternativa X_2 , que é pouco melhor que a alternativa X_1 .

Especialista E_4

Supondo que o especialista E_4 expresse as suas opiniões através de Relação de Preferência *Fuzzy*, indicando diretamente os elementos das matrizes das relações *fuzzy*. Assim,

$$R_{C_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ \hline X_2 & 0,6 & 0,5 & 0,3 \\ \hline X_3 & 0,8 & 0,7 & 0,5 \\ \hline \end{array} \quad R_{C_2} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,1 & 0,3 \\ \hline X_2 & 0,9 & 0,5 & 0,2 \\ \hline X_3 & 0,7 & 0,8 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

mostra para o Critério 1 que a alternativa X_1 é pouco pior que a alternativa X_2 e muito pior que a alternativa X_3 , e que a alternativa X_2 é muito pior que e a alternativa X_3 ; e para o Critério 2 que a alternativa X_1 é muito pior que a alternativa X_2 e muito pior que a alternativa X_3 , e que a alternativa X_2 é muito pior que e a alternativa X_3 .

Especialista E_5

Supondo que o especialista E_5 expresse as suas preferências através de Relação de Preferência *Fuzzy*, obtendo os elementos das matrizes de relações de preferência através de comparação dos números *fuzzy* que refletem as correspondentes alternativas. As funções de pertinência para diferentes estimativas são as seguintes:

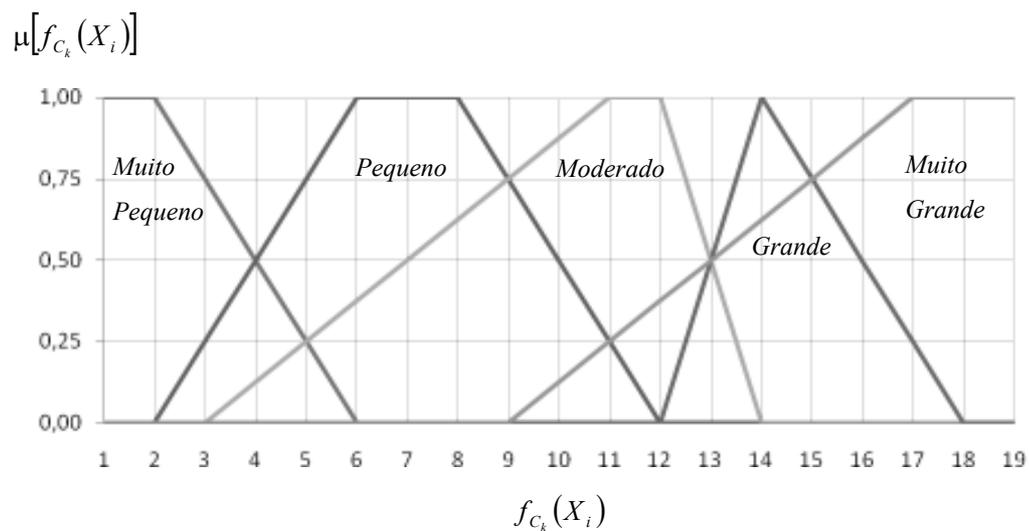


Figura 6: Gráfico das Funções de Pertinência

Assumindo que as alternativas tenham recebido as seguintes qualificações, levando em conta o 1º critério:

$$f_{C_1}(X_1) = \text{Moderado}; f_{C_1}(X_2) = \text{Pequeno}; f_{C_1}(X_3) = \text{Muito Pequeno}$$

Da Figura 6, extraem-se os valores:

		$\mu[f_{C_1}(X_1)]$																							
		min	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			
$\mu[f_{C_1}(X_2)]$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,75	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,75	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,75	0,75	0,75	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Aplicando (17), para obter o supremo da porção superior da matriz acima, incluindo a diagonal, correspondente a $f_{C_1}(X_1) \geq f_{C_1}(X_2)$:

$$\mu_{R_{C_1}}(X_1, X_2) = \sup_{\substack{X_1, X_2 \in X \\ f_{C_1}(X_1) \geq f_{C_1}(X_2)}} \min\{\mu[f_{C_1}(X_1)], \mu[f_{C_1}(X_2)]\} = 1$$

Aplicando (18), para obter o supremo da porção inferior da mesma matriz, incluindo a diagonal, correspondente a $f_{C_1}(X_2) \geq f_{C_1}(X_1)$:

$$\mu_{R_{C_1}}(X_2, X_1) = \sup_{\substack{X_1, X_2 \in X \\ f_{C_1}(X_2) \geq f_{C_1}(X_1)}} \min\{\mu[f_{C_1}(X_2)], \mu[f_{C_1}(X_1)]\} = 0,75$$

$$\mu[f_{C_1}(X_1)]$$

min	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,75	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,75	0,75	0,75	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,50	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,25	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\mu[f_{C_1}(X_3)]$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Aplicando (17), para obter o supremo da porção superior da matriz acima, incluindo a diagonal, correspondente a $f_{C_1}(X_1) \geq f_{C_1}(X_3)$:

$$\mu_{R_{C_1}}(X_1, X_3) = \sup_{\substack{X_1, X_3 \in X \\ f_{C_1}(X_1) \geq f_{C_1}(X_3)}} \min\{\mu[f_{C_1}(X_1)], \mu[f_{C_1}(X_3)]\} = 1$$

Aplicando (18), para obter o supremo da porção inferior da mesma matriz, incluindo a diagonal, correspondente a $f_{C_1}(X_3) \geq f_{C_1}(X_1)$:

$$\mu_{R_{C_1}}(X_3, X_1) = \sup_{\substack{X_1, X_3 \in X \\ f_{C_1}(X_3) \geq f_{C_1}(X_1)}} \min\{\mu[f_{C_1}(X_3)], \mu[f_{C_1}(X_1)]\} = 0,25$$

		$\mu[f_{C_1}(X_2)]$																									
		min	0,00	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,00	1,00	0,75	0,50	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00				
$\mu[f_{C_1}(X_3)]$	1,00	0,00	0,00	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,00	1,00	0,75	0,50	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			
	1,00	0,00	0,00	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,00	1,00	0,75	0,50	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,75	0,00	0,00	0,00	0,25	0,50	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,50	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	0,50	0,00	0,00	0,00	0,25	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	0,25	0,00	0,00	0,00	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Aplicando (17), para obter o supremo da porção superior da matriz acima, incluindo a diagonal, correspondente a $f_{C_1}(X_2) \geq f_{C_1}(X_3)$:

$$\mu_{R_{C_1}}(X_2, X_3) = \sup_{\substack{X_2, X_3 \in X \\ f_{C_1}(X_2) \geq f_{C_1}(X_3)}} \min\{\mu[f_{C_1}(X_2)], \mu[f_{C_1}(X_3)]\} = 1$$

Aplicando (18), para obter o supremo da porção inferior da mesma matriz, incluindo a diagonal, correspondente a $f_{C_1}(X_3) \geq f_{C_1}(X_2)$:

$$\mu_{R_{C_1}}(X_3, X_2) = \sup_{\substack{X_2, X_3 \in X \\ f_{C_1}(X_3) \geq f_{C_1}(X_2)}} \min\{\mu[f_{C_1}(X_3)], \mu[f_{C_1}(X_2)]\} = 0,5$$

A matriz de Relações de Preferência *Fuzzy* pode ser então construída:

Aplicando (17), para obter o supremo da porção superior da matriz acima, incluindo a diagonal, correspondente a $f_{C_1}(X_1) \geq f_{C_1}(X_3)$:

$$\mu_{R_{C_1}}(X_1, X_3) = \sup_{\substack{X_1, X_3 \in X \\ f_{C_1}(X_1) \geq f_{C_1}(X_3)}} \min\{\mu[f_{C_1}(X_1)], \mu[f_{C_1}(X_3)]\} = 0$$

Aplicando (18), para obter o supremo da porção inferior da mesma matriz, incluindo a diagonal, correspondente a $f_{C_1}(X_3) \geq f_{C_1}(X_1)$:

$$\mu_{R_{C_1}}(X_3, X_1) = \sup_{\substack{X_1, X_3 \in X \\ f_{C_1}(X_3) \geq f_{C_1}(X_1)}} \min\{\mu[f_{C_1}(X_3)], \mu[f_{C_1}(X_1)]\} = 1$$

$\mu[f_{C_2}(X_2)]$

min	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,50	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,75	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,75	0,75	0,75	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,50	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,38	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,25	0,00	0,00	0,00	0,13	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Aplicando (17), para obter o supremo da porção superior da matriz acima, incluindo a diagonal, correspondente a $f_{C_1}(X_2) \geq f_{C_1}(X_3)$:

$$\mu_{R_{C_1}}(X_2, X_3) = \sup_{\substack{X_2, X_3 \in X \\ f_{C_1}(X_2) \geq f_{C_1}(X_3)}} \min\{\mu[f_{C_1}(X_2)], \mu[f_{C_1}(X_3)]\} = 0,5$$

Aplicando (18), para obter o supremo da porção inferior da mesma matriz, incluindo a diagonal, correspondente a $f_{C_1}(X_3) \geq f_{C_1}(X_2)$:

$$\mu_{R_{C_1}}(X_3, X_2) = \sup_{\substack{X_2, X_3 \in X \\ f_{C_1}(X_3) \geq f_{C_1}(X_2)}} \min\{\mu[f_{C_1}(X_3)], \mu[f_{C_1}(X_2)]\} = 1$$

A matriz de Relações de Preferência *Fuzzy* pode ser então construída:

	X_1	X_2	X_3
$R_{C_2} =$	1	0,75	0
X_2	1	1	0,5
X_3	1	1	1

Para o Critério 2, a alternativa X_1 é pouco pior que a alternativa X_2 e indiscutivelmente pior que a alternativa X_3 , e a alternativa X_2 é pior que a alternativa X_3 .

4.4 Uniformização das Preferências

Para processar as informações representadas em diferentes formas (estruturas de preferência descritas), é necessário realizar a redução das estruturas a uma única base. Levando em consideração as vantagens expostas pelos autores de [44,89,109,111], as diferentes estruturas de preferências serão reduzidas a relações de preferência *fuzzy*.

O processo de uniformização das preferências está associado à aplicação de métodos de transformação, descritos em [44,89,111]. O método de transformação para as estruturas de representação baseadas em relações de preferência *fuzzy* obtidas a partir de funções de pertinência generalizadas também é apresentado.

- Transformação de Esquema de Ordenação e Função de Utilidade

Seja $\lambda_{C_k}(X_i)$ a avaliação associada à alternativa X_i , pertencente ao conjunto de alternativas X , que indica o seu desempenho com base no critério C_k . O equivalente *fuzzy* da intensidade de preferência de X_i sobre outra alternativa X_j , $r_{C_k}(X_{ij})$, é dada pela seguinte função de transformação:

$$r_{C_k}(X_{ij}) = \varphi(\lambda_{C_k}(X_i), \lambda_{C_k}(X_j)) = \frac{1}{2} \{ 1 + \psi[\lambda_{C_k}(X_i), \lambda_{C_k}(X_j)] - \psi[\lambda_{C_k}(X_j), \lambda_{C_k}(X_i)] \} \quad (19)$$

onde ψ é uma função que verifica

$$1) \psi(z, z) = 0,5, \quad \forall z \in R;$$

2) ψ é não-decrescente no primeiro argumento e não-crescente no segundo argumento.

Por exemplo, se $\lambda_{C_k}(X_i) = o_{C_k}(X_i)$ representa a ordenação da preferência da alternativa X_i e $\psi(x, y) = \frac{y-x}{2(n-1)}$, então (19) pode ser escrita como

$$r_{C_k}(X_{ij}) = f^1[o_{C_k}(X_i), o_{C_k}(X_j)] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{o_{C_k}(X_j) - o_{C_k}(X_i)}{(n-1)} \right]. \quad (20)$$

Se $\lambda_{C_k}(X_i) = u_{C_k}(X_i)$ representa o valor de utilidade da alternativa X_i e $\psi(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$, então (19) pode ser escrita como

$$r_{C_k}(X_{ij}) = f^2[u_{C_k}(X_i), u_{C_k}(X_j)] = \frac{[u_{C_k}(X_i)]^2}{[u_{C_k}(X_i)]^2 + [u_{C_k}(X_j)]^2}. \quad (21)$$

- Transformação de Relação de Preferência Multiplicativa

Seja $A_{C_k} = a_{C_k}(X_{ij})$ a relação de preferência multiplicativa associada à alternativa X_i quando comparada a outra alternativa X_j , $X_i, X_j \in X$, com base no critério C_k . A relação de preferência *fuzzy* correspondente $r_{C_k}(X_{ij})$, é dada por:

$$r_{C_k}(X_{ij}) = f[a_{C_k}(X_{ij})] = \frac{1}{2} \{ 1 + \log_9[a_{C_k}(X_{ij})] \}. \quad (22)$$

- Transformação de Relação de Preferência *Fuzzy*

A abordagem proposta em [42], gera uma matriz com valores unitários na diagonal, diferente portanto, do padrão da matriz tradicional que utiliza valor 0,5. A transformação é obtida através da função de transformação

$$r_{C_k}(X_{ij}) = \frac{\mu_{R_{C_k}}(X_i, X_j)}{\mu_{R_{C_k}}(X_i, X_j) + \mu_{R_{C_k}}(X_j, X_i)}. \quad (23)$$

4.4.1 Exemplo de Aplicação

Uniformizar as estruturas de preferências obtidas no Exemplo 4.3.5, reduzindo-as a relações de preferência *fuzzy*.

Aplicando as preferências de E_1 em (20), obtemos:

$$R_{C_1} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & 0,5 & 0,25 & 0,75 \\ \hline X_2 & 0,75 & 0,5 & 1 \\ \hline X_3 & 0,25 & 0 & 0,5 \\ \hline \end{array} \quad R_{C_2} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & 0,5 & 0,75 & 1 \\ \hline X_2 & 0,25 & 0,5 & 0,75 \\ \hline X_3 & 0 & 0,25 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_1}(X_1, X_1) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(o_{C_1}(X_1) - o_{C_1}(X_1))}{(3-1)} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(2-2)}{(3-1)} \right] = 0,5$ e

$$r_{C_1}(X_1, X_2) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(o_{C_1}(X_2) - o_{C_1}(X_1))}{(3-1)} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(1-2)}{(3-1)} \right] = 0,25.$$

Aplicando as preferências de E_2 em (22), obtemos:

$$R_{C_1} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & 0,5 & 0,3423 & 0,1338 \\ \hline X_2 & 0,6577 & 0,5 & 0,1845 \\ \hline X_3 & 0,8662 & 0,8155 & 0,5 \\ \hline \end{array} \quad R_{C_2} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & 0,5 & 0,25 & 0,0572 \\ \hline X_2 & 0,75 & 0,5 & 0,0923 \\ \hline X_3 & 0,9428 & 0,9077 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_1}(X_{11}) = \frac{1}{2} [1 + \log_9(a_{C_1}(X_{11}))] = \frac{1}{2} [1 + \log_9(1/2)] = 0,5$ e

$$r_{C_1}(X_{12}) = \frac{1}{2} [1 + \log_9(a_{C_1}(X_{12}))] = \frac{1}{2} [1 + \log_9(1/2)] = 0,3423.$$

Aplicando as preferências de E_3 em (21), obtemos:

$$R_{C_1} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & 0,5 & 0,9 & 0,2647 \\ \hline X_2 & 0,1 & 0,5 & 0,0385 \\ \hline X_3 & 0,7353 & 0,9615 & 0,5 \\ \hline \end{array} \quad R_{C_2} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & 0,5 & 0,3077 & 0,0471 \\ \hline X_2 & 0,6923 & 0,5 & 0,1 \\ \hline X_3 & 0,9529 & 0,9 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_1}(X_{11}) = \frac{(u_{C_1}(X_1))^2}{(u_{C_1}(X_1))^2 + (u_{C_1}(X_1))^2} = \frac{(0,3)^2}{(0,3)^2 + (0,3)^2} = 0,5$ e

$$r_{C_1}(X_{12}) = \frac{(u_{C_1}(X_1))^2}{(u_{C_1}(X_1))^2 + (u_{C_1}(X_2))^2} = \frac{(0,3)^2}{(0,3)^2 + (0,1)^2} = 0,9.$$

Aplicando as preferências de E_5 em (23), obtemos:

	X_1	X_2	X_3	
$R_{C_1} =$	X_1	0,5	0,5714	0,8
	X_2	0,4286	0,5	0,6667
	X_3	0,2	0,3333	0,5

	X_1	X_2	X_3	
$R_{C_2} =$	X_1	0,5	0,4286	0
	X_2	0,5714	0,5	0,3333
	X_3	1	0,6667	0,5

Por exemplo, $r_{C_1}(X_{11}) = \frac{\mu_{R_{C_1}}(X_1, X_1)}{\mu_{R_{C_1}}(X_1, X_1) + \mu_{R_{C_1}}(X_1, X_1)} = \frac{1}{1+1} = 0,5$ e

$$r_{C_1}(X_{12}) = \frac{\mu_{R_{C_1}}(X_1, X_2)}{\mu_{R_{C_1}}(X_1, X_2) + \mu_{R_{C_1}}(X_2, X_1)} = \frac{1}{1+0,75} = 0,5714.$$

4.5 Considerações Finais

Neste Capítulo foram apresentadas diversas opções para a modelagem das preferências dos decisores, abrangendo as abordagens quantitativas e qualitativas. Dentre os métodos para construção de preferências apresentados, destaca-se o método de construção de Função de Pertinência de Relação de Preferência *Fuzzy* Generalizada, por suas características amigáveis e pela proximidade da forma subjetiva de expressão das apreciações humanas.

Entretanto, é preciso dizer que mesmo diante de várias possibilidades de expressão, a pessoa envolvida na tomada de decisão pode não se sentir à vontade ou mesmo não saber se posicionar e conseqüentemente se expressar diante de uma determinada situação. Desta forma, pode haver situações em que não seja possível construir relações de preferência completas [140-

142]. Essa questão, apesar de importante e significativa do ponto de vista de aplicações práticas, não faz parte do escopo deste trabalho.

5 TOMADA DE DECISÃO EM AMBIENTE *FUZZY* INDIVIDUAL E EM GRUPO

5.1 Considerações Iniciais

Construídas as preferências sobre as alternativas, através da avaliação e comparação ou simplesmente avaliação das alternativas, a tomada de decisão prossegue com a preparação das informações para posterior análise. Esta preparação está associada à redução direta ou sequencial da região de incerteza das soluções e inclui duas etapas: a agregação das preferências e a ordenação das alternativas.

Na etapa de agregação, é necessário escolher inicialmente uma das modalidades possíveis para agregar as preferências individuais sobre as alternativas, levando em conta um ou mais critérios, ou levando em conta as preferências de grupo, e também os operadores de agregação desejados. Durante a agregação, é possível priorizar, valorizar ou distinguir pessoas e/ou critérios através da atribuição de coeficientes de importância associados a aspectos como conhecimento do problema, importância e influência na corporação, etc.

Na etapa de ordenação, as alternativas são ordenadas em função de critérios (particulares a cada operador de ordenação) associados à intensidade das preferências expressas sobre cada alternativa.

Estas etapas, em conjunto com as técnicas apresentadas nos Capítulos anteriores, serão aplicadas às modalidades de tomada de decisão monocritério e multicritério, de caráter individual e de grupo.

5.2 Agregação de Preferências

Dentre os métodos de agregação existentes, é possível apontar as escalas de conversão de Chen e Hwang [119], o algoritmo de Baas e Kwakernaak [131], o método de avaliação *fuzzy* de Cheng, o método *fuzzy* Delphi [143] e o método de agregação de Yager [144]. Basicamente, a agregação das preferências pode seguir os seguintes caminhos:

- Agregação de preferências individuais levando em conta cada critério, em preferências individuais levando em conta múltiplos critérios, e na sequência em preferências de grupo levando em conta estes mesmos critérios;
- Agregação de preferências individuais levando em conta cada critério, em preferências de grupo separadas por critério, e na sequência em preferências de grupo levando em conta múltiplos critérios;
- Agregação de preferências individuais levando em conta cada critério, diretamente em preferências de grupo levando em conta múltiplos critérios simultaneamente.

Nos procedimentos de agregação, é possível estabelecer a priorização de critérios e também de pessoas. Essa priorização é realizada através da atribuição de coeficientes de importância (usualmente denominados pesos), que distinguem a importância, o impacto, a influência e/ou dominância de determinados critérios e/ou pessoas sobre os demais. Esses pesos podem ser definidos pelos próprios decisores ou por um grupo moderador (situações que serão detalhadas no Capítulo 6).

A seguir, são apresentados alguns métodos de agregação, orientados de forma a atender os caminhos mencionados:

- Agregação baseada no operador Soma

A agregação baseada na soma realiza a soma ponderada das preferências sobre as alternativas, conforme abaixo:

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências individuais levando em conta múltiplos critérios

$$r_{C_1, \dots, q}^{E_i}(X_{ij}) = \sum_{k=1}^q r_{C_k}^{E_i}(X_{ij}) \omega_{C_k}, \quad (24)$$

onde $r_{C_1, \dots, q}^{E_l}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pela pessoa E_l , levando em conta q critérios; ω_{C_k} é o coeficiente de importância associado a cada critério tal que $\omega_{C_k} \in [0,1]$ e $\sum \omega_{C_k} = 1$.

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências de grupo levando em conta um critério

$$r_{C_k}^{E_1, \dots, m}(X_{ij}) = \sum_{l=1}^m r_{C_k}^{E_l}(X_{ij}) \omega_{E_l}, \quad (25)$$

onde $r_{C_k}^{E_1, \dots, m}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pelo grupo de m pessoas, levando em conta um único critério C_k ; ω_{E_l} é o coeficiente de importância associado a cada pessoa tal que $\omega_{E_l} \in [0,1]$ e $\sum \omega_{E_l} = 1$.

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências de grupo levando em conta múltiplos critérios

Pode ser realizada aplicando (25) sobre os resultados obtidos em (24) ou vice-versa.

- Agregação baseada no operador OWA

O operador de média ponderada dos argumentos ordenados OWA (*Ordered Weighted Averaging*), inicialmente definido por Yager [145], foi utilizado em vários trabalhos, como por exemplo em [146-149]. O operador OWA realiza a agregação das preferências priorizando as que apresentam maior intensidade, conforme um quantificador linguístico Q . Uma vez definido o quantificador, são calculados os pesos de ϕ_Q , associados aos critérios e às pessoas. Uma possível expressão para determinação desses pesos é:

$$\omega_Q(k) = Q\left(\frac{k}{n}\right) - Q\left(\frac{k-1}{n}\right), \quad k = 1, \dots, n \quad (26)$$

onde n representa a quantidade de critérios ou pessoas.

Alguns exemplos de quantificadores linguísticos podem ser: “ao menos a metade”, “a maioria” e “tantos quanto possível”, definidos pelos parâmetros $(a;b)$: $(0,3;0,8)$, $(0;0,5)$, $(0,5;1)$ respectivamente. A seguir uma possível relação, com a representação gráfica para os valores citados:

$$Q(r) = \begin{cases} 0, & \text{se } r < a \\ \frac{r-a}{b-a}, & \text{se } a \leq r \leq b \\ 1, & \text{se } r > b \end{cases} \quad a, b, r \in [0,1] \quad (27)$$

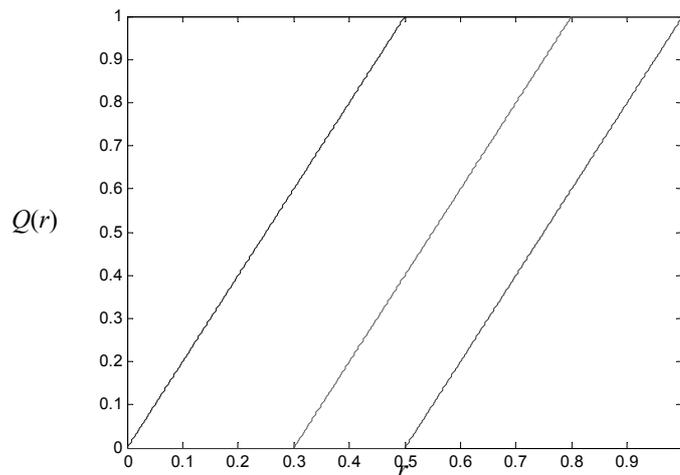


Figura 7: Gráfico dos Quantificadores linguísticos

Dessa forma, a agregação baseada no operador OWA processa as preferências conforme segue:

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências individuais levando em conta múltiplos critérios

$$r_{C_{1,\dots,q}}^{E_l}(X_{ij}) = \phi_Q(r_{C_1}^{E_l}(X_{ij}), \dots, r_{C_q}^{E_l}(X_{ij})) = \sum_{k=1}^q r_{c_{[k]}}^{E_l}(X_{ij}) \omega_Q(k), \quad (28)$$

onde $r_{C_{1,\dots,q}}^{E_l}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pela pessoa E_l , levando em conta q critérios; $r_{c_{[k]}}^{E_l}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pela pessoa E_l , correspondente ao critério classificado na k -ésima posição; $\omega_Q(k)$ é o peso associado ao critério classificado na k -ésima posição tal que $\omega_Q(k) \in [0,1]$ e $\sum \omega_Q(k) = 1$.

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências de grupo levando em conta um critério

$$r_{C_k}^{E_{1,\dots,m}}(X_{ij}) = \phi_Q(r_{C_k}^{E_1}(X_{ij}), \dots, r_{C_k}^{E_m}(X_{ij})) = \sum_{l=1}^m r_{c_k^{[l]}}^{E_{[l]}}(X_{ij}) \omega_Q(l), \quad (29)$$

onde $r_{C_k}^{E_{1,\dots,m}}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pelo grupo de m pessoas, levando em conta um único critério C_k ; $r_{c_k^{[l]}}^{E_{[l]}}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pela pessoa classificada na l -ésima posição, levando em conta um único critério C_k ; $\omega_Q(l)$ é o peso associado à pessoa classificada na l -ésima posição tal que $\omega_Q(l) \in [0,1]$ e $\sum \omega_Q(l) = 1$.

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências de grupo levando em conta múltiplos critérios

Pode ser realizada aplicando (29) sobre os resultados obtidos em (28) ou vice-versa.

Variações do operador OWA foram propostas como o operador linguístico de média de pesos ordenados LOWA (*Linguistic OWA*), em [146] e o operador FLOWA (*Fuzzy LOWA*) em [150].

- Agregação baseada no operador Mínimo

O operador mínimo (*min*) é tradicionalmente usado na teoria dos conjuntos *fuzzy* para agregar as condições às implicações de uma regra. Na agregação das relações de preferências, o operador *min* preserva a apreciação mais pessimista dentre todas as pessoas, considerando suas respectivas importâncias.

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências individuais levando em conta múltiplos critérios

$$r_{C_{1,\dots,q}}^{E_l}(X_{ij}) = \min_{k=1,\dots,q} \{r_{C_k}^{E_l}(X_{ij}) \omega_{C_k}\}, \quad (30)$$

onde $r_{C_{1,\dots,q}}^{E_l}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pela pessoa E_l , levando em conta q critérios; $r_{C_k}^{E_l}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pela pessoa E_l , com base no critério C_k ; ω_{C_k} é o coeficiente de importância associado a cada critério tal que $\omega_{C_k} \in [0,1]$ e $\sum \omega_{C_k} = 1$.

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências de grupo levando em conta um critério

$$r_{C_k}^{E_{1,\dots,m}}(X_{ij}) = \min_{l=1,\dots,q} \{r_{C_k}^{E_l}(X_{ij}) \omega_{E_l}\}, \quad (31)$$

onde $r_{C_k}^{E_{1...m}}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pelo grupo de m pessoas, levando em conta um único critério C_k ; $r_{C_k}^{E_l}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pela pessoa E_l , com base em C_k ; ω_{E_l} é o coeficiente de importância associado a cada pessoa tal que $\omega_{E_l} \in [0,1]$ e $\sum \omega_{E_l} = 1$.

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências de grupo levando em conta múltiplos critérios

Pode ser realizada aplicando (31) sobre os resultados obtidos em (30) ou vice-versa.

- Agregação baseada no operador Produto

Este operador também é bastante utilizado na teoria dos conjuntos *fuzzy*, como alternativa à agregação das condições às implicações de uma regra. Na agregação das relações de preferências, é realizado o produto das apreciações, resultando numa posição mais conservadora sobre as preferências de todas as pessoas, considerando as suas respectivas importâncias.

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências individuais levando em conta múltiplos critérios

$$r_{C_{1...q}}^{E_l}(X_{ij}) = \prod_{k=1}^q r_{C_k}^{E_l}(X_{ij}) \omega_{C_k} \quad (32)$$

onde $r_{C_{1...q}}^{E_l}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pela pessoa E_l , levando em conta q critérios; $r_{C_k}^{E_l}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pela pessoa E_l , com base no critério C_k ; ω_{C_k} é o coeficiente de importância associado a cada critério tal que $\omega_{C_k} \in [0,1]$ e $\sum \omega_{C_k} = 1$.

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências de grupo levando em conta um critério

$$r_{C_k}^{E_1, \dots, E_m}(X_{ij}) = \prod_{l=1}^m r_{C_k}^{E_l}(X_{ij}) \omega_{E_l}, \quad (33)$$

onde $r_{C_k}^{E_1, \dots, E_m}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pelo grupo de m pessoas, levando em conta um único critério C_k ; $r_{C_k}^{E_l}(X_{ij})$ representa a preferência da alternativa X_i sobre a alternativa X_j , definida pela pessoa E_l , com base em C_k ; ω_{E_l} é o coeficiente de importância associado a cada pessoa tal que $\omega_{E_l} \in [0,1]$ e $\sum \omega_{E_l} = 1$.

- Agregação de preferências individuais para cada critério em preferências de grupo levando em conta múltiplos critérios

Pode ser realizada aplicando (33) sobre os resultados obtidos em (32) ou vice-versa.

5.2.1 Exemplo de Aplicação

Para exemplificar a aplicação dos métodos de agregação apresentados, são consideradas as relações de preferência *fuzzy* dos especialistas 1 e 2, do Exemplo 4.4.1.

$$R_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,25 & 0,75 \\ X_2 & 0,75 & 0,5 & 1 \\ X_3 & 0,25 & 0 & 0,5 \end{array} \quad R_{C_2}^{E_1} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,75 & 1 \\ X_2 & 0,25 & 0,5 & 0,75 \\ X_3 & 0 & 0,25 & 0,5 \end{array}$$

$$R_{C_1}^{E_2} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3423 & 0,1338 \\ X_2 & 0,6577 & 0,5 & 0,1845 \\ X_3 & 0,8662 & 0,8155 & 0,5 \end{array} \quad R_{C_2}^{E_2} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,25 & 0,0572 \\ X_2 & 0,75 & 0,5 & 0,0923 \\ X_3 & 0,9428 & 0,9077 & 0,5 \end{array}$$

a. Agregação baseada no operador Soma

Na aplicação da agregação baseada no operador soma, serão considerados os seguintes coeficientes de importância para critérios e especialistas:

$$\omega_{C_1} = 0,4 \text{ e } \omega_{C_2} = 0,6$$

$$\omega_{E_1} = 0,4 \text{ e } \omega_{E_2} = 0,6$$

i) Agregação das preferências individuais, levando em conta todos os critérios simultaneamente

Aplicando (24) às preferências do Especialista 1, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_{1,2}}^{E_1} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,55 & 0,9 \\ X_2 & 0,45 & 0,5 & 0,85 \\ X_3 & 0,1 & 0,15 & 0,5 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_1}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = 0,5$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_1}(X_{12}) = 0,25 \times 0,4 + 0,75 \times 0,6 = 0,55.$$

Aplicando (24) às preferências do Especialista 2, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_{1,2}}^{E_2} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,2869 & 0,0878 \\ X_2 & 0,7131 & 0,5 & 0,1292 \\ X_3 & 0,9122 & 0,8708 & 0,5 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_2}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = 0,5$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_2}(X_{12}) = 0,3423 \times 0,4 + 0,25 \times 0,6 = 0,2869.$$

ii) Agregação das preferências de grupo levando em conta cada critério

Aplicando (25) às preferências dos Especialista 1 e 2, levando em conta o primeiro critério, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_1}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3054 & 0,3803 \\ X_2 & 0,6946 & 0,5 & 0,5107 \\ X_3 & 0,6197 & 0,4893 & 0,5 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_1}^{E_{1,2}}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = 0,5$ e

$$r_{C_1}^{E_{1,2}}(X_{12}) = 0,25 \times 0,4 + 0,3423 \times 0,6 = 0,3054 .$$

Aplicando (25) às preferências dos Especialista 1 e 2, levando em conta o segundo critério, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_2}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,45 & 0,4343 \\ X_2 & 0,55 & 0,5 & 0,3554 \\ X_3 & 0,5657 & 0,6446 & 0,5 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_2}^{E_{1,2}}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = 0,5$ e

$$r_{C_2}^{E_{1,2}}(X_{12}) = 0,75 \times 0,4 + 0,25 \times 0,6 = 0,45 .$$

iii) Agregação das preferências de grupo levando em conta todos os critérios simultaneamente

Aplicando (25) às preferências individuais agregadas para todos os critérios, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_{1,2}}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3921 & 0,4127 \\ X_2 & 0,6079 & 0,5 & 0,4175 \\ X_3 & 0,5873 & 0,5825 & 0,5 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = 0,5$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{12}) = 0,3054 \times 0,4 + 0,45 \times 0,6 = 0,3921.$$

A aplicação de (24) às preferências de grupo agregadas por critério levará ao mesmo resultado.

b. Agregação baseada no operador OWA

Para a aplicação da agregação com base no operador OWA, será utilizado o quantificador linguístico “a maioria” para determinação dos coeficientes de importância. Desta forma, com base em (26), são calculados os pesos associados a critérios e especialistas:

$$\omega_Q(1) = Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q\left(\frac{1-1}{2}\right) = \frac{0,5-0,3}{0,8-0,3} - 0 = 0,4$$

$$\omega_Q(2) = Q\left(\frac{2}{2}\right) - Q\left(\frac{2-1}{2}\right) = 1 - \frac{0,5-0,3}{0,8-0,3} = 0,6$$

i) Agregação das preferências individuais, levando em conta todos os critérios simultaneamente

As preferências de E_1 podem ser agregadas para todos os critérios, conforme (28), que permite obter

$$R_{C_{1,2}}^{E_1} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,45 & 0,85 \\ X_2 & 0,45 & 0,5 & 0,85 \\ X_3 & 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_1}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = 0,5$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_1}(X_{12}) = 0,75 \times 0,4 + 0,25 \times 0,6 = 0,45.$$

As preferências de E_2 podem ser agregadas para todos os critérios, conforme (28), que permite obter

$$R_{C_{1,2}}^{E_2} =$$

	X_1	X_2	X_3
X_1	0,5	0,2869	0,0878
X_2	0,6946	0,5	0,1292
X_3	0,8969	0,8524	0,5

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_2}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = 0,5$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_2}(X_{12}) = 0,3423 \times 0,4 + 0,25 \times 0,6 = 0,2869.$$

ii) Agregação das preferências de grupo levando em conta um critério

Preferências de grupo agregadas com base no critério C_1 , conforme (29), que permite construir

$$R_{C_1}^{E_{1,2}} =$$

	X_1	X_2	X_3
X_1	0,5	0,2869	0,3803
X_2	0,6946	0,5	0,5107
X_3	0,4965	0,3262	0,5

Por exemplo, $r_{C_1}^{E_{1,2}}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = 0,5$ e

$$r_{C_1}^{E_{1,2}}(X_{12}) = 0,25 \times 0,4 + 0,3423 \times 0,6 = 0,2869.$$

Preferências de grupo agregadas com base no critério C_2 , conforme (29), que permite construir

$$R_{C_2}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,45 & 0,4343 \\ X_2 & 0,45 & 0,5 & 0,3554 \\ X_3 & 0,3771 & 0,5131 & 0,5 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_2}^{E_{1,2}}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = 0,5$ e

$$r_{C_2}^{E_{1,2}}(X_{12}) = 0,75 \times 0,4 + 0,25 \times 0,6 = 0,45.$$

iii) Agregação das preferências de grupo levando em conta todos os critérios simultaneamente

Aplicando (29) às preferências individuais agregadas para todos os critérios, podemos obter

$$R_{C_{1,2}}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3521 & 0,3927 \\ X_2 & 0,5479 & 0,5 & 0,4175 \\ X_3 & 0,4187 & 0,4009 & 0,5 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = 0,5$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{12}) = 0,45 \times 0,4 + 0,2869 \times 0,6 = 0,3521.$$

Neste caso, a aplicação de (28) às preferências de grupo agregadas por critério levará a um resultado diferente, devido ao procedimento de ordenação. Em particular,

$$R_{C_{1,2}}^{E_{1,\dots,5}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3521 & 0,4019 \\ X_2 & 0,5479 & 0,5 & 0,4175 \\ X_3 & 0,4249 & 0,4009 & 0,5 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 + 0,5 \times 0,6 = 0,5$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{12}) = 0,2869 \times 0,4 + 0,45 \times 0,6 = 0,3521 .$$

c. Agregação baseada no operador Mínimo

Na aplicação do operador mínimo, serão considerados os mesmos coeficientes de importância utilizados na agregação baseada no operador soma.

i) Agregação das preferências individuais, levando em conta todos os critérios simultaneamente

Aplicando (30) às preferências do Especialista 1, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_{1,2}}^{E_1} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ X_2 & 0,15 & 0,2 & 0,4 \\ X_3 & 0 & 0 & 0,2 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_1}(X_{11}) = \min\{0,5 \times 0,4; 0,5 \times 0,6\} = 0,2$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_1}(X_{12}) = \min\{0,25 \times 0,4; 0,75 \times 0,6\} = 0,1 .$$

Aplicando (23), obtemos

$$R_{C_{1,2}}^{E_1} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,4 & 1 \\ X_2 & 0,6 & 0,5 & 1 \\ X_3 & 0 & 0 & 0,5 \end{array}$$

Aplicando (30) às preferências do Especialista 2, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_{1,2}}^{E_2} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,2 & 0,1369 & 0,0343 \\ X_2 & 0,2631 & 0,2 & 0,0554 \\ X_3 & 0,3465 & 0,3262 & 0,2 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_2}(X_{11}) = \min\{0,5 \times 0,4; 0,5 \times 0,6\} = 0,5$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_2}(X_{12}) = \min\{0,3423 \times 0,4; 0,25 \times 0,6\} = 0,1369 .$$

Aplicando (23), obtemos

$$R_{C_{1,2}}^{E_2} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3423 & 0,0901 \\ X_2 & 0,6577 & 0,5 & 0,1451 \\ X_3 & 0,9099 & 0,8549 & 0,5 \end{array}$$

ii) Agregação das preferências de grupo levando em conta cada critério

Aplicando (31) às preferências dos Especialista 1 e 2, levando em conta o primeiro critério, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_1}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,2 & 0,1 & 0,0803 \\ X_2 & 0,3 & 0,2 & 0,1107 \\ X_3 & 0,1 & 0 & 0,2 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_1}^{E_{1,2}}(X_{11}) = \min\{0,5 \times 0,4; 0,5 \times 0,6\} = 0,2$ e

$$r_{C_1}^{E_{1,2}}(X_{12}) = \min\{0,25 \times 0,4; 0,3423 \times 0,6\} = 0,1 .$$

Aplicando (23), obtemos

$$R_{C_1}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline 0,5 & 0,25 & 0,4452 \\ \hline 0,75 & 0,5 & 1 \\ \hline 0,5548 & 0 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

Aplicando (31) às preferências dos Especialista 1 e 2, levando em conta o segundo critério, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_2}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline 0,2 & 0,15 & 0,0343 \\ \hline 0,1 & 0,2 & 0,0554 \\ \hline 0 & 0,1 & 0,2 \\ \hline \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_2}^{E_{1,2}}(X_{11}) = \min\{0,5 \times 0,4; 0,5 \times 0,6\} = 0,2$ e

$$r_{C_2}^{E_{1,2}}(X_{12}) = \min\{0,75 \times 0,4; 0,25 \times 0,6\} = 0,15.$$

Aplicando (23), obtemos

$$R_{C_2}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline 0,5 & 0,6 & 1 \\ \hline 0,4 & 0,5 & 0,3563 \\ \hline 0 & 0,6437 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

iii) Agregação das preferências de grupo levando em conta todos os critérios simultaneamente

Aplicando (31) às preferências individuais agregadas para todos os critérios, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_{1,2}}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline 0,2 & 0,16 & 0,0541 \\ \hline 0,24 & 0,2 & 0,0871 \\ \hline 0 & 0 & 0,2 \\ \hline \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{11}) = \min\{0,5 \times 0,4; 0,5 \times 0,6\} = 0,2$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{12}) = \min\{0,4 \times 0,4; 0,3423 \times 0,6\} = 0,16.$$

Aplicando (23), obtemos

$$R_{C_{1,2}}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,4 & 1 \\ X_2 & 0,6 & 0,5 & 1 \\ X_3 & 0 & 0 & 0,5 \end{array}$$

No caso deste operador, a aplicação de (30) às preferências de grupo agregadas por critério levará a um resultado diferente, devido à possibilidade de ocorrerem mínimos distintos. As preferências agregadas são

$$R_{C_{1,2}}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,2 & 0,1 & 0,1781 \\ X_2 & 0,24 & 0,2 & 0,2138 \\ X_3 & 0 & 0 & 0,2 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{11}) = \min\{0,5 \times 0,4; 0,5 \times 0,6\} = 0,2$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{12}) = \min\{0,25 \times 0,4; 0,6 \times 0,6\} = 0,1.$$

Aplicando (23), obtemos

$$R_{C_{1,2}}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,2941 & 1 \\ X_2 & 0,7059 & 0,5 & 1 \\ X_3 & 0 & 0 & 0,5 \end{array}$$

d. Agregação baseada no operador Produto

Na aplicação do operador produto, serão considerados os mesmos coeficientes de importância utilizados na agregação baseada no operador soma.

i) Agregação das preferências individuais, levando em conta todos os critérios simultaneamente

Aplicando (32) às preferências do Especialista 1, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_{1,2}}^{E_1} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline 0,06 & 0,045 & 0,18 \\ \hline 0,045 & 0,06 & 0,18 \\ \hline 0 & 0 & 0,06 \\ \hline \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_1}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 \times 0,5 \times 0,6 = 0,06$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_1}(X_{12}) = 0,25 \times 0,4 \times 0,75 \times 0,6 = 0,045.$$

Aplicando (32) às preferências do Especialista 2, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_{1,2}}^{E_2} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline 0,06 & 0,0205 & 0,0018 \\ \hline 0,1184 & 0,06 & 0,0041 \\ \hline 0,1960 & 0,1777 & 0,06 \\ \hline \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_2}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 \times 0,5 \times 0,6 = 0,06$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_2}(X_{12}) = 0,3423 \times 0,4 \times 0,25 \times 0,6 = 0,0205.$$

ii) Agregação das preferências de grupo levando em conta cada critério

Aplicando (33) às preferências dos Especialista 1 e 2, levando em conta o primeiro critério, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_1}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline 0,06 & 0,0205 & 0,0241 \\ \hline 0,1184 & 0,06 & 0,0443 \\ \hline 0,052 & 0 & 0,06 \\ \hline \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_1}^{E_{1,2}}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 \times 0,5 \times 0,6 = 0,06$ e

$$r_{C_1}^{E_{1,2}}(X_{12}) = 0,25 \times 0,4 \times 0,3423 \times 0,6 = 0,0205 .$$

Aplicando (33) às preferências dos Especialista 1 e 2, levando em conta o segundo critério, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_2}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,06 & 0,045 & 0,0137 \\ X_2 & 0,045 & 0,06 & 0,0166 \\ X_3 & 0 & 0,0545 & 0,06 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_2}^{E_{1,2}}(X_{11}) = 0,5 \times 0,4 \times 0,5 \times 0,6 = 0,06$ e

$$r_{C_2}^{E_{1,2}}(X_{12}) = 0,75 \times 0,4 \times 0,25 \times 0,6 = 0,045 .$$

iii) Agregação das preferências de grupo levando em conta todos os critérios simultaneamente

Aplicando (33) às preferências individuais agregadas para todos os critérios, obtemos as preferências agregadas

$$R_{C_{1,2}}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,0009 & 0,0002 & 0,0001 \\ X_2 & 0,0013 & 0,0009 & 0,0002 \\ X_3 & 0 & 0 & 0,0009 \end{array}$$

Por exemplo, $r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{11}) = 0,06 \times 0,4 \times 0,06 \times 0,6 = 0,0009$ e

$$r_{C_{1,2}}^{E_{1,2}}(X_{12}) = 0,045 \times 0,4 \times 0,0205 \times 0,6 = 0,0002 .$$

A aplicação de (32) às preferências de grupo agregadas por critério levará ao mesmo resultado.

5.3 Ordenação de Alternativas

A ordenação de alternativas consiste, basicamente, em estabelecer uma diferenciação entre as possibilidades de soluções em um conjunto de soluções possíveis, com base nas quantidades associadas às preferências. Existem diversas abordagens para a ordenação de alternativas em ambiente *fuzzy*, como por exemplo, [16,136,151-153].

Dentre todas, é possível destacar a abordagem que considera a análise das funções de pertinência do subconjunto das alternativas não dominadas, proposta em [128,129], cujas propriedades satisfatórias e caracterização axiomática foram fundamentadas pelas pesquisas refletidas em [130,138,154,155].

A seguir, são apresentados alguns dos métodos de ordenação de alternativas em ambiente *fuzzy*:

- Ordenação pela Soma

O método consiste em comparar os valores obtidos a partir da soma das preferências sobre cada alternativa, conforme mostrado abaixo:

$$P(X_i) = \sum_{j=1}^n \mu_R(X_{ij}) \quad (34)$$

Quanto maior o valor de $P(X_i)$, maior é a preferência da alternativa X_i sobre as demais.

- Ordenação pelo Máximo

A ordenação pelo máximo consiste em ordenar as preferências com base no operador máximo, conforme mostrado abaixo:

$$P(X_i) = \max_{j=1, \dots, n} \{\mu_R(X_{ij})\} \quad (35)$$

Quanto maior o valor de $P(X_i)$, maior é a preferência da alternativa X_i sobre as demais.

- Ordenação pela Média e Desvio Padrão

O método de média e desvio padrão proposto em [156], ordena as alternativas com base na média e no espalhamento dos graus de pertinência. Os autores ponderam que a intuição humana normalmente favorece os conjuntos *fuzzy* que apresentam maior valor médio, e ao mesmo tempo, menor espalhamento. A média é definida como:

$$\overline{\mu}_R(X_i) = \frac{\sum_{j=1}^n \mu_R(X_{ij})}{n-1}, \quad (36)$$

e o desvio padrão como:

$$\sigma(X_i) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n [\mu_R(X_{ij}) - \overline{\mu}_R(X_i)]^2}{n-2}}. \quad (37)$$

Supondo valores para duas alternativas X_i e X_j , as regras para a ordenação são as seguintes:

Tabela 2 - Critérios de ordenação levando em conta a média e o desvio padrão

Relação entre as médias	Relação entre os desvios padrão	Ordenação
$\overline{\mu}_R(X_i) > \overline{\mu}_R(X_j)$	-	$X_i \succ X_j$
$\overline{\mu}_R(X_i) = \overline{\mu}_R(X_j)$	$\sigma(X_i) < \sigma(X_j)$	$X_i \succ X_j$

- Ordenação pelo Grau de Dominância

De acordo com a definição apresentada em [128,129], as relações de preferência *fuzzy* obtidas até o momento são classificadas como não rigorosas e representam o grau com que uma alternativa “não é pior” que outra.

Uma relação não rigorosa R pode ser representada por uma relação rigorosa R^r e uma relação indiferente R^i . É possível dizer que uma alternativa X_i é rigorosamente melhor que X_j se $(X_i, X_j) \in R$ e $(X_j, X_i) \notin R$. O subconjunto de todos estes pares é a relação de preferência rigorosa R^r . Como $(X_i, X_j) \in R^{-1}$ é equivalente a $(X_j, X_i) \in R$, é possível utilizar a relação inversa para construir $R^r = R \setminus R^{-1}$.

Se $(X_i, X_j) \in R^r$, então X_i domina X_j , ou seja, $X_i \succ X_j$. A alternativa $X_k \in X$ é não-dominada em $\langle X, R \rangle$ se $(X_i, X_j) \in R^r$ para qualquer $X_j \in X$.

Se R é uma relação de preferência *fuzzy* não rigorosa, então o valor $\mu_R(X_i, X_j)$ é o grau de preferência $X_i \succ X_j$ (X_i não é pior que X_j) para qualquer $X_i, X_j \in X$. Considerando que $\mu_{R^{-1}}(X_i, X_j) = \mu_R(X_j, X_i)$, a função de pertinência que corresponde a R^r pode ser definida como:

$$\mu_{R^r}(X_i, X_j) = \max\{\mu_R(X_i, X_j) - \mu_R(X_j, X_i); 0\} \quad (38)$$

Em particular, $\mu_{R^r}(X_j, X_i)$ é a função de pertinência do conjunto *fuzzy* de todas as alternativas X_i , que são estritamente dominadas por X_j . O complemento $1 - \mu_{R^r}(X_j, X_i)$ fornece o conjunto *fuzzy* de alternativas, que são não dominadas por outras alternativas de X . Para escolher o conjunto de todas as alternativas, que são não dominadas por outras alternativas de X , é necessário obter a interseção de todos $1 - \mu_{R^r}(X_j, X_i)$, $X_i \in X$ para todo $X_j \in X$. Esta interseção é um subconjunto de alternativas não dominadas com função de pertinência

$$\mu_{R^r}^{ND}(X_i) = \inf_{X_j \in X} [1 - \mu_{R^r}(X_j, X_i)] = 1 - \sup_{X_j \in X} \mu_{R^r}(X_j, X_i). \quad (39)$$

Como $\mu_R^{ND}(X_i)$ é o grau de não dominância, é natural obter alternativas tais que

$$X^{ND} = \left\{ X_i^{ND} \mid X_i^{ND} \in X, \mu_{R^r}^{ND}(X_i^{ND}) = \sup_{X_i \in X} \mu_{R^r}^{ND}(X_i) \right\}. \quad (40)$$

Se a relação de preferência *fuzzy* R é transitiva, então $X^{ND} \neq \emptyset$. Considerando isso, deve-se notar que quando $\tilde{F}_{C_i}(X_i)$ é indicada de forma quantitativa, $X^{ND} \neq \emptyset$. Com $\tilde{F}_{C_k}(X_i)$ indicado de forma qualitativa é possível obter $X^{ND} \neq \emptyset$ pela intransitividade de R , permitindo então a detecção de contradições nas estimativas da pessoa que toma as decisões [42].

5.3.1 Exemplo de Aplicação

Para exemplificar a aplicação dos métodos de ordenação, serão consideradas as relações de preferência *fuzzy* agregadas de grupo, levando em conta todos os critérios, conforme determinado no Exemplo 5.2.1 item (a.iii) e transcrito abaixo:

$$R_{C_{1,2}}^{E_{1,2}} = \begin{array}{c|ccc} & X_1 & X_2 & X_3 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3921 & 0,4127 \\ X_2 & 0,6079 & 0,5 & 0,4175 \\ X_3 & 0,5873 & 0,5825 & 0,5 \end{array}$$

a. Ordenação pela Soma

As preferências por alternativa são calculadas de acordo com (34):

$$P(X_1) = \mu_R(X_{12}) + \mu_R(X_{13}) = 0,3921 + 0,4127 = 0,8048$$

$$P(X_2) = \mu_R(X_{21}) + \mu_R(X_{23}) = 0,6079 + 0,4175 = 1,0254$$

$$P(X_3) = \mu_R(X_{31}) + \mu_R(X_{32}) = 0,5873 + 0,5825 = 1,1698$$

A análise das preferências sobre as alternativas permite verificar que a alternativa 3 é melhor que a alternativa 2, que por sua vez é melhor que a alternativa 1, definido a ordenação $X_3 \succ X_2 \succ X_1$.

b. Ordenação pelo Máximo

As preferências por alternativa são calculadas de acordo com (35):

$$P(X_1) = \max\{\mu_R(X_{12}); \mu_R(X_{13})\} = \max\{0,3921; 0,4127\} = 0,4127$$

$$P(X_2) = \max\{\mu_R(X_{21}); \mu_R(X_{23})\} = \max\{0,6079; 0,4175\} = 0,6079$$

$$P(X_3) = \max\{\mu_R(X_{31}); \mu_R(X_{32})\} = \max\{0,5873; 0,5825\} = 0,5873$$

A análise das preferências sobre as alternativas permite verificar que a alternativa 2 é melhor que a alternativa 3, que por sua vez é melhor que a alternativa 1, definido a ordenação $X_2 \succ X_3 \succ X_1$.

c. Ordenação pela Média e Desvio Padrão

As preferências por alternativa são calculadas de acordo com (36):

$$\overline{\mu_R}(X_1) = \frac{\mu_R(X_{12}) + \mu_R(X_{13})}{3-1} = \frac{0,3921 + 0,4127}{2} = 0,4024$$

$$\overline{\mu_R}(X_2) = \frac{\mu_R(X_{21}) + \mu_R(X_{23})}{3-1} = \frac{0,6079 + 0,4175}{2} = 0,5127$$

$$\overline{\mu}_R(X_3) = \frac{\mu_R(X_{31}) + \mu_R(X_{32})}{3-1} = \frac{0,5873 + 0,5825}{2} = 0,5849$$

A análise das preferências sobre as alternativas permite verificar que a alternativa 3 é melhor que a alternativa 2, que por sua vez é melhor que a alternativa 1, definido a ordenação $X_3 \succ X_2 \succ X_1$.

d. Ordenação pelo Grau de Dominância

As relações de preferência rigorosas são calculadas conforme (38):

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0	0
X_2	0,2175	0	0
X_3	0,1746	0,165	0

Por exemplo $\mu_{R^r}(X_1, X_1) = \max\{\mu_{R^r}(X_1, X_1) - \mu_{R^r}(X_1, X_1); 0\} = \max\{0,5 - 0,5; 0\} = 0$ e

$\mu_{R^r}(X_1, X_2) = \max\{\mu_{R^r}(X_1, X_2) - \mu_{R^r}(X_2, X_1); 0\} = \max\{0,3921 - 0,6079; 0\} = 0$.

Os graus de pertinência das alternativas não dominadas, conforme (39), são:

$$\mu_{R^r}^{ND}(X_1) = 1 - \sup[\mu_{R^r}(X_1, X_1); \mu_{R^r}(X_2, X_1); \mu_{R^r}(X_3, X_1)] = 1 - \sup[0; 0,2157; 0,1746] = 0,7843$$

$$\mu_{R^r}^{ND}(X_2) = 1 - \sup[\mu_{R^r}(X_1, X_2); \mu_{R^r}(X_2, X_2); \mu_{R^r}(X_3, X_2)] = 1 - \sup[0; 0; 0,165] = 0,835$$

$$\mu_{R^r}^{ND}(X_3) = 1 - \sup[\mu_{R^r}(X_1, X_3); \mu_{R^r}(X_2, X_3); \mu_{R^r}(X_3, X_3)] = 1 - \sup[0; 0; 0] = 1$$

De tal forma,

$$\mu_{R^r}^{ND} = [0,7843 \quad 0,835 \quad 1]$$

O conjunto das alternativas não dominadas é, de acordo com (40):

	X_1	X_2	X_3
X_1	0,5	0,3921	0,4127
X_2	0,6079	0,5	0,4175
X_3	0,5873	0,5825	0,5

que gera

$$X^{ND} = \sup_{X_i \in X} \mu_{R^r}^{ND}(X_i) = \{X_3, X_2, X_1\}$$

A análise sobre o conjunto das alternativas não dominadas permite verificar que a alternativa 3 é melhor que a alternativa 2, que por sua vez é melhor que a alternativa 1, definido a ordenação $X_3 \succ X_2 \succ X_1$.

5.4 Tomada de Decisão Monocritério Individual

A modalidade mais simples da tomada de decisão ocorre quando uma pessoa deve decidir por uma ou mais alternativas, num conjunto de alternativas possíveis, para a solução de um problema, levando em conta apenas um critério. Por outro lado, é um processo menos consistente do ponto de vista de exploração das alternativas possíveis, pois se limita à visão de uma única pessoa sobre o problema.

A Figura 8 ilustra um esquema geral da tomada de decisão monocritério individual, que tem início com a formulação das alternativas factíveis para a solução do problema. Em seguida, o a pessoa deve expressar as suas preferências sobre as alternativas, utilizando uma das estruturas de preferência descritas no Capítulo 4. De acordo com a linha adotada neste trabalho, pode ser necessário transformar as preferências em relações de preferência *fuzzy*. Em seguida, as preferências são ordenadas a fim de suportar a tomada da decisão.

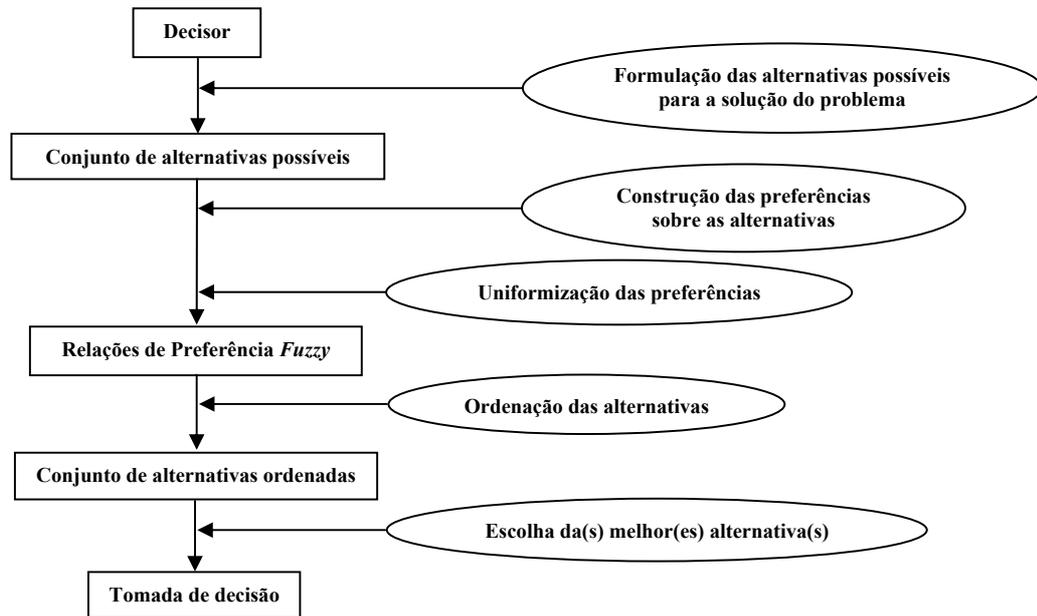


Figura 8: Esquema geral da tomada de decisão monocritério individual

5.5 Tomada de Decisão Monocritério em Grupo

Situações de tomada de decisão mais complexas podem requerer múltiplas perspectivas em torno das possíveis soluções de um problema e nem sempre uma única pessoa tem o conhecimento e as informações necessárias e suficientes para construí-las. Situações mais simples ou de caráter particular podem encorajar uma pessoa a tomar decisões por conta própria, abdicando a possibilidade de ouvir outras opiniões e assumindo toda a responsabilidade sobre os impactos resultantes da decisão. Entretanto, mesmo em questões particulares, boa parte das pessoas sente-se mais confortável quando compartilha seus problemas na busca de novos pontos de vista que podem mostrar outras alternativas de solução. Este fato é particularmente verdadeiro, à medida que os problemas tornam-se mais complexos.

Nas grandes empresas, a formação de grupos de discussão é uma prática comum e quase que inerente à tomada de decisão. De acordo com [16], é necessário distinguir pessoas que colaborem efetivamente com o processo e não tomem atitudes antagônicas e conflitantes. Os integrantes do grupo devem ser capazes de reconhecer a existência do problema, buscar uma decisão comum de forma amigável e confiável, e compartilhar responsabilidades. Consenso, negociação, esquemas de votação e a presença de um grupo moderador são exemplos de boas

práticas para processos em grupo. Outras questões ainda são discutidas em [16], como o equilíbrio da hierarquia dos envolvidos dentro da estrutura da empresa, o acesso às informações necessárias e a autoridade para tomar e suportar as decisões. Neste contexto, os autores de [16] apontam alguns princípios para a condução de atividades em grupo:

- Princípio da Autoridade - o grupo possui um líder com autoridade para tomar a decisão final;
- Princípio da Maioria - as decisões são tomadas de maneira democrática, com base na opinião da maioria;
- Princípio da Minoria Negativa - as piores alternativas são eliminadas sucessivamente até restar uma solução final;
- Princípio da Ordenação - são atribuídos valores às alternativas, dentro de uma escala definida, e a ordenação de valores define a melhor solução;
- Princípio do Consenso - todos os integrantes do grupo aceitam e concordam, ao menos em parte, com a solução.

A Figura 9 ilustra um esquema geral para a tomada de decisão monocritério em grupo. Neste processo, a presença de várias pessoas favorece a geração de um número maior de alternativas para a solução de um problema. Diante do universo de alternativas, cada pessoa deve expressar as suas preferências sobre as alternativas, utilizando a estrutura de preferência de sua escolha. Conforme discutido anteriormente, é natural que cada pessoa escolha uma estrutura diferente, o que demandará a transformação das preferências em relações de preferência *fuzzy*. Em seguida, as preferências são agregadas para formar a opinião de grupo. A análise de intensidade das preferências permite determinar a ordenação das alternativas para suportar a tomada da decisão.

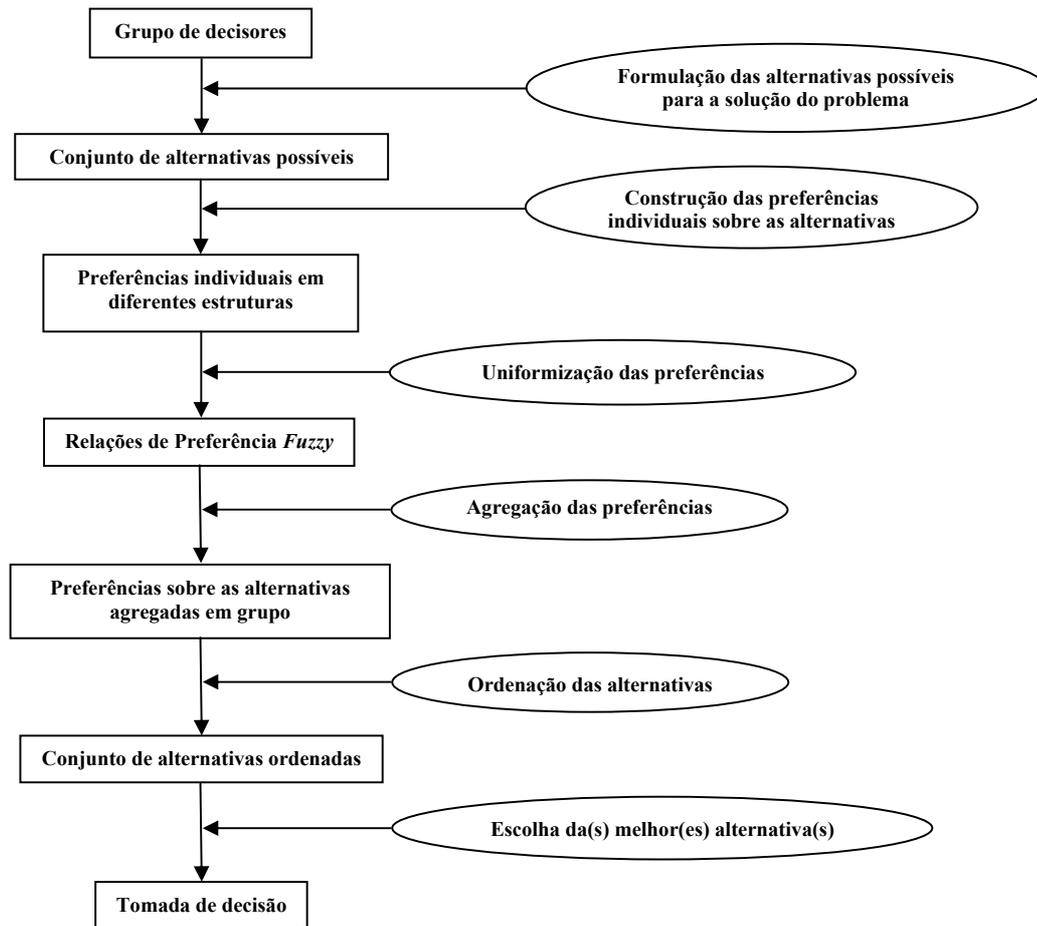


Figura 9: Esquema geral da tomada de decisão monocritério em grupo

Um problema de tomada de decisão monocritério individual ou em grupo, envolvendo um critério de natureza quantitativa, pode ser solucionado através da simples mensuração e comparação, para distinguir a preferência sobre as alternativas. Entretanto, se existem valores iguais ou próximos que não permitem uma distinção justificada, pode ser necessário introduzir critérios adicionais, de natureza quantitativa ou qualitativa, tornando o problema de natureza multidimensional e consequentemente multicritério.

5.6 Tomada de Decisão Multicritério Individual

O esquema geral da tomada de decisão multicritério individual é ilustrado na Figura 10. A pessoa deve inicialmente formular as alternativas de solução do problema e em seguida

estabelecer as suas apreciações sobre cada uma delas, observando cada critério isoladamente. Para expressar a sua opinião sobre as alternativas, ela pode escolher uma ou mais estruturas de representação de preferências vistas no Capítulo 4, o que pode demandar a transformação das informações, para reduzi-las a relações de preferência *fuzzy*. Em seguida, as preferências são agregadas levando em conta todos os critérios simultaneamente. As alternativas são então ordenadas de acordo com a intensidade das preferências. Sobre o conjunto ordenado de alternativas, é tomada a decisão. Não satisfeito com a solução alcançada, a pessoa pode rever as suas preferências e mudar uma ou mais posições iniciais a respeito de um ou mais critérios. Entretanto, a manutenção da situação inicial é favorecida pela inexistência de confronto com outras possibilidades e pelo paradigma da primeira impressão ser a mais correta.

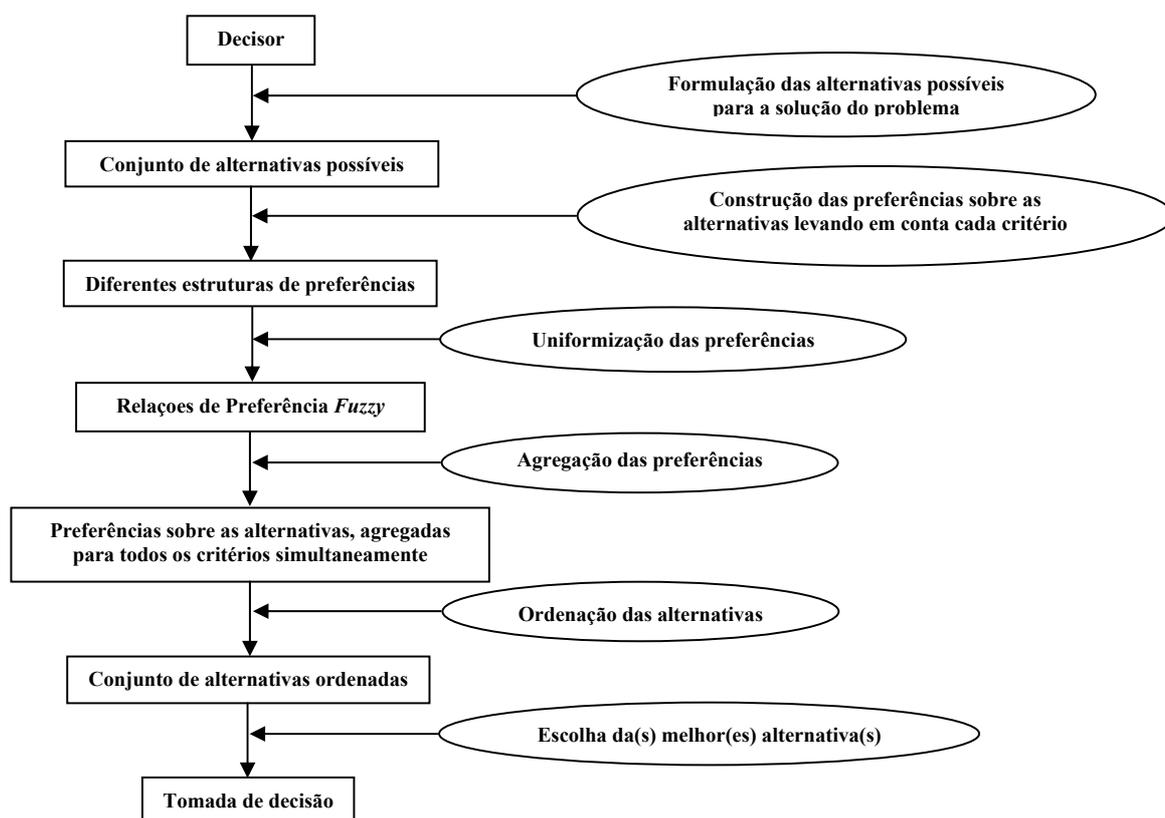


Figura 10: Esquema geral da tomada de decisão multicritério individual

Três técnicas para o processamento das relações de preferência *fuzzy* são consideradas para a tomada de decisão multicritério individual:

- A primeira técnica [129,152] está associada à construção e análise das funções de pertinência do subconjunto de alternativas não-dominadas, levando em conta simultaneamente todos os critérios. Sendo R o vetor de relações de preferência *fuzzy*, as expressões (38)-(40) são aplicáveis se $R = \bigcap_{k=1}^q R_k$, ou seja,

$$\mu_R(X_i, X_j) = \min_{k=1, \dots, q} \mu_{R_k}(X_i, X_j), \quad X_i, X_j \in X \quad (41)$$

Ao usar este procedimento, o conjunto X^{ND} cumpre o papel equivalente ao conjunto de Pareto. Caso a distinção entre as alternativas não seja obtida plenamente, é possível efetuar a sua contração através da diferenciação das importâncias das preferências sobre os critérios, com o uso da convolução:

$$\mu_T(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^q \omega_{C_k} \mu_{R_{C_k}}(X_i, X_j), \quad X_i, X_j \in X, \quad (42)$$

onde $\omega_{C_k} \geq 0$, $k=1, \dots, q$ são coeficientes de importância associados aos critérios, normalizados da forma $\sum_{k=1}^q \omega_{C_k} = 1$.

A construção de $\mu_T(X_i, X_j)$, $X_i, X_j \in X$ permite obter a função de pertinência $\mu_T^{ND}(X_i)$ do subconjunto de alternativas não dominadas de acordo com uma expressão similar a (39). Sua interseção com $\mu_R^{ND}(X_i)$, definida como

$$\mu^{ND}(X_i) = \min\{\mu_R^{ND}(X_i); \mu_T^{ND}(X_i)\}, \quad X_i \in X, \quad (43)$$

fornece

$$X^{ND} = \left\{ X_i^{ND} \mid X_i^{ND} \in X, \mu^{ND}(X_i^{ND}) = \sup_{X_i \in X} \mu^{ND}(X_i) \right\}. \quad (44)$$

- A segunda técnica [107,120], também pode ser baseada nas expressões (39) e (40), e está associada a um processo lexicográfico de análise das funções de pertinência do subconjunto das alternativas não-dominadas, com a introdução de critérios passo-a-passo, para atingir a contração sequencial de regiões de incerteza das soluções. Este procedimento permite que se gere uma sequência X^1, X^2, \dots, X^q tal que $X \supseteq X^1 \supseteq X^2 \supseteq \dots \supseteq X^q$ com o uso das seguintes expressões:

$$\mu_{R_k}^{ND}(X_i) = \inf_{X_j \in X^{k-1}} [1 - \mu_{R_k}^r(X_j, X_i)] = 1 - \sup_{X_j \in X^{k-1}} \mu_{R_k}^r(X_j, X_i), \quad k = 1, \dots, q, \quad (45)$$

$$X^k = \left\{ X_i^{ND,k} \mid X_i^{ND,k} \in X^{k-1}, \mu_{R_k}^{ND}(X_i^{ND,k}) = \sup_{X_j \in X^{k-1}} \mu_{R_k}^{ND}(X_j) \right\} \quad (46)$$

obtidas através de (39) e (40) respectivamente.

É natural que o procedimento lexicográfico seja aplicável se critérios podem ser organizados em ordem do seu grau de importância. Se uma ordem determinada unicamente é difícil de ser construída, é possível usar outro procedimento de escolha.

- A terceira técnica é baseada na agregação das funções de pertinência do subconjunto das alternativas não-dominadas para todos os critérios considerados [42,157,158]. O uso de (39) na forma

$$\mu_{R_k}^{ND}(X_i) = 1 - \sup_{X_j \in X} \mu_{R_k}^r(X_j, X_i), \quad k = 1, \dots, q, \quad (47)$$

permite a construção das funções de pertinência do subconjunto de alternativas não-dominadas para cada relação de preferência *fuzzy*.

As funções de pertinência $\mu_{R_k}^{ND}(X_i)$, $k = 1, \dots, q$ desempenham um papel idêntico às funções de pertinência que são usadas para substituir as funções objetivo $F_k(X_i)$, $k = 1, \dots, q$ na análise dos modelos $\langle X, M \rangle$. Portanto, é possível construir

$$\mu^{ND}(X_i) = \min_{k=1, \dots, q} \mu_{R_k}^r(X_i), \quad (48)$$

a fim de obter X^{ND} .

Se necessário, para diferenciar a importância de diferentes relações de preferência, é possível transformar (48) em

$$\mu^{ND}(X_i) = \min_{k=1, \dots, q} [\mu_{R_k}^r(X_i)]^{\lambda_k}. \quad (49)$$

O uso de (49) não exige a normalização de λ_k , $k = 1, \dots, q$.

5.7 Tomada de Decisão Multicritério em Grupo

O cenário coletivo proporciona algumas situações interessantes e enriquecedoras para a tomada de decisão como um universo maior e mais diversificado de alternativas de solução, inevitáveis divergências de opiniões e discussões, e maiores chances de mudanças de posições iniciais.

A Figura 11 mostra um esquema de tomada de decisão multicritério em grupo. Neste esquema, várias pessoas formulam inicialmente as alternativas de solução do problema e em seguida expressam as suas preferências sobre estas alternativas. A agregação das preferências e a ordenação das alternativas geram uma solução de grupo, que deve ser analisada, discutida e avaliada. Confrontando as opiniões particulares com a opinião de grupo, alguns participantes podem rever a sua posição inicial, fato que pode levar a uma nova solução. A sucessão de rodadas pode continuar até que haja um mínimo de concordância entre as partes. Os envolvidos devem trabalhar cooperativamente em busca de uma solução satisfatória, mesmo sabendo que o consenso em torno de uma única solução é algo quase utópico. Em geral, a melhor solução é aquela que apresenta maior nível de aceitação entre todos os participantes.

A tomada de decisão em grupo difere fundamentalmente do processo individual na etapa de agregação das preferências. Nesta etapa, são possíveis dois caminhos: a agregação das preferências de grupo levando em conta cada critério; ou a agregação das preferências de grupo levando em conta todos os critérios. Desta forma, a tomada de decisão pode ser realizada levando em conta os critérios individualmente ou na modalidade mais ampla, levando em conta todos os critérios simultaneamente.

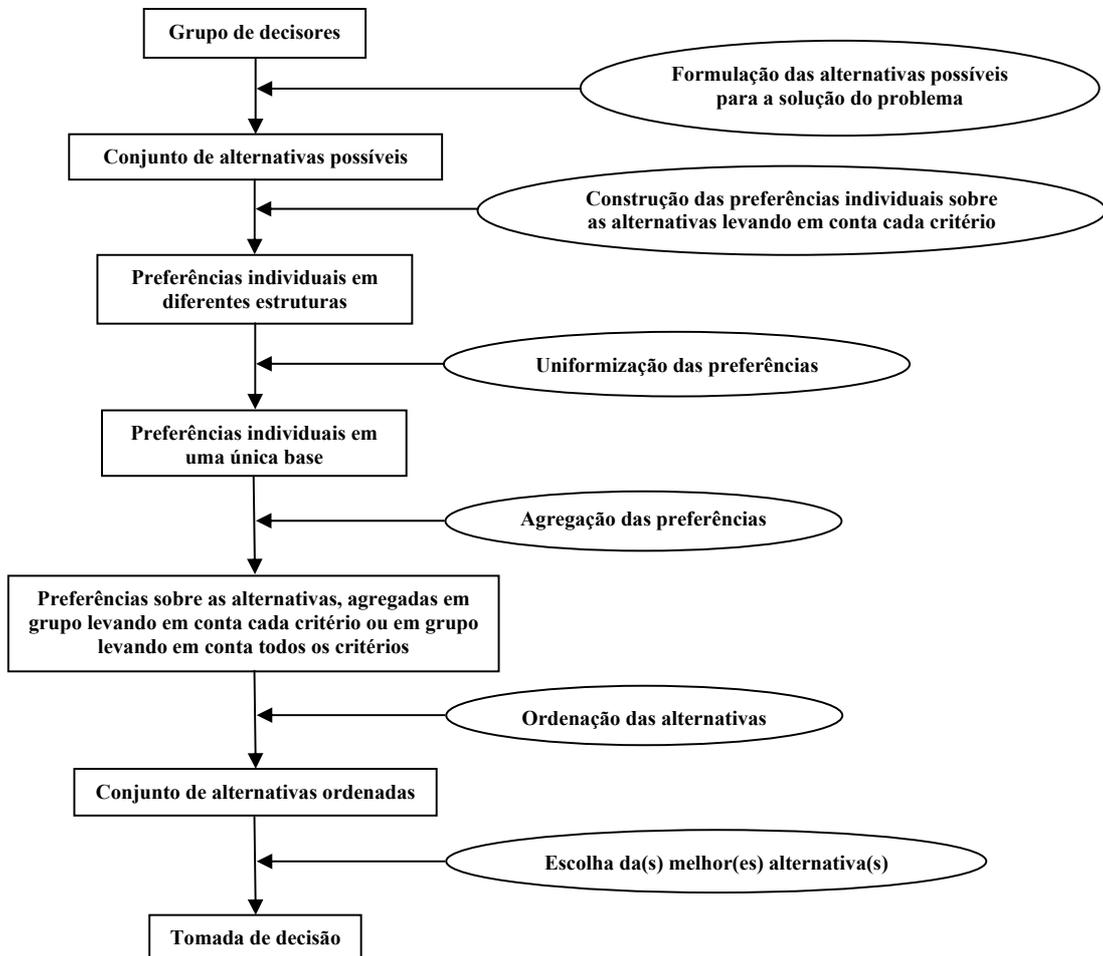


Figura 11: Esquema geral da tomada de decisão multicritério em grupo

5.7.1 Exemplo de Aplicação

Conforme discutido no Capítulo 2, as empresas elaboram mapas estratégicos para auxiliar na definição das iniciativas estratégicas que devem atender as diretrizes estratégicas definidas no Plano Diretor, dentro das quatro perspectivas da metodologia BSC: Financeira, Clientes, Processos Internos e Aprendizado e Crescimento. Essas iniciativas estratégicas orientam os esquemas de desenvolvimento e a consequente proposição de diversos projetos. Entretanto, como na maioria das vezes não há recursos suficientes para desenvolver todos os projetos idealizados, é necessário escolher os que melhor atendem aos objetivos traçados pela empresa.

Neste complexo cenário, repleto de incertezas, vamos exemplificar um processo de tomada de decisão em uma empresa do setor de energia elétrica, utilizando como ferramentas de apoio os modelos e métodos estudados. A situação envolve cinco especialistas $\{E_1, \dots, E_5\}$, pertencentes a áreas distintas da empresa, que devem decidir pela melhor alternativa num conjunto de quatro propostas de projetos $\{X_1, \dots, X_4\}$, considerando a maximização dos quatro critérios correspondentes às categorias definidas pela metodologia BSC, citadas acima.

Admitido que os especialistas tenham escolhido diferentes formas para expressar as suas preferências sobre as alternativas de projeto, teremos:

Especialista E_1 - Ordenação das preferências sobre as alternativas com base na avaliação e comparação das mesmas

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \\ O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \\ O_{C_2}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \\ O_{C_3}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \\ O_{C_4}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

Especialista E_2 - Avaliação e comparação das alternativas para expressar relações de preferência multiplicativas

		X_1	X_2	X_3	X_4
$A_{C_1}^{E_2} =$	X_1	1	2	4	1/2
	X_2	1/2	1	1/4	2
	X_3	1/4	4	1	3
	X_4	2	1/2	1/3	1

		X_1	X_2	X_3	X_4
$A_{C_2}^{E_2} =$	X_1	1	2	7	6
	X_2	1/2	1	1/4	3
	X_3	1/7	4	1	4
	X_4	1/6	1/3	1/4	1

		X_1	X_2	X_3	X_4
$A_{C_3}^{E_2} =$	X_1	1	2	5	6
	X_2	1/2	1	1/4	3
	X_3	1/5	4	1	6
	X_4	1/6	1/3	1/6	1

		X_1	X_2	X_3	X_4
$A_{C_4}^{E_2} =$	X_1	1	2	2	4
	X_2	1/2	1	1/6	3
	X_3	1/2	6	1	2
	X_4	1/4	1/3	1/2	1

Especialista E_3 - Avaliação e comparação das alternativas para expressar a sua utilidade

	X_1	X_2	X_3	X_4
$U_{C_1}^{E_3} =$	0,3	0,3	0,4	0,7

	X_1	X_2	X_3	X_4
$U_{C_2}^{E_3} =$	0,3	0,3	0,4	0,6

	X_1	X_2	X_3	X_4
$U_{C_3}^{E_3} =$	0,4	0,3	0,5	0,6

	X_1	X_2	X_3	X_4
$U_{C_4}^{E_3} =$	0,7	0,3	0,6	0,4

Especialista E_4 - Avaliação e comparação das alternativas para expressar relações de preferência *fuzzy*

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_1}^{E_4} =$	X_1	0,5	0,3	0,4	0,2
	X_2	0,7	0,5	0,3	0,4
	X_3	0,6	0,7	0,5	0,6
	X_4	0,8	0,6	0,4	0,5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_2}^{E_4} =$	X_1	0,5	0,4	0,3	0,7
	X_2	0,6	0,5	0,6	0,4
	X_3	0,7	0,4	0,5	0,3
	X_4	0,3	0,6	0,7	0,5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_3}^{E_4} =$	X_1	0,5	0,6	0,2	0,6
	X_2	0,4	0,5	0,3	0,4
	X_3	0,8	0,7	0,5	0,3
	X_4	0,4	0,6	0,7	0,5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_4}^{E_4} =$	X_1	0,5	0,6	0,2	0,6
	X_2	0,4	0,5	0,3	0,4
	X_3	0,8	0,7	0,5	0,3
	X_4	0,4	0,6	0,7	0,5

Especialista E_5 - Avaliação das alternativas para expressar relações de preferência *fuzzy*

Tomando como referência as funções de pertinência apresentadas na Figura 6,

$$f_{C_1}(X_1) = Grande; f_{C_1}(X_2) = Pequeno; f_{C_1}(X_3) = Muito Grande; f_{C_1}(X_4) = Moderado$$

$$f_{C_2}(X_1) = Moderado; f_{C_2}(X_2) = Moderado; f_{C_2}(X_3) = Muito Grande; f_{C_2}(X_4) = Muito Pequeno$$

$$f_{C_3}(X_1) = Grande; f_{C_3}(X_2) = Pequeno; f_{C_3}(X_3) = Muito Grande; f_{C_3}(X_4) = Moderado$$

$$f_{C_4}(X_1) = Pequeno; f_{C_4}(X_2) = Grande; f_{C_4}(X_3) = Muito Grande; f_{C_4}(X_4) = Muito Grande$$

podemos obter,

$R_{C_1}^{E_5} =$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>X_1</th><th>X_2</th><th>X_3</th><th>X_4</th></tr> </thead> <tbody> <tr><th>X_1</th><td>1</td><td>1</td><td>0,75</td><td>1</td></tr> <tr><th>X_2</th><td>0</td><td>1</td><td>0,25</td><td>0,75</td></tr> <tr><th>X_3</th><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><th>X_4</th><td>0,5</td><td>1</td><td>0,5</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>		X_1	X_2	X_3	X_4	X_1	1	1	0,75	1	X_2	0	1	0,25	0,75	X_3	1	1	1	1	X_4	0,5	1	0,5	1	$R_{C_2}^{E_5} =$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>X_1</th><th>X_2</th><th>X_3</th><th>X_4</th></tr> </thead> <tbody> <tr><th>X_1</th><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><th>X_2</th><td>0,5</td><td>1</td><td>0,5</td><td>1</td></tr> <tr><th>X_3</th><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><th>X_4</th><td>0</td><td>0,25</td><td>0</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>		X_1	X_2	X_3	X_4	X_1	1	1	1	1	X_2	0,5	1	0,5	1	X_3	1	1	1	1	X_4	0	0,25	0	1
	X_1	X_2	X_3	X_4																																																	
X_1	1	1	0,75	1																																																	
X_2	0	1	0,25	0,75																																																	
X_3	1	1	1	1																																																	
X_4	0,5	1	0,5	1																																																	
	X_1	X_2	X_3	X_4																																																	
X_1	1	1	1	1																																																	
X_2	0,5	1	0,5	1																																																	
X_3	1	1	1	1																																																	
X_4	0	0,25	0	1																																																	
$R_{C_3}^{E_5} =$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>X_1</th><th>X_2</th><th>X_3</th><th>X_4</th></tr> </thead> <tbody> <tr><th>X_1</th><td>1</td><td>1</td><td>0,75</td><td>1</td></tr> <tr><th>X_2</th><td>0</td><td>1</td><td>0,25</td><td>0,75</td></tr> <tr><th>X_3</th><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0,25</td></tr> <tr><th>X_4</th><td>0,5</td><td>1</td><td>0,5</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>		X_1	X_2	X_3	X_4	X_1	1	1	0,75	1	X_2	0	1	0,25	0,75	X_3	1	1	1	0,25	X_4	0,5	1	0,5	1	$R_{C_4}^{E_5} =$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>X_1</th><th>X_2</th><th>X_3</th><th>X_4</th></tr> </thead> <tbody> <tr><th>X_1</th><td>1</td><td>0</td><td>0,25</td><td>0,25</td></tr> <tr><th>X_2</th><td>1</td><td>1</td><td>0,75</td><td>0,75</td></tr> <tr><th>X_3</th><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><th>X_4</th><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>		X_1	X_2	X_3	X_4	X_1	1	0	0,25	0,25	X_2	1	1	0,75	0,75	X_3	1	1	1	1	X_4	1	1	1	1
	X_1	X_2	X_3	X_4																																																	
X_1	1	1	0,75	1																																																	
X_2	0	1	0,25	0,75																																																	
X_3	1	1	1	0,25																																																	
X_4	0,5	1	0,5	1																																																	
	X_1	X_2	X_3	X_4																																																	
X_1	1	0	0,25	0,25																																																	
X_2	1	1	0,75	0,75																																																	
X_3	1	1	1	1																																																	
X_4	1	1	1	1																																																	

Conforme estabelecido e justificado no Capítulo 4, as preferências serão transformadas em relações de preferência *fuzzy*, como estrutura básica de representação. Assim:

Especialista E_1

$R_{C_1}^{E_1} =$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>X_1</th><th>X_2</th><th>X_3</th><th>X_4</th></tr> </thead> <tbody> <tr><th>X_1</th><td>0,5</td><td>0,1667</td><td>0,6667</td><td>0,3333</td></tr> <tr><th>X_2</th><td>0,8333</td><td>0,5</td><td>1</td><td>0,6667</td></tr> <tr><th>X_3</th><td>0,3333</td><td>0</td><td>0,5</td><td>0,1667</td></tr> <tr><th>X_4</th><td>0,6667</td><td>0,3333</td><td>0,8333</td><td>0,5</td></tr> </tbody> </table>		X_1	X_2	X_3	X_4	X_1	0,5	0,1667	0,6667	0,3333	X_2	0,8333	0,5	1	0,6667	X_3	0,3333	0	0,5	0,1667	X_4	0,6667	0,3333	0,8333	0,5	$R_{C_2}^{E_1} =$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>X_1</th><th>X_2</th><th>X_3</th><th>X_4</th></tr> </thead> <tbody> <tr><th>X_1</th><td>0,5</td><td>0,3333</td><td>0,6667</td><td>0,1667</td></tr> <tr><th>X_2</th><td>0,6667</td><td>0,5</td><td>0,8333</td><td>0,3333</td></tr> <tr><th>X_3</th><td>0,3333</td><td>0,1667</td><td>0,5</td><td>0</td></tr> <tr><th>X_4</th><td>0,8333</td><td>0,6667</td><td>1</td><td>0,5</td></tr> </tbody> </table>		X_1	X_2	X_3	X_4	X_1	0,5	0,3333	0,6667	0,1667	X_2	0,6667	0,5	0,8333	0,3333	X_3	0,3333	0,1667	0,5	0	X_4	0,8333	0,6667	1	0,5
	X_1	X_2	X_3	X_4																																																	
X_1	0,5	0,1667	0,6667	0,3333																																																	
X_2	0,8333	0,5	1	0,6667																																																	
X_3	0,3333	0	0,5	0,1667																																																	
X_4	0,6667	0,3333	0,8333	0,5																																																	
	X_1	X_2	X_3	X_4																																																	
X_1	0,5	0,3333	0,6667	0,1667																																																	
X_2	0,6667	0,5	0,8333	0,3333																																																	
X_3	0,3333	0,1667	0,5	0																																																	
X_4	0,8333	0,6667	1	0,5																																																	

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_3}^{E_1} =$	X_1	0,5	0,6667	0,1667	0,3333
	X_2	0,3333	0,5	0	0,1667
	X_3	0,8333	1	0,5	0,6667
	X_4	0,6667	0,8333	0,3333	0,5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_4}^{E_1} =$	X_1	0,5	0,1667	0,6667	0,3333
	X_2	0,8333	0,5	1	0,6667
	X_3	0,3333	0	0,5	0,1667
	X_4	0,6667	0,3333	0,8333	0,5

Especialista E_2

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_1}^{E_2} =$	X_1	0,5	0,6577	0,8155	0,3423
	X_2	0,3423	0,5	0,1845	0,6577
	X_3	0,1845	0,8155	0,5	0,75
	X_4	0,6577	0,3423	0,25	0,5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_2}^{E_2} =$	X_1	0,5	0,6577	0,9428	0,9077
	X_2	0,3423	0,5	0,1845	0,75
	X_3	0,0572	0,8155	0,5	0,8155
	X_4	0,0923	0,25	0,1845	0,5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_3}^{E_2} =$	X_1	0,5	0,6577	0,8662	0,9077
	X_2	0,3423	0,5	0,1845	0,75
	X_3	0,1338	0,8155	0,5	0,9077
	X_4	0,0923	0,25	0,0923	0,5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_4}^{E_2} =$	X_1	0,5	0,6577	0,6577	0,8155
	X_2	0,3423	0,5	0,0923	0,75
	X_3	0,3423	0,9077	0,5	0,6577
	X_4	0,1845	0,25	0,3423	0,5

Especialista E_3

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_1}^{E_3} =$	X_1	0,5	0,5	0,36	0,1552
	X_2	0,5	0,5	0,36	0,1552
	X_3	0,64	0,64	0,5	0,2462
	X_4	0,8448	0,8448	0,7538	0,5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_2}^{E_3} =$	X_1	0,5	0,5	0,36	0,2
	X_2	0,5	0,5	0,36	0,2
	X_3	0,64	0,64	0,5	0,3077
	X_4	0,8	0,8	0,6923	0,5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_3}^{E_3} =$	X_1	0,5	0,64	0,3902	0,3077
	X_2	0,36	0,5	0,2647	0,2
	X_3	0,6098	0,7353	0,5	0,4098
	X_4	0,6923	0,8	0,5902	0,5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_4}^{E_3} =$	X_1	0,5	0,8448	0,5765	0,7538
	X_2	0,1552	0,5	0,2	0,36
	X_3	0,4235	0,8	0,5	0,6923
	X_4	0,2462	0,64	0,3077	0,5

Especialista E_5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_1}^{E_5} =$	X_1	0,5	1	0,4286	0,6667
	X_2	0	0,5	0,2000	0,4286
	X_3	0,5714	0,8	0,5	0,6667
	X_4	0,3333	0,5714	0,3333	0,5

		X_1	X_2	X_3	X_4
$R_{C_2}^{E_5} =$	X_1	0,5	0,6667	0,5	1
	X_2	0,3333	0,5	0,3333	0,8
	X_3	0,5	0,6667	0,5	1
	X_4	0	0,2	0	0,5

$$R_{C_3}^{E_5} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 1 & 0,4286 & 0,6667 \\ X_2 & 0 & 0,5 & 0,2 & 0,4286 \\ X_3 & 0,5714 & 0,8 & 0,5 & 0,6667 \\ X_4 & 0,3333 & 0,5714 & 0,3333 & 0,5 \end{array} \quad R_{C_4}^{E_5} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0 & 0,2 & 0,2 \\ X_2 & 1 & 0,5 & 0,4286 & 0,4286 \\ X_3 & 0,8 & 0,5714 & 0,5 & 0,5 \\ X_4 & 0,8 & 0,5714 & 0,5 & 0,5 \end{array}$$

Admitiremos que o grupo de especialistas escolha realizar a agregação das preferências através do operador Soma e a ordenação das alternativas através do operador Máximo, priorizando igualmente critérios e especialistas, ou seja, considerando $\omega_{E_1} = \omega_{E_2} = \omega_{E_3} = \omega_{E_4} = \omega_{E_5} = 0,2$ e $\omega_{C_1} = \omega_{C_2} = \omega_{C_3} = \omega_{C_4} = 0,25$.

Se a decisão fosse tomada individualmente, levando em conta todos os critérios, teríamos a seguinte situação:

Especialista E_1

$$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_1} = \begin{array}{c|ccccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & max \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3333 & 0,5417 & 0,2917 & 0,5417 \\ X_2 & 0,6667 & 0,5 & 0,7083 & 0,4583 & 0,7083 \\ X_3 & 0,4583 & 0,2917 & 0,5 & 0,25 & 0,4583 \\ X_4 & 0,7083 & 0,5417 & 0,75 & 0,5 & 0,75 \end{array} \quad X_4 \succ X_2 \succ X_1 \succ X_3$$

Especialista E_2

$$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_2} = \begin{array}{c|ccccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & max \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,6577 & 0,8206 & 0,7433 & 0,8206 \\ X_2 & 0,3423 & 0,5 & 0,1615 & 0,7269 & 0,7269 \\ X_3 & 0,1794 & 0,8385 & 0,5 & 0,7827 & 0,8385 \\ X_4 & 0,2567 & 0,2731 & 0,2173 & 0,5 & 0,2731 \end{array} \quad X_3 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_4$$

Especialista E_3

$$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_3} =$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	max
X_1	0,5	0,6212	0,4217	0,3542	0,6212
X_2	0,3788	0,5	0,2962	0,2288	0,3788
X_3	0,5783	0,7038	0,5	0,414	0,7038
X_4	0,6458	0,7712	0,586	0,5	0,7712

 $X_4 \succ X_3 \succ X_1 \succ X_2$

Especialista E_4

$$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_4} =$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	max
X_1	0,5	0,475	0,275	0,525	0,525
X_2	0,525	0,5	0,375	0,4	0,525
X_3	0,725	0,625	0,5	0,375	0,725
X_4	0,475	0,6	0,625	0,5	0,625

 $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$

Especialista E_5

$$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_5} =$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	max
X_1	0,5	0,6667	0,3893	0,6333	0,6667
X_2	0,3333	0,5	0,2905	0,5214	0,5214
X_3	0,6107	0,7095	0,5	0,7083	0,7095
X_4	0,3667	0,4786	0,2917	0,5	0,4786

 $X_3 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_4$

Se a decisão fosse tomada em grupo levando em conta os critérios isolados, teríamos o seguinte:

Critério C_1

$$R_{C_1}^{E_{1,\dots,4}} =$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	max
X_1	0,5	0,5249	0,5341	0,3395	0,5341
X_2	0,4751	0,5	0,4089	0,4616	0,4751
X_3	0,4659	0,5911	0,5	0,4859	0,5911
X_4	0,6605	0,5384	0,5141	0,5	0,6605

 $X_4 \succ X_3 \succ X_1 \succ X_2$

Critério C_2

		X_1	X_2	X_3	X_4	max	
$R_{C_2}^{E_{1,\dots,4}} =$	X_1	0,5	0,5115	0,5539	0,5949	0,5949	$X_1 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_2$
	X_2	0,4885	0,5	0,4622	0,4967	0,4967	
	X_3	0,4461	0,5378	0,5	0,4846	0,5378	
	X_4	0,4051	0,5033	0,5154	0,5	0,5154	

Critério C_3

		X_1	X_2	X_3	X_4	max	
$R_{C_3}^{E_{1,\dots,4}} =$	X_1	0,5	0,7129	0,4103	0,5631	0,7129	$X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$
	X_2	0,2871	0,5	0,1898	0,389	0,389	
	X_3	0,5897	0,8102	0,5	0,5902	0,8102	
	X_4	0,4369	0,611	0,4098	0,5	0,611	

Critério C_4

		X_1	X_2	X_3	X_4	max	
$R_{C_4}^{E_{1,\dots,4}} =$	X_1	0,5	0,4538	0,4602	0,5405	0,5405	$X_3 \succ X_2 \succ X_1 \succ X_4$
	X_2	0,5462	0,5	0,4042	0,521	0,5462	
	X_3	0,5398	0,5958	0,5	0,4633	0,5958	
	X_4	0,4595	0,479	0,5367	0,5	0,5367	

Como a decisão deve ser do grupo, levando em conta todos os critérios, teremos:

		X_1	X_2	X_3	X_4	max	
$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_{1,\dots,4}} =$	X_1	0,5	0,5508	0,4896	0,5095	0,5508	$X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$
	X_2	0,4492	0,5	0,3663	0,4671	0,4671	
	X_3	0,5104	0,6337	0,5	0,506	0,6337	
	X_4	0,4905	0,5329	0,494	0,5	0,5329	

5.8 Considerações Finais

Apesar de amplamente utilizados em aplicações práticas [42,159,160], os métodos de análise de alternativas em ambiente *fuzzy* ainda carecem de uma elaboração mais ampla e profunda. Neste sentido, o presente capítulo apresentou algumas técnicas para a escolha multicritério de alternativas em ambiente *fuzzy*, no intuito de disponibilizar para as pessoas que

tomam as decisões mais possibilidades na escolha da estrutura mais adequada para processar as informações, podendo optar por diferentes tipos de operadores para agregação das preferências e ordenação das alternativas. Esta questão, em particular, referente ao estudo da combinação dos diversos operadores de agregação e ordenação e a sua correspondente influência sobre a qualidade da solução, é objeto de interesse do presente trabalho e será abordado no Capítulo 7.

Diante da complexidade do cenário estudado e da prática de decisões em equipe consolidada nas grandes e médias empresas, o trabalho aprofundará sobre as questões que cercam a tomada de decisão multicritério em grupo. As abordagens serão conduzidas conforme alguns dos princípios mencionados neste Capítulo, quais sejam: Princípio da Maioria, da Ordenação e do Consenso. As questões associadas à construção de consenso são de grande interesse deste trabalho e serão abordadas no Capítulo 6.

6 CONSTRUÇÃO DE CONSENSO SOBRE ALTERNATIVAS

6.1 Considerações Iniciais

A tomada de decisão objetiva, em primeira instância, encontrar a melhor solução num conjunto de alternativas possíveis. Na modalidade de grupo, em particular, surgem algumas questões decorrentes da participação e interação entre diversas pessoas. A questão mais importante e também a mais complexa, é a condução dos decisores a uma convergência de posições visando a construção de uma situação de consenso.

O termo consenso, tradicionalmente significa um acordo estrito e unânime entre todas as pessoas envolvidas num processo de tomada de decisão. Os autores de [161] definem consenso como “...uma decisão que deve ser alcançada, quando a maioria dos membros de uma equipe concorda com uma opção clara e os poucos que se opõe a ela, pensam que tiveram oportunidade razoável para influenciar na escolha. Todos os membros da equipe concordam em apoiar a decisão”. Este tema tem despertado grande interesse de pesquisadores na área de tomada de decisão, como mostram os trabalhos [89,148,161-163].

Neste Capítulo, são abordadas algumas técnicas para a construção de consenso e diversas questões decorrentes deste procedimento, como por exemplo: a exigência de um nível mínimo de consenso, a participação igualitária de todos os decisores, a participação de um grupo moderador, a conciliação de divergências de posições, a superação de adversidades e a orientação a mudanças de posicionamento.

6.2 Técnicas para a Construção de Consenso

As técnicas para a construção de consenso exigem, inicialmente, a definição de um nível mínimo de concordância de grupo, que deve ser atingido por uma ou mais alternativas. Dessa forma, durante o processo de tomada de decisão em grupo, os valores de consenso de cada alternativa e de grupo, são monitorados e as alterações necessárias são promovidas até que o nível desejado seja alcançado. O procedimento é simples, mas a sua aplicação pode tornar-se complexa, quando as alterações dependerem da mudança de opinião dos participantes, a fim de fazer com que a maioria compartilhe a mesma opinião.

Em geral, as abordagens existentes sobre consenso podem ser divididas em dois grupos. O primeiro grupo trata o consenso como um procedimento de agregação. Esse tipo de consenso requer algum tipo de arbitragem associada, de modo que os especialistas não precisam convergir em suas opiniões. Na maioria dos casos, o consenso é obtido através da escolha de coeficientes de importância (pesos) atribuídos à opinião de cada pessoa (por exemplo, [16,150,164,165]). O segundo grupo está associado aos casos em que as pessoas são encorajadas a reconsiderar as suas opiniões, a fim de alcançar uma maior homogeneidade entre elas (por exemplo, [16,150,164,166]).

Neste trabalho, os níveis de consenso são determinados com base na ordenação das alternativas, cujas técnicas foram apresentadas no Capítulo 5, conforme o procedimento descrito em [150], que fornece os níveis de consenso sobre cada alternativa e de grupo e também a contribuição de cada indivíduo sobre o nível de consenso a cada iteração. As correlações para cálculo destes parâmetros, utilizadas pelas abordagens indicadas para conduzir ao nível de consenso mínimo desejado, são apresentadas a seguir.

- Consenso sobre Alternativa

O consenso sobre uma alternativa, quando comparado ao consenso sobre a alternativa preferida pelo grupo, é dado por:

$$C_i = \sum_{l=1}^m \left[\left(1 - \frac{|O^G(X_i) - O^{E_l}(X_i)|}{n-1} \right) \times \omega_{E_l} \right], \quad (50)$$

onde C_i indica o nível de consenso sobre a i -ésima alternativa; ω_{E_l} é o coeficiente de importância da l -ésima pessoa; $O^G(X_i)$ é a ordem da i -ésima alternativa na classificação de grupo; $O^{E_l}(X_i)$ é a ordem da i -ésima alternativa na classificação da l -ésima pessoa; e n representa o número de alternativas no conjunto de soluções possíveis.

- Consenso de Grupo

O consenso de grupo, sobre as alternativas que apresentam maior preferência, é dado por:

$$C^G = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p C_{[k]}, \quad (51)$$

onde p é o número de alternativas, pertencentes ao conjunto de soluções possíveis, que devem atingir o nível de consenso estabelecido; e $C_{[k]}$ é o valor de consenso sobre a alternativa classificada na k -ésima posição, segundo uma ordenação de estabelecida com base na média das preferências sobre as alternativas (o desvio padrão deve ser utilizado no caso de médias iguais).

- Contribuição individual na construção de consenso

Para avaliar a contribuição de cada pessoa na construção do consenso de grupo, é necessário obter uma nova ordenação das alternativas de grupo, considerando a exclusão de uma pessoa por vez. O nível de consenso de grupo sobre cada alternativa i , para a ordenação que desconsidera a presença da l -ésima pessoa é:

$$C_{i\bar{l}} = \sum_{E \setminus \{l\}} \left[\left(1 - \frac{|O^G(X_i) - O^{E_l}(X_i)|}{n-1} \right) \times \beta_{E_l} \right] \quad (52)$$

com

$$\beta_{E_l} = \frac{\omega_{E_l}}{\sum_{E \setminus \{l\}} \omega_E}, \quad (53)$$

onde ω_{E_l} é o coeficiente de importância da l -ésima pessoa; $\sum_{E \setminus \{l\}} \omega_E$ é a somatória de todos os coeficientes de importância, excluindo a l -ésima pessoa; $O^G(X_i)$ é a ordem da i -ésima alternativa

na nova de classificação de grupo, que desconsidera a l -ésima pessoa; $O^{E_l}(X_i)$ é a ordem da i -ésima alternativa na classificação original da l -ésima pessoa; e n representa o número de alternativas no conjunto de soluções possíveis.

Assim, a contribuição de cada pessoa na construção do consenso é dada por:

$$D_{E_l} = \sum_{i=1}^n D_{il} \quad (54)$$

onde

$$D_{il} = C_i - C_{i\bar{l}} \quad (53)$$

Quanto maior o valor D_{E_l} , maior é a contribuição da pessoa E_l na formação do consenso de grupo, ou seja, maior é a preferência desta pessoa pelas alternativas mais preferidas pelo grupo.

6.3 Abordagens para a Construção de Consenso

6.3.1 Abordagem Autocrática

A abordagem autocrática requer algum tipo de arbitragem associada, para que as pessoas não precisem alterar suas preferências iniciais. Em [150,165], os autores arbitraram o coeficiente de importância de cada pessoa como parâmetro a ser manipulado na construção do consenso. Os coeficientes de importância associados a critérios e pessoas são inicialmente atribuídos pelos decisores e a agregação é realizada considerando estes coeficientes. Em seguida, é processada a ordenação das alternativas individuais e de grupo, e calculados os níveis de consenso. Caso o nível desejado não tenha sido alcançado, as pessoas cujas opiniões mais divergem das opiniões do grupo, tem o valor de seu coeficiente de importância reduzido automaticamente. Da mesma forma, as pessoas cujas opiniões mais convergem com as opiniões do grupo, têm o valor de seu coeficiente de importância aumentado. A alteração dos coeficientes de importância é processada como segue:

$$\omega_{E_l}^{r+1} = \frac{t_{E_l}^{r+1}}{\sum_{l=1}^m t_{E_l}^{r+1}} \quad (55)$$

com

$$t_{E_l}^{r+1} = \omega_{E_l}^r (1 + D_{E_l})^\beta, \quad (56)$$

onde $\omega_{E_l}^r$ representa a importância da l -ésima pessoa na r -ésima iteração; D_{E_l} é a contribuição de cada pessoa na formação do consenso; β representa a influência da contribuição das pessoas na formação do consenso (quanto maior o valor de β , mais rápido o processo converge para o nível de consenso desejado); e $\omega_{E_l}^{r+1}$ representa a importância da l -ésima pessoa na $(r+1)$ -ésima iteração.

A cada iteração, os novos níveis de consenso são calculados e novas alterações podem ser necessárias até que o nível desejado seja alcançado. Desta forma, as pessoas não precisam modificar suas opiniões iniciais.

As principais desvantagens dessa abordagem, citadas em [150,166], são:

- Quando as opiniões das pessoas com alto grau de importância divergem da maioria, o esforço computacional pode ser significativo;
- As pessoas com opiniões mais divergentes em relação ao grupo sofrem redução sistemática de seus coeficientes de importância, uma vez que esta metodologia não prevê a possibilidade de mudanças de opinião ao longo do processo de construção de consenso.

6.3.2 Abordagem Interativa

Esta abordagem requer um mecanismo moderador (implementado computacionalmente) para orientar a alteração das opiniões das pessoas que mais divergem da opinião do grupo, a fim

de alcançar o consenso, como apresentado nos trabalhos [89,167,168]. Os coeficientes de importância são inicialmente atribuídos a critérios e pessoas pelos decisores e a agregação é realizada considerando estes coeficientes. Em seguida, é realizada a ordenação das alternativas individuais e de grupo, e calculados os níveis de consenso. Caso o nível de consenso de grupo desejado não tenha sido alcançado, o mecanismo moderador convida a pessoa cuja opinião mais diverge da opinião do grupo, a reavaliar as suas preferências. A cada passo, os novos níveis de consenso são avaliados e novas pessoas podem ser convidadas a rever a sua posição, até que a condição estabelecida seja satisfeita. Desta forma, os especialistas são convidados a interagir com o processo, apesar de não serem obrigados a fazê-lo.

Esta abordagem também possui aspectos negativos, conforme citado em [89,147,169]:

- A posição inicial de algumas pessoas pode ser comprometida;
- Os coeficientes de importância associados às pessoas e critérios permanecem inalterados durante todo o processo;
- Uma mesma pessoa pode ser convidada, repetidas vezes, a alterar a sua opinião, principalmente quando a mesma possui alto grau de importância e sua opinião diverge da maioria.

6.3.3 Outras Abordagens

Outras abordagens foram encontradas, como: a obtenção do nível de consenso através da média do grau de concordância entre todos os pares de pessoas, com coeficientes de importância associados [170]; consenso baseado em um modelo de limiar [137], que estabelece comparações aos pares em dois estágios, primeiro entre as pessoas, e depois, entre alternativas; consenso estimado com base na similaridade entre os vetores de preferências das pessoas [171], usada para gerar medidas de concordância e discordância de grupo usando parâmetros limiares. Essas abordagens consideram que a concordância entre as pessoas é uma condição necessária para o sucesso [172]. Tal suposição foi refutada com base em experimentações consistentes, apresentadas em [173].

6.4 Uma Nova Abordagem para a Construção de Consenso

Este item está associado ao aperfeiçoamento das abordagens acima indicadas e também com desenvolvimento de novas técnicas para superar os aspectos negativos discutidos, levando em consideração os resultados dos trabalhos [141,142,168,174-177]. Os primeiros resultados nessa área são refletidos em [169].

O principal objetivo da abordagem proposta é preservar a integridade dos envolvidos no processo de tomada de decisão, evitando que uma mesma pessoa seja convidada a rever suas posições seguidas vezes. Para isso, é necessária a participação de um grupo moderador, composto por pessoas estrategicamente escolhidas, para avaliar, a cada iteração, a melhor forma de prosseguir rumo ao consenso. Este grupo será responsável por atribuir os coeficientes de importância iniciais, associados a critérios e pessoas, e conduzir o processo de modo a:

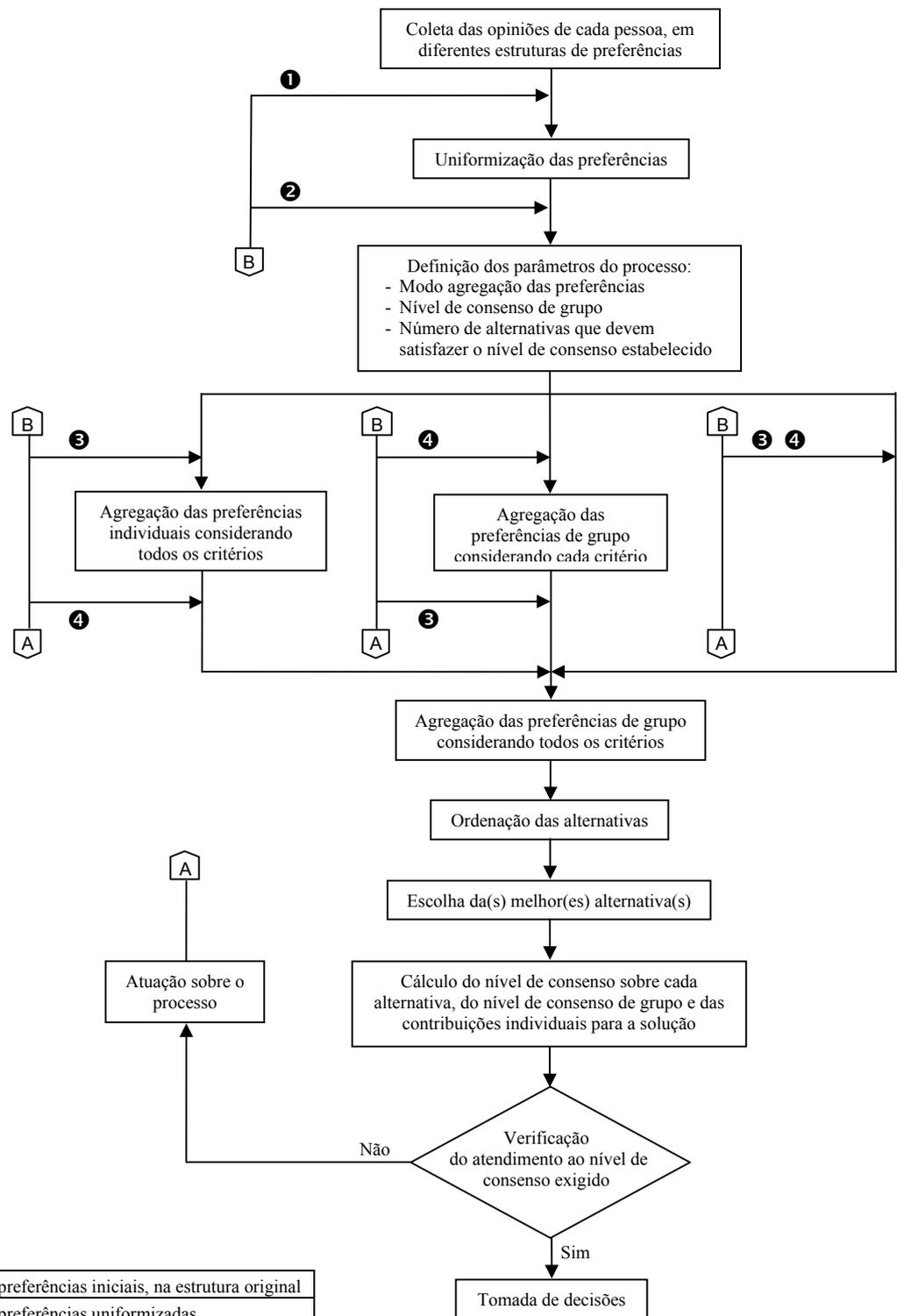
- Permitir que uma mesma pessoa seja requisitada a rever a sua opinião diversas vezes, apesar de não recomendado;
- Evitar a repetição, convidando outra pessoa para rever a sua opinião, como por exemplo, a pessoa que possui o segundo maior grau de divergência da opinião do grupo;
- Reavaliar e alterar os coeficientes de importância atribuídos às pessoas envolvidas;
- Reavaliar e alterar os coeficientes de importância atribuídos aos critérios estabelecidos.

Algumas vantagens desta abordagem podem ser destacadas:

- Os coeficientes de importância são manipulados pelo grupo moderador e não automaticamente, proporcionando a obtenção do consenso de forma mais equilibrada, sem reduções ou aumentos sistemáticos dos coeficientes de importância de um mesma pessoa e/ou critério;

- A abordagem possibilita a variação dos coeficientes de importância associados a pessoas e/ou critérios, evitando que os mesmos permaneçam constantes durante todo o processo;
- O esforço computacional pode ser reduzido (apesar de não ser um fator crítico em processos dessa natureza), a partir da intervenção do grupo moderador nos casos em que pessoas com alto grau de importância divergem da opinião do grupo;
- É possível evitar que uma mesma pessoa tenha que rever a sua opinião, seguidas vezes, através da manipulação do seu coeficiente de importância;
- A nova abordagem permite a obtenção do consenso de forma mais ágil e racional.

O esquema da Figura 12, apresentado no trabalho [178], mostra as possibilidades de intervenção do grupo moderador sobre um processo geral de tomada de decisão.



1	Alteração das preferências iniciais, na estrutura original
2	Alteração das preferências uniformizadas
3	Alteração dos pesos associados aos critérios
4	Alteração dos pesos associados às pessoas

Figura 12: Diagrama geral de um processo de tomada de decisão

6.5 Exemplo de Aplicação

Para implementação dos esquemas de consenso serão consideradas as preferências iniciais expressas pelos especialistas e as respectivas relações de preferência *fuzzy* decorrentes da uniformização das informações do Exemplo 5.7.1. No exemplo referenciado, foi encontrada a melhor alternativa, sem nenhuma preocupação com o nível de consenso de grupo. Neste exemplo, a melhor alternativa deve alcançar um nível mínimo de consenso de 80%.

a. Abordagem Autocrática

Reunindo as opiniões individuais e de grupo, podemos construir uma síntese das preferências:

Tabela 3 - Ordem das preferências e alternativas por especialista

Especialista	Ordem das preferências	Ordem das alternativas			
		$O(X_1)$	$O(X_2)$	$O(X_3)$	$O(X_4)$
E_1	$X_4 \succ X_2 \succ X_1 \succ X_3$	3	2	4	1
E_2	$X_3 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_4$	2	3	1	4
E_3	$X_4 \succ X_3 \succ X_1 \succ X_2$	3	4	2	1
E_4	$X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$	3	4	1	2
E_5	$X_3 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_4$	2	3	1	4
Grupo	$X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$	2	4	1	3

Aplicando (50), é determinado o consenso sobre cada alternativa, em relação à ordenação de grupo:

Tabela 4 - Consenso sobre cada alternativa e de grupo

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,7333	0,7333	0,5333
Consenso de grupo	$C^G=73,33\%$			

Por exemplo, o nível de consenso sobre a alternativa X_1 ,

$$C_1 = \left(1 - \frac{|2-3|}{3-1}\right) \times 0,2 + \left(1 - \frac{|2-2|}{3-1}\right) \times 0,2 + \left(1 - \frac{|2-3|}{3-1}\right) \times 0,2 + \left(1 - \frac{|2-3|}{3-1}\right) \times 0,2 + \left(1 - \frac{|2-2|}{3-1}\right) \times 0,2 = 0,8$$

Aplicando (51), é determinado o consenso de grupo sobre a alternativa, com maior preferência

$$C^G = \frac{1}{1} C_{[3]} = 0,7333.$$

O nível de consenso de grupo, especificado em 80%, não foi alcançado.

É determinada então a ordenação de preferências e alternativas, desconsiderando a presença de um especialista por vez:

Tabela 5 - Ordenação das preferências e alternativas com a exclusão de um especialista

Especialista excluído	Nova ordem das preferências com a exclusão	Ordem das alternativas com a exclusão			
		$O(X_1)$	$O(X_2)$	$O(X_3)$	$O(X_4)$
$\setminus E_1$	$X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$	2	4	1	3
$\setminus E_2$	$X_4 \succ X_3 \succ X_1 \succ X_2$	3	4	2	1
$\setminus E_3$	$X_3 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_4$	2	3	1	4
$\setminus E_4$	$X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$	2	4	1	3
$\setminus E_5$	$X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$	3	4	1	2

Os novos níveis de consenso considerando as exclusões, são determinados conforme (52):

Tabela 6 - Níveis de consenso considerando a exclusão de um especialista

	X_1	X_2	X_3	X_4
$C_{i\bar{1}}$	0,8333	0,8333	0,9167	0,5833
$C_{i\bar{2}}$	0,9167	0,7500	0,6667	0,6667
$C_{i\bar{3}}$	0,8333	0,8333	0,7500	0,5833
$C_{i\bar{4}}$	0,8333	0,6667	0,6667	0,5000
$C_{i\bar{5}}$	0,9167	0,7500	0,6667	0,6667

Por exemplo, desconsiderando o especialista E_1

Tabela 7 - Ordenação das preferências e alternativas com a exclusão do especialista 1

Pessoa	Ordem das preferências	Ordem das alternativas			
		$O(X_1)$	$O(X_2)$	$O(X_3)$	$O(X_4)$
Desconsiderando E_1					
E_2	$X_3 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_4$	2	3	1	4
E_3	$X_4 \succ X_3 \succ X_1 \succ X_2$	3	4	2	1
E_4	$X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$	3	4	1	2
E_5	$X_3 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_4$	2	3	1	4
Grupo	$X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$	2	4	1	3

e

$$C_{i\bar{1}} = \left(1 - \frac{|2-2|}{3-1}\right) \times \frac{0,2}{0,8} + \left(1 - \frac{|2-3|}{3-1}\right) \times \frac{0,2}{0,8} + \left(1 - \frac{|2-3|}{3-1}\right) \times \frac{0,2}{0,8} + \left(1 - \frac{|2-2|}{3-1}\right) \times \frac{0,2}{0,8} = 0,8333$$

A contribuição de cada pessoa na opinião do grupo, é determinada aplicando (52) e (53):

Tabela 8 - Contribuição de cada especialista na opinião do grupo

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3667	-0,2	-0,2	0,1333	-0,2

Por exemplo, $D_1 = D_{11} + D_{21} + D_{31} + D_{41} = -0,0333 - 0,1 - 0,1833 - 0,05 = -0,3667$ e

$$D_{11} = C_1 - C_{11} = 0,8 - 0,8333 = -0,0333$$

Os novos coeficientes de importância associados aos especialistas são calculados de acordo com (54) e (55), admitindo $\beta=0,2$:

$$\omega_{E_1}^1 = 0,1899; \omega_{E_2}^1 = 0,1989; \omega_{E_3}^1 = 0,1989; \omega_{E_4}^1 = 0,2133; \omega_{E_5}^1 = 0,1989$$

Por exemplo, $t_1^1 = \omega_{E_1}^0 \cdot (1 + D_1)^{0,2} = 0,2 \cdot (1 - 0,3667)^{0,2} = 0,1825$ e

$$\omega_{E_1}^1 = \frac{0,1825}{(0,1899 + 0,1989 + 0,1989 + 0,2133 + 0,1989)} = 0,1899$$

De acordo com a abordagem autocrática, os pesos dos especialistas que mais contribuíram para o consenso são elevados, e os demais reduzidos como mostra a Tabela 9:

Tabela 9 - Evolução dos pesos sobre cada especialista, a cada iteração

r	$\omega_{E_1}^r$	$\omega_{E_2}^r$	$\omega_{E_3}^r$	$\omega_{E_4}^r$	$\omega_{E_5}^r$
0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
1	0,1899 ▼	0,1989 ▼	0,1989 ▼	0,2133 ▲	0,1989 ▼

As novas preferências de grupo agregadas para todos os critérios são:

	X_1	X_2	X_3	X_4	max
$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_{1,\dots,5}}$	0,5000	0,5517	0,4861	0,5117	0,5517
	0,4483	0,5000	0,3633	0,4662	0,4662
	0,5139	0,6367	0,5000	0,5065	0,6367
	0,4883	0,5338	0,4935	0,5000	0,5338

$X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$

Os novos níveis de consenso com base nos novos coeficientes de importância são:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7993	0,7408	0,7438	0,5311
Consenso de grupo	$C^G=74,38\%$			

O nível de consenso de grupo, especificado em 80%, não foi alcançado.

Novamente é realizada a ordenação das preferências e alternativas, desconsiderando a presença de uma pessoa por vez, que resulta em:

	X_1	X_2	X_3	X_4
$C_{i\bar{1}}$	0,8304	0,8363	0,9181	0,5848
$C_{i\bar{2}}$	0,9172	0,7592	0,6704	0,6629
$C_{i\bar{3}}$	0,8322	0,8322	0,7630	0,5855
$C_{i\bar{4}}$	0,8353	0,6705	0,6744	0,5019
$C_{i\bar{5}}$	0,9172	0,7592	0,6802	0,6726

A nova contribuição de cada pessoa na opinião do grupo será:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3486	0,1888	-0,1919	-0,1389	-0,2083

O procedimento é repetido até que seja alcançado o nível de consenso estabelecido sobre a alternativa X_3 . É importante mencionar que a ordenação inicial das alternativas foi alterada para $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$. A Tabela e a Figura a seguir mostram a evolução dos coeficientes de importância:

r	$\omega_{E_1}^r$	$\omega_{E_2}^r$	$\omega_{E_3}^r$	$\omega_{E_4}^r$	$\omega_{E_5}^r$	Consenso de grupo [%]
0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	73,33
1	0,1899 ▼	0,1989 ▼	0,1989 ▼	0,2133 ▲	0,1989 ▼	74,38
2	0,1807 ▼	0,1978 ▼	0,1977 ▼	0,227 ▲	0,1969 ▼	75,34
3	0,1726 ▼	0,1951 ▼	0,1967 ▼	0,2415 ▲	0,1941 ▼	76,18
4	0,1653 ▼	0,1914 ▼	0,1959 ▼	0,2569 ▲	0,1905 ▼	76,94
5	0,1586 ▼	0,1868 ▼	0,1955 ▼	0,273 ▲	0,186 ▼	77,62
6	0,1525 ▼	0,1813 ▼	0,1956 ▲	0,2902 ▲	0,1805 ▼	78,23
7	0,1468 ▼	0,1747 ▼	0,1963 ▲	0,3083 ▲	0,1740 ▼	78,78
8	0,1414 ▼	0,1671 ▼	0,1975 ▲	0,3275 ▲	0,1664 ▼	79,28
9	0,1372 ▼	0,1603 ▼	0,1989 ▲	0,3439 ▲	0,1597 ▼	79,65
10	0,1333 ▼	0,1530 ▼	0,2002 ▲	0,3610 ▲	0,1525 ▼	80

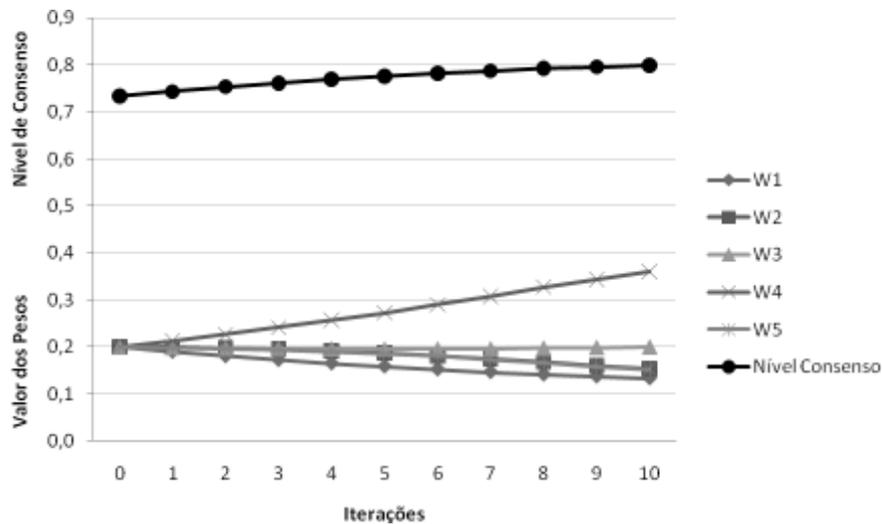


Figura 13: Evolução dos pesos de cada especialista na construção do consenso

b. Abordagem Interativa

Partindo da primeira avaliação das contribuições de cada especialista, obtida no item anterior e reescrita abaixo,

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3667	-0,2	-0,2	0,1333	-0,2

é possível verificar que o especialista E_1 é o que mais divergiu da opinião da maioria. Admitindo que ele seja convidado a rever a sua posição inicial e refaça a ordenação para o critério C_4 ,

$$O_{C_4}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 3 & 1 \rightarrow 2 & 4 & 2 \rightarrow 1 \\ \hline \end{array}$$

que resulta em,

$$R_{C_4}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3333 & 0,6667 & 0,1667 \\ X_2 & 0,6667 & 0,5 & 0,8333 & 0,3333 \\ X_3 & 0,3333 & 0,1667 & 0,5 & 0 \\ X_4 & 0,8333 & 0,6667 & 1 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

$$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & max \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,375 & 0,5417 & 0,25 & 0,5417 \\ X_2 & 0,625 & 0,5 & 0,6667 & 0,375 & 0,6667 \\ X_3 & 0,4583 & 0,3333 & 0,5 & 0,2083 & 0,4583 \\ X_4 & 0,75 & 0,625 & 0,7917 & 0,5 & 0,7917 \\ \hline \end{array} \quad X_4 \succ X_2 \succ X_1 \succ X_3$$

$$R_{C_{1,\dots,5}}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & max \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,5591 & 0,4896 & 0,5012 & 0,5591 \\ X_2 & 0,4409 & 0,5 & 0,358 & 0,4504 & 0,4504 \\ X_3 & 0,5104 & 0,642 & 0,5 & 0,4977 & 0,642 \\ X_4 & 0,4988 & 0,5496 & 0,5023 & 0,5 & 0,5496 \\ \hline \end{array} \quad X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$$

Entretanto, mesmo com a alteração, os níveis de consenso permanecem inalterados.

O nível de consenso de grupo, especificado em 80%, não é alcançado.

Analisando as novas contribuições de cada especialista,

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3667	-0,2	-0,2	0,1333	-0,2

é possível verificar que o especialista E_1 ainda persiste como o mais divergente da opinião da maioria. Admitindo que ele seja convidado novamente a rever a sua posição e refaça a ordenação para o critério C_1 ,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 3 & 1 \rightarrow 2 & 4 & 2 \rightarrow 1 \\ \hline \end{array}$$

que resulta em,

$$R_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3333 & 0,6667 & 0,1667 \\ X_2 & 0,6667 & 0,5 & 0,8333 & 0,3333 \\ X_3 & 0,3333 & 0,1667 & 0,5 & 0 \\ X_4 & 0,8333 & 0,6667 & 1 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

$$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & max \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,4167 & 0,5417 & 0,2083 & 0,5417 \\ X_2 & 0,5833 & 0,5 & 0,625 & 0,2917 & 0,625 \\ X_3 & 0,4583 & 0,375 & 0,5 & 0,1667 & 0,4583 \\ X_4 & 0,7917 & 0,7083 & 0,8333 & 0,5 & 0,8333 \\ \hline \end{array} \quad X_4 \succ X_2 \succ X_1 \succ X_3$$

$$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_{1,\dots,5}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & max \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,5675 & 0,4896 & 0,4928 & 0,5675 \\ X_2 & 0,4325 & 0,5 & 0,3496 & 0,4338 & 0,4338 \\ X_3 & 0,5104 & 0,6504 & 0,5 & 0,4893 & 0,6504 \\ X_4 & 0,5072 & 0,5662 & 0,5107 & 0,5 & 0,5662 \\ \hline \end{array} \quad X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$$

A alteração ainda não é suficiente para alterar os níveis de consenso.

O nível de consenso de grupo, especificado em 80%, não é alcançado.

Analisando as novas contribuições de cada especialista,

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3667	-0,2	-0,0333	0,1333	-0,2

o especialista E_1 ainda é o que mais diverge da opinião da maioria. Admitindo que ele seja convidado novamente a rever a sua posição e refaça a ordenação para o critério C_2 ,

$$O_{C_2}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 3 \rightarrow 4 & 2 & 4 \rightarrow 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

que resulta em,

$$R_{C_2}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,1667 & 0,3333 & 0,0000 \\ \hline X_2 & 0,8333 & 0,5 & 0,6667 & 0,3333 \\ \hline X_3 & 0,6667 & 0,3333 & 0,5 & 0,1667 \\ \hline X_4 & 1 & 0,6667 & 0,8333 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

$$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & max \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,375 & 0,4583 & 0,1667 & 0,4583 \\ \hline X_2 & 0,625 & 0,5 & 0,5833 & 0,2917 & 0,625 \\ \hline X_3 & 0,5417 & 0,4167 & 0,5 & 0,2083 & 0,5417 \\ \hline X_4 & 0,8333 & 0,7083 & 0,7917 & 0,5 & 0,8333 \\ \hline \end{array} \quad X_4 \succ X_2 \succ X_3 \succ X_1$$

$$R_{C_{1,\dots,4}}^{E_{1,\dots,5}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & max \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,5591 & 0,4730 & 0,4845 & 0,5591 \\ \hline X_2 & 0,4409 & 0,5 & 0,3413 & 0,4338 & 0,4409 \\ \hline X_3 & 0,527 & 0,6587 & 0,5 & 0,4977 & 0,6587 \\ \hline X_4 & 0,5155 & 0,5662 & 0,5023 & 0,5 & 0,5662 \\ \hline \end{array} \quad X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$$

A alteração das preferências agora é suficiente:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,7333	0,8	0,6
Consenso de grupo	$C^G=80\%$			

O nível de consenso de grupo, especificado em 80%, é alcançado.

c. Abordagem Supervisionada

Na abordagem interativa, descrita no item anterior, o especialista E_1 foi solicitado três vezes seguidas a rever a sua posição. Admitindo que na abordagem supervisionada, com a participação de um grupo moderador, e este assuma não convidar o mesmo especialista novamente e, diante das contribuições após as alterações do especialista E_1 (Tabela abaixo), decida convidar um dos especialistas com a segunda menor contribuição: E_2 , E_3 ou E_5 .

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3667	-0,2	-0,2	0,1333	-0,2

Supondo que o grupo moderador decida convidar o especialista E_3 e este faça,

$$U_{C_2}^{E_3} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 0,3 & 0,3 & 0,4 \rightarrow 0,8 & 0,6 \rightarrow 0,5 \\ \hline \end{array}$$

que resulta em,

$$R_{C_2}^{E_3} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,5 & 0,1233 & 0,2647 \\ \hline X_2 & 0,5 & 0,5 & 0,1233 & 0,2647 \\ \hline X_3 & 0,8767 & 0,8767 & 0,5 & 0,7191 \\ \hline X_4 & 0,7353 & 0,7353 & 0,2809 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

$$R_{C_{1, \dots, 4}}^{E_3} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & max \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,6212 & 0,3625 & 0,3704 & 0,6212 \\ \hline X_2 & 0,3788 & 0,5 & 0,237 & 0,245 & 0,3788 \\ \hline X_3 & 0,6375 & 0,763 & 0,5 & 0,5168 & 0,763 \\ \hline X_4 & 0,6296 & 0,755 & 0,4832 & 0,5 & 0,755 \\ \hline \end{array} \quad X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$$

$$R_{C_{1, \dots, 4}}^{E_{1, \dots, 5}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & max \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,5591 & 0,4778 & 0,5044 & 0,5591 \\ \hline X_2 & 0,4409 & 0,5 & 0,3461 & 0,4537 & 0,4537 \\ \hline X_3 & 0,5222 & 0,6539 & 0,5 & 0,5182 & 0,6539 \\ \hline X_4 & 0,4956 & 0,5463 & 0,4818 & 0,5 & 0,5463 \\ \hline \end{array} \quad X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$$

Os novos níveis de consenso são:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,7333	0,8	0,6
Consenso de grupo	$C^G=80\%$			

O nível de consenso de grupo, especificado em 80%, é alcançado.

6.6 Considerações Finais

A aplicação das abordagens de consenso autocrática e interativa permitiu confirmar as percepções dos autores que as utilizaram em seus trabalhos. Em particular, foi possível verificar que a abordagem autocrática é de fácil implementação, entretanto direciona o processo a uma solução previsível e determinística, uma vez que sempre valoriza as opiniões mais favoráveis ao consenso e penaliza as demais, sem permitir a revisão de posições iniciais dos participantes mais divergentes. Por sua vez, a abordagem interativa é mais flexível, pois permite a mudança das opiniões mais divergentes. Entretanto, como os pesos associados aos especialistas é fixo, um mesmo indivíduo pode ser solicitado, seguidas vezes, a rever a sua opinião. A nova abordagem proposta para construção de consenso mostrou-se mais coerente e produtiva. A presença do grupo moderador permite a condução do processo de decisão procurando não penalizar nenhuma das partes, através de concessões e ponderações, constituindo assim, um procedimento mais equilibrado e próximo à realidade das decisões tomadas nas empresas.

Finalmente é importante dizer que o foco principal das abordagens de consenso é encontrar a melhor solução para o problema, o que às vezes pode resultar em soluções pouco harmoniosas. Esta questão, de grande interesse para este trabalho, será discutida no próximo Capítulo.

7 ANÁLISE DA QUALIDADE NA TOMADA DE DECISÃO

7.1 Considerações Iniciais

Um levantamento amplo e geral dos trabalhos referenciados permite afirmar que a grande maioria das publicações sobre as técnicas de consenso enfocam objetivamente a busca pela melhor alternativa¹ de solução dos problemas, não explorando devidamente, os aspectos relacionados à harmoniosidade² do processo de construção do consenso e à qualidade da solução resultante. Entretanto, estas questões têm despertado interesse dos pesquisadores e começam a ser abordadas em alguns trabalhos, como por exemplo o artigo [179], no qual diferentes métodos de decisão em grupo são usados e a correlação média entre a ordenação das alternativas de cada indivíduo e a ordenação de grupo é usada como métrica para escolher qual método de decisão em grupo é mais apropriado.

Nessa direção, este Capítulo apresenta uma das principais contribuições deste trabalho, que reside sobre a proposição de utilização de uma métrica para avaliar os aspectos da qualidade da solução nos processos de tomada de decisão.

7.2 Metodologia Proposta para Análise da Qualidade da Solução

A metodologia proposta consiste em monitorar e analisar a qualidade dos processos de tomada de decisão com nível de consenso estabelecido, utilizando diferentes combinações dos operadores de agregação de preferências e ordenação de alternativas apresentados anteriormente, sob os seguintes aspectos:

- Quantidade de iterações necessárias para alcançar o nível de consenso desejado;

¹ Até o presente momento, a melhor alternativa foi considerada como aquela que apresenta a maior preferência, seja individual ou do grupo. Entretanto, em determinadas situações, a melhor alternativa pode ser direcionada para o interesse de uma empresa ou pessoa, através da manipulação dos coeficientes de importância associados a critérios e/ou decisores.

² O conceito de harmoniosidade está associado aos níveis de satisfação dos critérios, que devem ser iguais ou próximos, na solução de um problema. Na análise da qualidade do processo de construção do consenso e da solução final, é realizada uma extrapolação do conceito clássico, estando a harmoniosidade, associada aos níveis de consenso sobre cada alternativa, que devem ser iguais ou próximos, na solução de um problema.

- Quantidade de alterações de posições em relação às preferências iniciais;
- Quantidade de alterações dos coeficientes de importância associados às pessoas;
- Variação dos níveis de consenso de grupo, sobre todas as alternativas, ao longo do processo;
- Proximidade dos níveis de consenso de grupo por alternativa, considerando a ordenação final;
- Quantidade de mudanças na ordenação das alternativas, em relação à ordenação inicial.

Apesar de traduzidos numericamente e permitirem uma avaliação quantitativa, os três primeiros aspectos apresentam um alto grau de subjetividade, pois dependem diretamente da alteração das preferências dos decisores e dos respectivos coeficientes de importância, o que os torna pouco significativos e produtivos.

O quarto aspecto permite uma avaliação qualitativa e dinâmica. A cada iteração do processo de decisão, é calculada uma quantidade que expressa a diferença numérica entre os níveis de consenso sobre cada alternativa, denominada “grau de harmoniosidade” e definida como:

$$H^r = \left[\sum_{i,j=1}^n |C_i - C_j| \right]^{-1}, \quad (57)$$

onde H^r representa o grau de harmoniosidade na r -ésima iteração e C_k representa o nível de consenso sobre a k -ésima alternativa definido em (50). A análise do comportamento desta grandeza permite avaliar a harmoniosidade do processo de construção de consenso da seguinte maneira:

- Uma trajetória ascendente do grau de harmoniosidade, indica que os níveis de consenso sobre as alternativas estão mais próximos a cada iteração;

- Uma trajetória descendente do grau de harmoniosidade indica que os níveis de consenso sobre as alternativas estão mais distantes a cada iteração, ou seja, o nível de consenso sobre uma ou mais alternativas está aumentando em detrimento da redução ou estagnação do nível de consenso sobre as demais.

Obs: Variações abruptas, ascendentes ou descendentes, podem ocorrer no comportamento do grau de harmoniosidade. Por exemplo, numa determinada iteração, é encontrado um alto valor de H para níveis próximos de consenso sobre as alternativas. Na iteração seguinte o grau de harmoniosidade cai a um patamar muito inferior, devido ao distanciamento dos níveis de consenso. Portanto, os regimes transitórios devem ser analisados com cuidado.

O último aspecto refere-se à qualidade da solução final e considera o valor do grau de harmoniosidade no momento em que é alcançado o nível de consenso desejado. Uma solução será considerada harmoniosa quando os níveis de consenso sobre todas as alternativas forem iguais ou próximos, resultando em um valor alto de H .

7.2.1 Exemplo de Aplicação

Como exemplo, podemos analisar os processos de obtenção de consenso apresentados no Exemplo 6.5.

a. Abordagem Autocrática

A construção de consenso com base na abordagem autocrática proporcionou os seguintes resultados:

Tabela 10 - Construção do consenso com base na Abordagem Autocrática

Iteração	Consenso sobre cada Alternativa				Consenso de Grupo [%]	Grau de Harmoniosidade
	C_1	C_2	C_3	C_4		
0	0,8	0,7333	0,7333	0,5333	73,33	1,25
1	0,7993	0,7408	0,7438	0,5371	74,38	1,27
2	0,7982	0,748	0,7534	0,5406	75,34	1,28
3	0,7964	0,7552	0,7618	0,5436	76,18	1,31
4	0,7909	0,770	0,7762	0,5486	77,62	1,36
5	0,7872	0,7778	0,7823	0,5506	78,23	1,40
6	0,7829	0,7859	0,7878	0,5523	78,78	1,41
7	0,8888	0,7946	0,7928	0,6646	79,28	1,48
8	0,8934	0,8019	0,7965	0,6747	79,65	1,51
9	0,8982	0,8093	0,8	0,6852	80	1,54

Os graus de harmoniosidade apresentados na Tabela 10 podem ser calculados a partir de (57), como por exemplo para a situação inicial:

$$H^0 = \left[|0,8 - 0,7333| + |0,8 - 0,7333| + |0,8 - 0,5333| + \dots + |0,7333 - 0,5333| \right]^{-1} = 1,25$$

Representados graficamente:

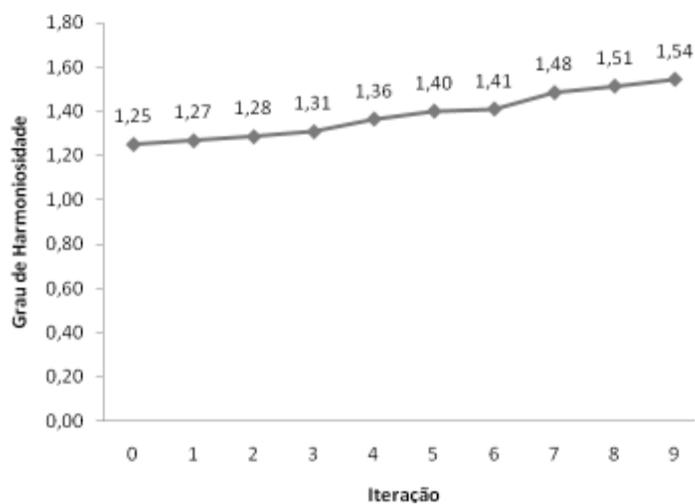


Figura 14: Gráfico de evolução do Grau de Harmoniosidade

A tabulação de todos os aspectos citados anteriormente, para a abordagem autocrática, é apresentada na Tabela 11.

Tabela 11 - Características do processo com aplicação da Abordagem Autocrática

Número de iterações até o nível de consenso desejado	Número de alterações de posições iniciais	Número de alterações dos pesos associados às pessoas	Variação dos níveis de consenso de grupo ao longo do processo	Níveis de consenso de grupo sobre a ordenação final [%]	Número de alterações na ordenação das alternativas, em relação à ordenação inicial
9	0	9	Ascendente, com pequena diferença entre os valores inicial e final de H	$C_1=89,82$ $C_2=80,93$ $C_3=80$ $C_4=68,52$	1

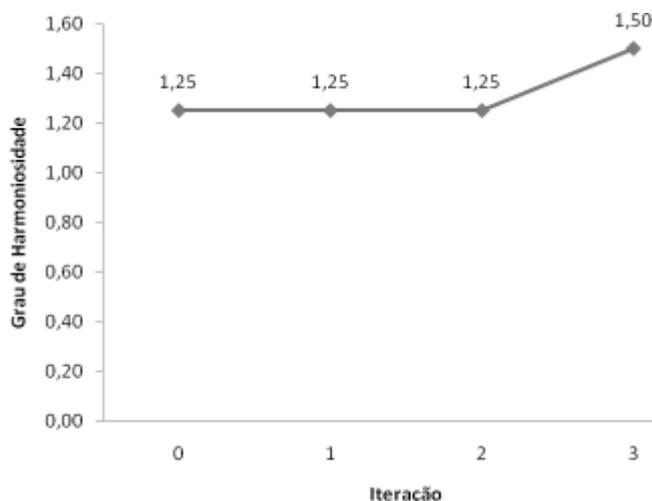
A abordagem autocrática permitiu alcançar o nível de consenso desejado em 9 iterações, o que pode ser reduzido a partir do aumento do valor do parâmetro β na equação (56). Como é estabelecido na prática desta abordagem, não ocorreram alterações das opiniões dos especialistas. A variação do nível de consenso de grupo ao longo do processo foi pequena e ascendente. Três alternativas atingiram o nível de consenso desejado (80%). Foi evidenciado baixo nível de consenso sobre a alternativa X_4 . Em decorrência das mudanças dos pesos, a ordenação inicial $X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$ mudou para $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$.

b. Abordagem Interativa

A construção de consenso com base na abordagem interativa proporcionou os seguintes resultados:

Iteração	Consenso sobre cada Alternativa				Consenso de Grupo [%]	Grau de Harmoniosidade
	C_1	C_2	C_3	C_4		
0	0,8	0,7333	0,7333	0,5333	73,33	1,25
1	0,8	0,7333	0,7333	0,5333	73,33	1,25
2	0,8	0,7333	0,7333	0,5333	73,33	1,25
3	0,8	0,7333	0,8	0,6	80	1,5

Representados graficamente:



A tabulação de todos os aspectos citados anteriormente, para a abordagem interativa, é apresentada a seguir:

Número de iterações até o nível de consenso desejado	Número de alterações de posições iniciais	Número de alterações dos pesos associados às pessoas	Variação dos níveis de consenso de grupo ao longo do processo	Níveis de consenso de grupo sobre a ordenação final [%]	Número de alterações na ordenação das alternativas, em relação à ordenação inicial
3	3	0	Ascendente, com pequena diferença entre os valores inicial e final de H	$C_1=80$ $C_2=73,33$ $C_3=80$ $C_4=60$	1

A abordagem interativa permitiu alcançar o nível de consenso desejado mais rapidamente, em 3 iterações, devido à possibilidade de alteração de posições iniciais, que nesta abordagem é permitida. Foram necessárias três alterações de posições iniciais de um único especialista. O nível de consenso de grupo aumentou ao longo do processo. Duas alternativas atingiram o nível de consenso desejado. Foi evidenciado baixo nível de consenso sobre a alternativa X_4 . As mudanças

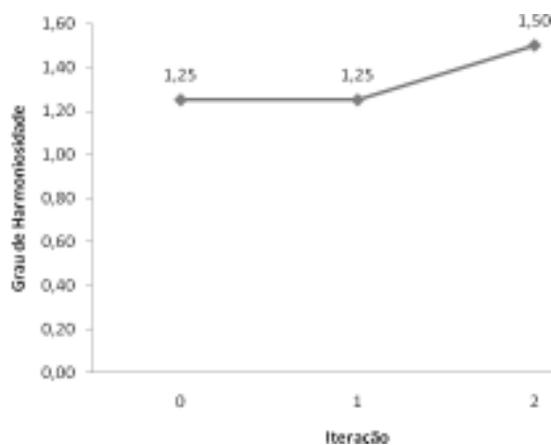
realizadas pelo especialista E_1 provocaram a mudança da ordenação para $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$, que depois retornou ao estado inicial $X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$.

c. Abordagem Supervisionada

A construção de consenso com base na abordagem supervisionada proporcionou os seguintes resultados:

Iteração	Consenso sobre cada Alternativa				Consenso de Grupo [%]	Grau de Harmoniosidade
	C_1	C_2	C_3	C_4		
0	0,8	0,7333	0,7333	0,5333	73,33	1,25
1	0,8	0,7333	0,7333	0,5333	73,33	1,25
2	0,8	0,7333	0,8	0,6	80	1,50

Representados graficamente:



A tabulação de todos os aspectos citados anteriormente, para a abordagem interativa, é apresentada a seguir:

Número de iterações até o nível de consenso desejado	Número de alterações de posições iniciais	Número de alterações dos pesos associados às pessoas	Variação dos níveis de consenso de grupo ao longo do processo	Níveis de consenso de grupo sobre a ordenação final [%]	Número de alterações na ordenação das alternativas, em relação à ordenação inicial
2	2	0	Ascendente, com pequena diferença entre os valores inicial e final de H	$C_1=80$ $C_2=73,33$ $C_3=80$ $C_4=60$	0

A abordagem supervisionada também permitiu alcançar o nível de consenso desejado mais rapidamente, em 2 iterações. Foram necessárias duas alterações de posições iniciais de dois especialistas. A variação do nível de consenso de grupo ao longo do processo foi pequena e ascendente. Duas alternativas atingiram o nível de consenso desejado. Duas alternativas atingiram o nível de consenso desejado. Foi evidenciado baixo nível de consenso sobre a alternativa X_4 . As mudanças realizadas pelos especialistas não provocaram alteração na ordenação final, em relação à inicial.

7.3 Qualidade da Solução versus Operadores de Agregação e Ordenação

A princípio, não é possível apontar a combinação entre os diferentes tipos de operadores de agregação das preferências [180] e operadores de ordenação das alternativas [115], que resulta no melhor desempenho com base nos aspectos mencionados acima. Esta questão, discutida no trabalho [178], é complexa e está relacionada à definição de critérios para avaliação de desempenho.

O objetivo desta análise é avaliar os esquemas de consenso em função dos métodos de agregação e ordenação utilizados, a fim de identificar uma possível melhor composição que resulte em soluções mais harmoniosas. A avaliação será conduzida com base nas seguintes premissas:

- Será utilizada a abordagem de construção de consenso supervisionada;

- O grupo moderador pode solicitar cada especialista a rever a sua opinião uma única vez;
- Quando solicitada, a pessoa deve alterar as preferências o mínimo necessário para trocar a posição de um par de alternativas adjacentes;
- Quando a mudança de opinião do especialista provocar a queda do nível de consenso de grupo, o grupo moderador pode recusá-la;
- Os coeficientes de importância associados às pessoas podem ser alterados uma única vez;
- Os coeficientes de importância associados aos critérios não podem ser alterados.

O problema apresentado no Exemplo 6.5 será utilizado como cenário para esta análise. O desenvolvimento dos processos será apresentado de forma resumida, entretanto com as informações suficientes para possíveis verificações. O nível de consenso sobre todas as alternativas deve ser igual ou superior a 75%.

7.3.1 *Agregação pelo Operador Soma e Ordenação pelo Operador Soma*

Ordenação inicial das alternativas: $X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,6667	0,6667	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3	-0,3	0,0333	0,0333	-0,3

O grupo moderador pode escolher entre os especialistas E_1 , E_2 e E_5 . Admitindo que escolha o especialista E_1 para rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 \rightarrow 4 & 1 & 4 \rightarrow 3 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Obs: As setas indicam a mudança de opinião sobre a preferência.

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,6667	0,7333	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=66,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,1667	-0,1667	0,1667	0,1667	-0,1667

O grupo moderador convida o especialista E_2 a rever a sua opinião e ele faz,

$$A_{C_2}^{E_2} = \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 & 6 \\ \hline 1/2 & 1 & 1/4 & 3 \rightarrow 0,5 \\ \hline 1/7 & 4 & 1 & 4 \\ \hline 1/6 & 1/3 \rightarrow 2 & 1/4 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad A_{C_3}^{E_2} = \begin{array}{c} X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline 1/2 & 1 & 1/4 & 3 \rightarrow 0,25 \\ \hline 1/5 & 4 & 1 & 6 \\ \hline 1/6 & 1/3 \rightarrow 4 & 1/6 & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,7333	0,7333	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,2	-0,0333	0,1333	0,1333	-0,2

O grupo moderador opta por convidar o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8	0,7333	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,2333	-0,0667	0,1	0,1	-0,0667

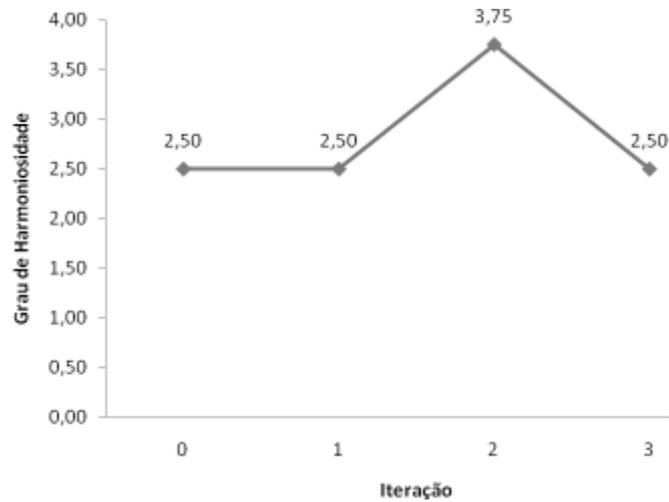
O grupo moderador convida o especialista E_3 a rever a sua opinião e ele faz,

$$U_{C_3}^{E_3} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 0,4 & 0,3 & 0,5 & 0,6 \rightarrow 0,3 \\ \hline \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8	0,8	0,8
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=76,67\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.2 Agregação pelo Operador Soma e Ordenação pelo Operador Máximo

Ordenação das alternativas: $X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,7333	0,7333	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3667	-0,2	-0,2	0,1333	-0,2

O grupo moderador convida o especialista E_1 a rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 3 \rightarrow 4 & 1 & 4 \rightarrow 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,7333	0,8	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3667	-0,2	-0,2000	0,1333	-0,2000

O grupo moderador opta por não convidar o especialista E_1 novamente e convida o especialista E_3 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$U_{C_3}^{E_3} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 0,4 & 0,3 & 0,5 \rightarrow 0,7 & 0,6 \rightarrow 0,3 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,7333	0,8667	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,4	-0,2333	-0,0667	-0,0667	-0,2333

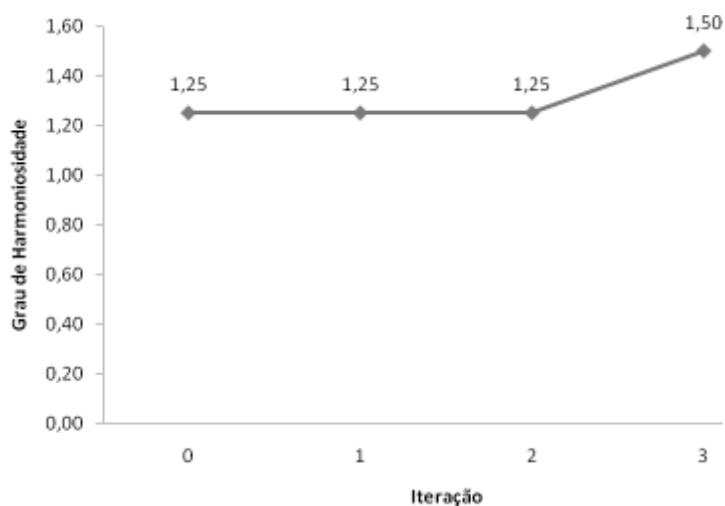
O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,8	0,8667	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=76,67\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.3 Agregação pelo Operador Soma e Ordenação pelo Operador Média e Desvio Padrão

Ordenação das alternativas: $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,6667	0,6667	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3	-0,3	0,0333	0,0333	-0,3

O grupo moderador pode escolher entre os especialistas E_1 , E_2 e E_5 . Admitindo que escolha o especialista E_1 para rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 3 \rightarrow 4 & 1 & 4 \rightarrow 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,6667	0,7333	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=66,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,1667	-0,1667	0,1667	0,1667	-0,1667

O grupo moderador convida o especialista E_2 a rever a sua opinião e ele faz,

$$A_{C_2}^{E_2} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1 & 2 & 7 & 6 \\ \hline X_2 & 1/2 & 1 & 1/4 & 3 \rightarrow 0,5 \\ \hline X_3 & 1/7 & 4 & 1 & 4 \\ \hline X_4 & 1/6 & 1/3 \rightarrow 2 & 1/4 & 1 \\ \hline \end{array} \quad A_{C_3}^{E_2} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline X_2 & 1/2 & 1 & 1/4 & 3 \rightarrow 0,25 \\ \hline X_3 & 1/5 & 4 & 1 & 6 \\ \hline X_4 & 1/6 & 1/3 \rightarrow 4 & 1/6 & 1 \\ \hline \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,7333	0,7333	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,2	-0,0333	0,1333	0,1333	-0,2

O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8	0,7333	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,2333	-0,0667	0,1	0,1	-0,0667

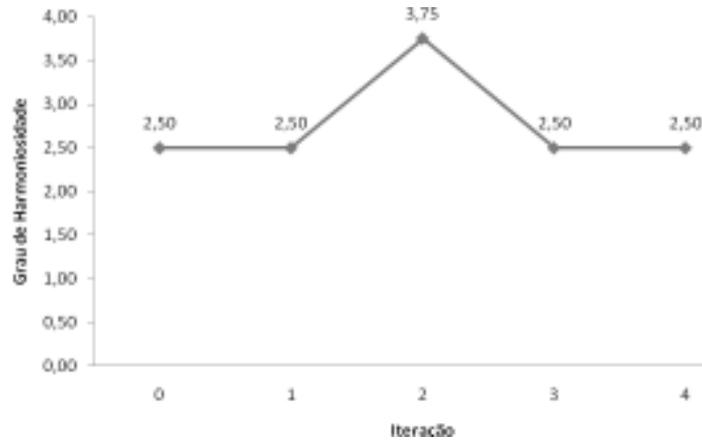
O grupo moderador convida o especialista E_3 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$U_{C_3}^{E_3} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 0,4 & 0,3 & 0,5 \rightarrow 0,7 & 0,6 \rightarrow 0,3 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8	0,8	0,8
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=76,67\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.4 Agregação pelo Operador Soma e Ordenação pelo Operador Grau de Não-Dominância

Ordenação das alternativas: $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,8	0,5333	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,0333	-0,3667	0,3	-0,0333	-0,2

O grupo moderador convida o especialista E_2 a rever a sua opinião e ele faz,

	X_1	X_2	X_3	X_4	
$A_{C_2}^{E_2} =$	X_1	1	2	7	$6 \rightarrow 1/5$
	X_2	1/2	1	1/4	3
	X_3	1/7	4	1	4
	X_4	1/6 \rightarrow 5	1/3	1/4	1

	X_1	X_2	X_3	X_4	
$A_{C_3}^{E_2} =$	X_1	1	2	5	$6 \rightarrow 1/5$
	X_2	1/2	1	1/4	3
	X_3	1/5	4	1	6
	X_4	1/6 \rightarrow 5	1/3	1/6	1

$$A_{C_4}^{E_2} =$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	1	2	2	$4 \rightarrow 1/3$
X_2	1/2	1	1/6	3
X_3	1/2	6	1	2
X_4	$1/6 \rightarrow 3$	1/3	1/2	1

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,8	0,5333	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,0333	-0,3667	0,1333	-0,3667	-0,3667

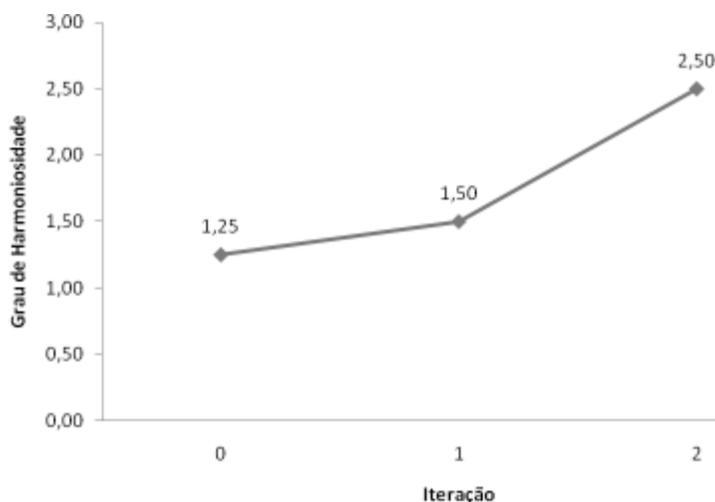
O grupo moderador pode escolher entre os especialistas E_4 e E_5 . Admitindo que escolha o especialista E_5 para rever a sua opinião e ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_4 \succ X_3 \succ X_1 \succ X_2$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,8	0,7333	0,8667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=80\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.5 Análise dos Resultados da Utilização do Operador de Agregação Soma

Os resultados da combinação do operador Soma com os operadores de ordenação estudados são apresentados na Tabela abaixo e em seguida analisados.

	Iterações até o nível de consenso desejado	Alterações de posições iniciais	Alterações dos pesos associados às pessoas	Varição do Grau de Harmoniosidade H	Níveis de consenso de grupo sobre a ordenação final [%]	Alterações na ordenação das alternativas, em relação à ordenação inicial
Agregação pela Soma e Ordenação pela Soma	4	4	0	$H^0 = 2,5 \rightarrow H^4 = 2,5$ H variou na ascendente até o valor 3,75 mas retornou ao patamar inicial.	$C_1=66,67$ $C_2=80$ $C_3=80$ $C_4=80$	1
Agregação pela Soma e Ordenação pelo Máximo	3	3	0	$H^0 = 1,25 \rightarrow H^3 = 1,5$ O valor inicial de H manteve-se estável ao longo do processo e aumentou no final para 1,5.	$C_1=73,33$ $C_2=80$ $C_3=86,67$ $C_4=66,67$	0
Agregação pela Soma e Ordenação pela Média e Desvio Padrão	4	4	0	$H^0 = 2,5 \rightarrow H^4 = 2,5$ O valor de H oscilou na ascendente chegando a 3,75 mas retornou ao patamar inicial.	$C_1=66,67$ $C_2=80$ $C_3=80$ $C_4=80$	1
Agregação pela Soma e Ordenação pelo Grau de Não Dominância	2	2	0	$H^0 = 1,25 \rightarrow H^2 = 2,5$ O valor de H aumentou ao longo do processo.	$C_1=80$ $C_2=80$ $C_3=73,33$ $C_4=86,67$	1

O operador de agregação Soma mostrou boa capacidade de preparação das preferências, proporcionando fácil distinção das alternativas através dos operadores de ordenação.

A ordenação inicial das alternativas foi diferente para os diferentes operadores de ordenação.

As mudanças de opinião provocaram mudanças na ordenação inicial das alternativas em três situações.

Em nenhum dos exemplos simulados foi necessária a intervenção do grupo moderador para alterar os coeficientes de importância dos especialistas.

A princípio, a combinação do operador Soma para a agregação e do operador Grau de Não Dominância para a ordenação foi o que apresentou o maior crescimento da harmoniosidade. Entretanto, houve alteração na ordenação inicial das alternativas, fato não desejável. Desta forma, apesar de não ter sido a mais eficiente, a combinação do operador Soma para a agregação e do operador Máximo para a ordenação é escolhida como a melhor.

7.3.6 Agregação pelo Operador OWA e Ordenação pelo Operador Soma

Ordenação inicial das alternativas: $X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,6667	0,6667	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3	-0,3	0,0333	0,0333	-0,3

O grupo moderador pode escolher entre os especialistas E_1 , E_2 e E_5 . Admitindo que escolha o especialista E_1 para rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{c|c|c|c} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 3 \rightarrow 4 & 1 & 4 \rightarrow 3 & 2 \end{array}$$

Os novos níveis de consenso são:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6	0,6667	0,7333	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3	-0,3	0,0333	0,0333	-0,3

O grupo moderador convida o especialista E_2 a rever a sua opinião e ele faz,

$$A_{C_2}^{E_2} = \begin{array}{c|c|c|c|c} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1 & 2 & 7 & 6 \\ X_2 & 1/2 & 1 & 1/4 & 3 \rightarrow 0,5 \\ X_3 & 1/7 & 4 & 1 & 4 \\ X_4 & 1/6 & 1/3 \rightarrow 2 & 1/4 & 1 \end{array} \quad A_{C_3}^{E_2} = \begin{array}{c|c|c|c|c} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ X_2 & 1/2 & 1 & 1/4 & 3 \rightarrow 0,25 \\ X_3 & 1/5 & 4 & 1 & 6 \\ X_4 & 1/6 & 1/3 \rightarrow 4 & 1/6 & 1 \end{array}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,7333	0,7333	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,2	-0,0333	0,1333	0,1333	-0,2

O grupo moderador opta por convidar o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8	0,7333	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,2333	-0,0667	0,1	0,1	-0,0667

O grupo moderador convida o especialista E_3 a rever a sua opinião e ele faz,

$$U_{C_3}^{E_3} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 0,4 & 0,3 & 0,5 & 0,6 \rightarrow 0,3 \\ \hline \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6	0,8	0,8	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,4	0,1	0,1	-0,0667	-0,0667

O grupo moderador então convida o especialista E_4 a rever a sua opinião e ele faz,

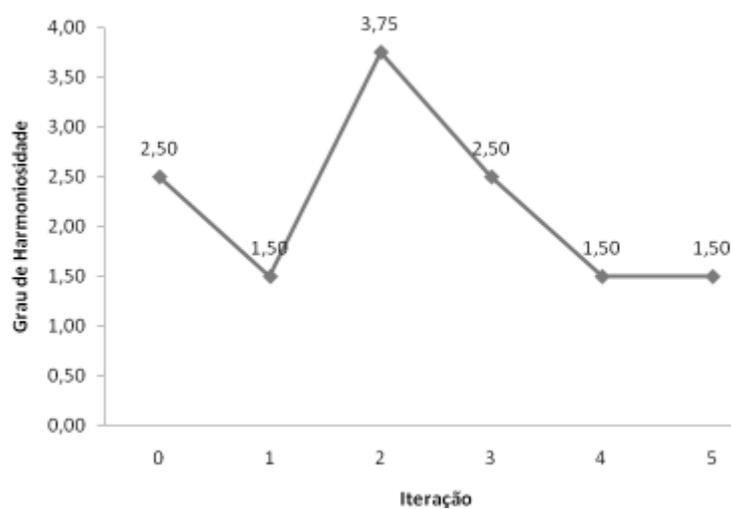
$$R_{C_1}^{E_4} =$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0,5	0,3→0,6	0,4	0,2
X_2	0,4	0,5	0,3	0,4
X_3	0,6	0,7	0,5	0,6
X_4	0,8	0,6	0,4	0,5

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8667	0,8	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=76,67\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.7 Agregação pelo Operador OWA e Ordenação pelo Operador Máximo

Ordenação das alternativas: $X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,7333	0,7333	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3667	-0,2	-0,2	0,1333	-0,2

O grupo moderador convida o especialista E_1 a rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 3 \rightarrow 4 & 1 & 4 \rightarrow 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,7333	0,8	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3667	-0,2	-0,2	0,1333	-0,2

O grupo moderador opta por não convidar o especialista E_1 novamente e convida o especialista E_3 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$U_{C_3}^{E_3} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 0,4 & 0,3 & 0,5 \rightarrow 0,7 & 0,6 \rightarrow 0,3 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,7333	0,8667	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,4	-0,2333	-0,0667	0,0667	-0,2333

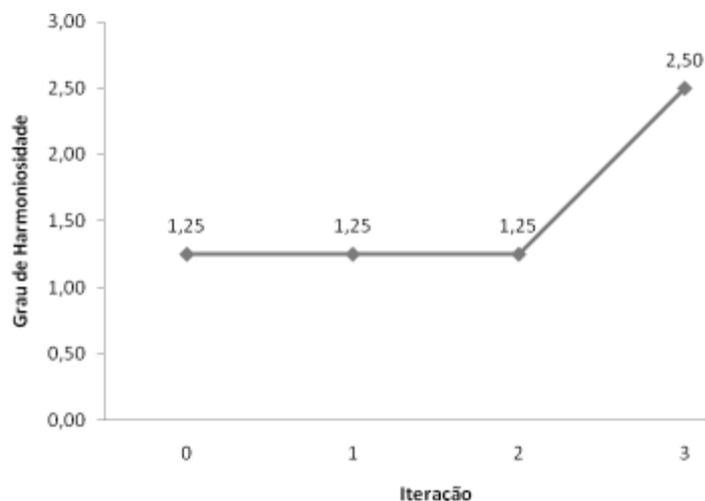
O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,8	0,8667	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=80\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.8 Agregação pelo Operador OWA e Ordenação pelo Operador Média e Desvio Padrão

Ordenação das alternativas: $X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,6667	0,6667	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3	-0,3	0,0333	0,0333	-0,3

O grupo moderador convida o especialista E_1 a rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 3 \rightarrow 4 & 1 & 4 \rightarrow 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6	0,6667	0,7333	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3	-0,3	0,0333	0,0333	-0,3

O grupo moderador opta por convidar o especialista E_2 a rever a sua opinião. Ele faz,

		X_1	X_2	X_3	X_4
$A_{C_2}^{E_2} =$	X_1	1	2	7	6
	X_2	1/2	1	1/4	3→0,5
	X_3	1/7	4	1	4
	X_4	1/6	1/3→2	1/4	1

		X_1	X_2	X_3	X_4
$A_{C_3}^{E_2} =$	X_1	1	2	5	6
	X_2	1/2	1	1/4	3→0,25
	X_3	1/5	4	1	6
	X_4	1/6	1/3→4	1/6	1

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,7333	0,7333	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,2	-0,0333	0,1333	0,1333	-0,2

O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

Os novos níveis de consenso são:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8	0,7333	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,2333	-0,0667	0,1	0,1	-0,0667

O grupo moderador opta por convidar o especialista E_3 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$U_{C_3}^{E_3} = \begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 0,4 & 0,3 & 0,5 \rightarrow 0,7 & 0,6 \rightarrow 0,3 \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6	0,8	0,8	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

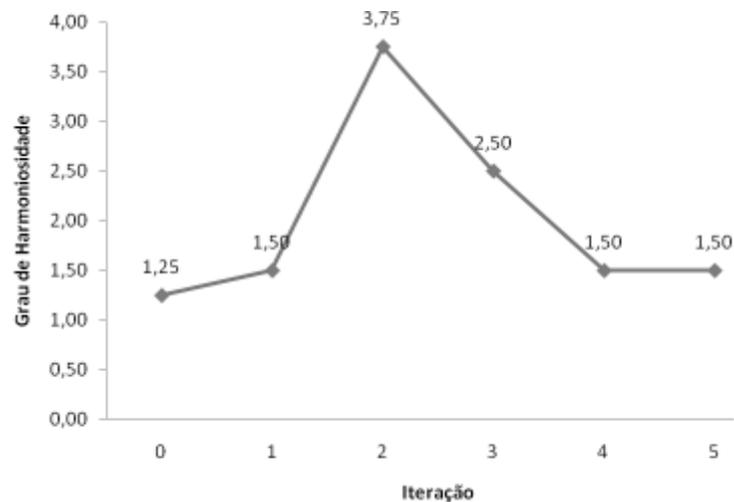
O grupo moderador então convida o especialista E_4 a rever a sua opinião e ele faz,

$$R_{C_1}^{E_4} = \begin{array}{c|c|c|c|c} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3 \rightarrow 0,6 & 0,4 & 0,2 \\ X_2 & 0,4 & 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ X_3 & 0,6 & 0,7 & 0,5 & 0,6 \\ X_4 & 0,8 & 0,6 & 0,4 & 0,5 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8667	0,8	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=76,67\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.9 Agregação pelo Operador OWA e Ordenação pelo Operador Grau de Não-Dominância

Ordenação das alternativas: $X_3 \succ X_4 \succ X_1 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,8	0,5333	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,0333	-0,3667	0,3	-0,0333	-0,2

O grupo moderador opta por convidar o especialista E_2 a rever a sua opinião. Ele faz,

	X_1	X_2	X_3	X_4		X_1	X_2	X_3	X_4		
$A_{C_2}^{E_2} =$	X_1	1	2	7	6	$A_{C_3}^{E_2} =$	X_1	1	2	5	6
	X_2	1/2	1	1/4	3→0,5		X_2	1/2	1	1/4	3→0,25
	X_3	1/7	4	1	4		X_3	1/5	4	1	6
	X_4	1/6	1/3→2	1/4	1		X_4	1/6	1/3→4	1/6	1

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,8	0,5333	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,0333	-0,3667	0,3	-0,0333	-0,2

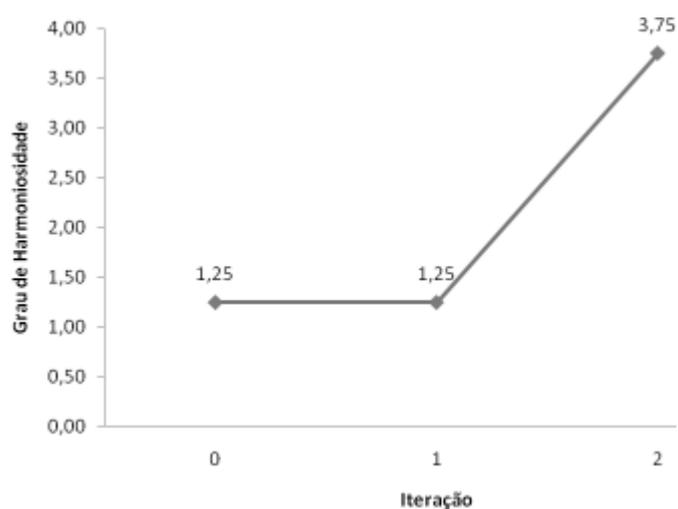
O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_4 \succ X_3 \succ X_1 \succ X_2$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,8	0,7333	0,8
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G = 76,67\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.10 Análise dos Resultados da Utilização do Operador de Agregação OWA

Os resultados da combinação do operador OWA com os operadores de ordenação estudados são apresentados na Tabela abaixo e analisados em seguida.

	Iterações até o nível de consenso desejado	Alterações de posições iniciais	Alterações dos pesos associados às pessoas	Varição do Grau de Harmoniosidade H	Níveis de consenso de grupo sobre a ordenação final [%]	Alterações na ordenação das alternativas, em relação à ordenação inicial
Agregação pelo OWA e Ordenação pela Soma	5	5	0	$H^0 = 2,5 \rightarrow H^5 = 1,5$ H variou na ascendente, atingindo 3,75 e depois caiu a 1,5.	$C_1=66,67$ $C_2=86,67$ $C_3=80$ $C_4=73,33$	1
Agregação pelo OWA e Ordenação pelo Máximo	3	3	0	$H^0 = 1,25 \rightarrow H^3 = 2,5$ O valor inicial de H foi inferior ao exemplo anterior, entretanto dobrou ao longo do processo.	$C_1=80$ $C_2=80$ $C_3=86,67$ $C_4=73,33$	1
Agregação pelo OWA e Ordenação pela Média e Desvio Padrão	5	5	0	$H^0=1,25 \rightarrow H^5 = 1,5$ O valor de H oscilou na ascendente chegando a 3,75 mas retornou ao patamar inicial.	$C_1=66,67$ $C_2=86,67$ $C_3=80$ $C_4=73,33$	1
Agregação pelo OWA e Ordenação pelo Grau de Não Dominância	2	2	0	$H^0 = 1,25 \rightarrow H^2 = 3,75$ O valor de H caiu de forma significativa.	$C_1=73,33$ $C_2=80$ $C_3=73,33$ $C_4=80$	1

O operador de agregação OWA mostrou boa capacidade de preparação das preferências, proporcionando na maioria dos casos, a fácil distinção das alternativas através dos operadores de ordenação. Foi necessária uma intervenção do grupo moderador para distinguir a ordenação de alternativas.

A ordenação inicial das alternativas foi diferente para os diferentes operadores de ordenação.

As mudanças de opinião não provocaram mudanças na ordenação inicial das alternativas.

Em nenhum dos exemplos simulados foi necessária a intervenção do grupo moderador para alterar os coeficientes de importância dos especialistas.

A harmoniosidade das soluções foi satisfatória e a combinação que apresentou a melhor evolução do nível de consenso, ao longo do processo, foi a Agregação pela operador OWA e a Ordenação pelo operador Máximo.

7.3.11 Agregação pelo Operador Mínimo e Ordenação pelo Operador Soma

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,4	0,8	0,3333	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=53,33\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,7	-0,2	-0,0333	-0,0333	-0,2

O grupo moderador convida o especialista E_1 a rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_2}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 3 \rightarrow 2 & 2 \rightarrow 3 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,4667	0,8667	0,3333	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=56,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,5667	0,1	-0,0667	-0,0667	-0,2333

O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_4 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_3$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6	0,9333	0,3333	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,4667	-0,1333	-0,1333	0,3333	0,3333

O grupo moderador convida o especialista E_3 a rever a sua opinião e ele faz,

$$U_{C_4}^{E_3} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 0,7 & 0,3 & 0,6 \rightarrow 0,1 & 0,4 \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	1	0,5333	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	0,2667	-0,2333	0,2667	-0,0667	0,1

O grupo moderador convida o especialista E_2 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$A_{C_2}^{E_2} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1 & 2 & 7 & 6 \\ X_2 & 1/2 & 1 & 1/4 \rightarrow 2 & 3 \\ X_3 & 1/7 & 4 \rightarrow 1/2 & 1 & 4 \\ X_4 & 1/6 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,9333	0,6	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	0,2667	-0,2333	0,2667	-0,0667	0,1

O grupo moderador convida o especialista E_4 a rever a sua opinião e ele faz,

$$R_{C_1}^{E_4} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,6 & 0,2 \rightarrow 0,7 & 0,6 \\ X_2 & 0,4 & 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ X_3 & 0,3 & 0,7 & 0,5 & 0,3 \\ X_4 & 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,5 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8667	0,6667	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	0,2667	-0,2333	0,2667	-0,0667	0,1

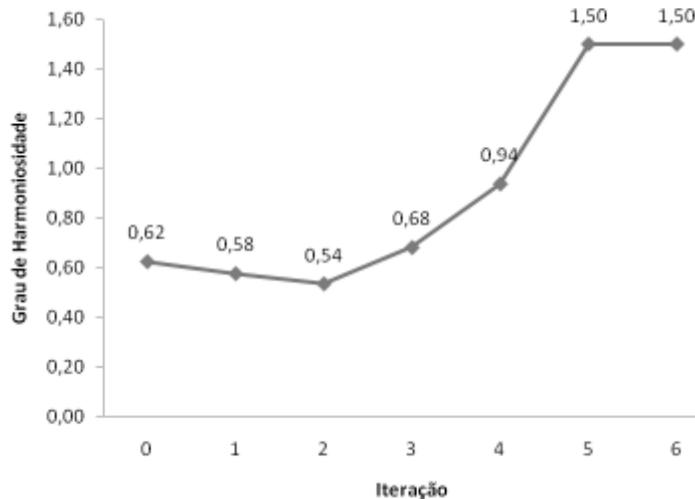
O grupo moderador então decide intervir sobre os coeficientes de importância atribuídos aos especialistas, valorizando aqueles que mais contribuem para o consenso de grupo, fazendo

$$\omega_1 = 0,25; \omega_2 = 0,15; \omega_3 = 0,25; \omega_4 = 0,15; \omega_5 = 0,2,$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7167	0,9	0,7	0,7833
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=77,5\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.12 Agregação pelo Operador Mínimo e Ordenação pelo Operador Máximo

Ordenação das alternativas: $X_4 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_3$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8	0,3333	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=60\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,4	-1,0667	-0,6667	-1	-0,6667

O grupo moderador convida o especialista E_1 a rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 1 \rightarrow 3 & 3 \rightarrow 1 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,8667	0,3333	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,4	-1,0667	-0,9333	-1,2667	-0,9333

O grupo moderador convida o especialista E_4 a rever a sua opinião e ele faz,

$$R_{C_1}^{E_4} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,6 & 0,2 \rightarrow 0,7 & 0,6 \\ \hline X_2 & 0,4 & 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ \hline X_3 & 0,3 & 0,7 & 0,5 & 0,3 \\ \hline X_4 & 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,8	0,4	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,4	-1,0667	-0,9333	-1,2667	-0,9333

O grupo moderador convida o especialista E_2 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$A_{C_2}^{E_2} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1 & 2 & 7 & 6 \\ X_2 & 1/2 & 1 & 1/4 \rightarrow 2 & 3 \\ X_3 & 1/7 & 4 \rightarrow 1/2 & 1 & 4 \\ X_4 & 1/6 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8	0,4667	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,4	-1,0667	-1,2	-1,4	-1,0667

O grupo moderador convida o especialista E_3 a rever a sua opinião e ele faz,

$$U_{C_4}^{E_3} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 0,7 & 0,3 & 0,6 \rightarrow 0,1 & 0,4 \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,8667	0,6	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,1333	-0,7333	-1,1333	-1,4	-1,0667

O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

Os novos níveis de consenso são:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,9333	0,6	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G = 73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,2667	-0,7333	-1	-1,2667	-0,9333

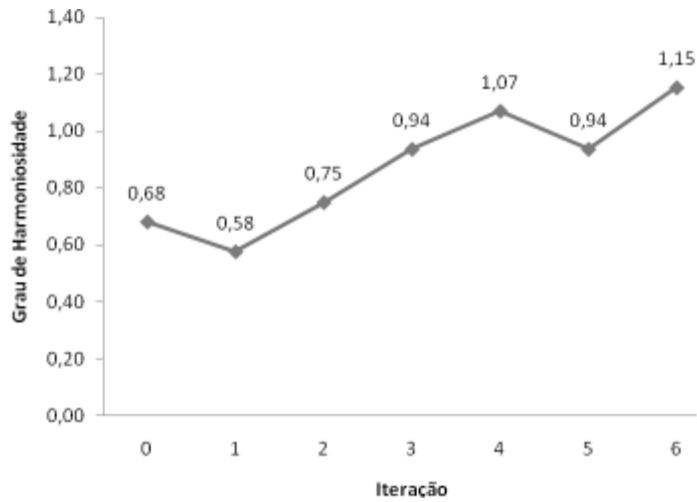
O grupo moderador então decide intervir sobre os coeficientes de importância atribuídos aos especialistas, para obter o nível de consenso de grupo, fazendo

$$\omega_1 = 0,27; \omega_2 = 0,14; \omega_3 = 0,17; \omega_4 = 0,27; \omega_5 = 0,15,$$

A alteração resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6733	0,91	0,6667	0,81
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G = 76,5\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.13 Agregação pelo Operador Mínimo e Ordenação pelo Operador Média e Desvio Padrão

Ordenação das alternativas: $X_1 \succ X_4 \succ X_2 \succ X_3$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,4	0,8	0,3333	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=53,33\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,7	-0,2	-0,0333	-0,0333	-0,2

O grupo moderador convida o especialista E_1 a rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_2}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 3 \rightarrow 2 & 2 \rightarrow 3 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,4667	0,8667	0,3333	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=56,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,5667	0,1	-0,0667	-0,0667	-0,2333

O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_4 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_3$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6	0,9333	0,3333	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,4667	-0,1333	-0,1333	0,3333	0,3333

O grupo moderador convida o especialista E_3 a rever a sua opinião e ele faz,

$$U_{C_4}^{E_3} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 0,7 & 0,3 & 0,6 \rightarrow 0,1 & 0,4 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	1	0,5333	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	0,2667	-0,2333	0,2667	-0,0667	0,1

O grupo moderador convida o especialista E_2 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$A_{C_2}^{E_2} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1 & 2 & 7 & 6 \\ X_2 & 1/2 & 1 & 1/4 \rightarrow 2 & 3 \\ X_3 & 1/7 & 4 \rightarrow 1/2 & 1 & 4 \\ X_4 & 1/6 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,9333	0,6	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	0,2667	-0,2333	0,2667	-0,0667	0,1

O grupo moderador convida o especialista E_4 a rever a sua opinião e ele faz,

$$R_{C_1}^{E_4} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,6 & 0,2 \rightarrow 0,7 & 0,6 \\ X_2 & 0,4 & 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ X_3 & 0,3 & 0,7 & 0,5 & 0,3 \\ X_4 & 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,5 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8667	0,6667	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=73,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	0,2667	-0,2333	0,2667	-0,0667	0,1

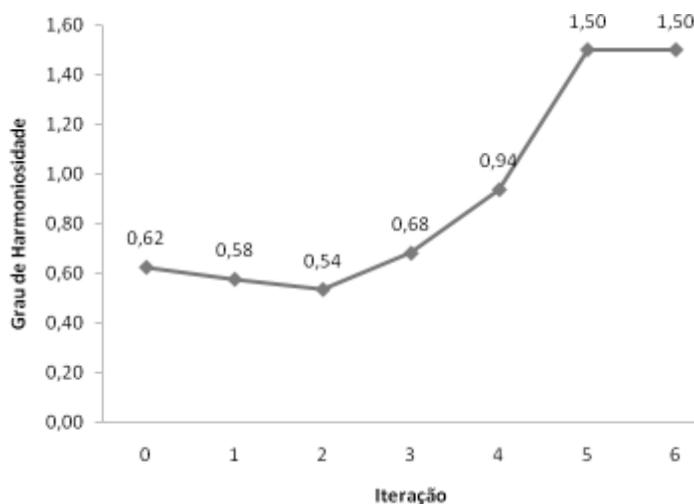
O grupo moderador então decide intervir sobre os coeficientes de importância atribuídos aos especialistas, valorizando aqueles que mais contribuem para o consenso de grupo, fazendo

$$\omega_1 = 0,25; \omega_2 = 0,15; \omega_3 = 0,25; \omega_4 = 0,15; \omega_5 = 0,2,$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7167	0,9	0,7	0,7833
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=77,5\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.14 Agregação pelo Operador Mínimo e Ordenação pelo Operador Grau de Não-Dominância

Ordenação das alternativas: $X_1 \succ X_2 \succ X_3 \succ X_4$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,4	0,6	0,7333	0,2667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=50\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,6667	-0,5	-0,1667	-0,1667	-0,3333

O grupo moderador convida o especialista E_1 a rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_2}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 3 \rightarrow 2 & 2 \rightarrow 3 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,4667	0,6	0,4667	0,2667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=50\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,6667	-0,1667	-0,1667	-0,1667	-0,5

O grupo moderador convida o especialista E_2 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$A_{C_2}^{E_2} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1 & 2 & 4 & 1/2 \\ X_2 & 1/2 & 1 & 1/4 & 2 \\ X_3 & 1/4 & 4 & 1 & 3 \rightarrow 8 \\ X_4 & 2 & 1/2 & 1/3 \rightarrow 1/8 & 1 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,4667	0,7333	0,6	0,3333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=53,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3667	-0,0333	-0,2	-0,2	-0,3667

O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{Muito Pequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_1 \succ X_4 \succ X_2 \succ X_3$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,4	0,7333	0,5333	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=60\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,1	-0,2667	-0,0667	-0,1	-0,1

O grupo moderador convida o especialista E_3 a rever a sua opinião e ele faz,

$$U_{C_4}^{E_3} = \begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 0,7 & 0,3 & 0,6 \rightarrow 0,1 & 0,4 \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,4667	0,8	0,6667	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=66,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	0	-0,333	0,333	-0,1667	-0,1667

O grupo moderador convida o especialista E_4 a rever a sua opinião e ele faz,

$$R_{C_1}^{E_4} = \begin{array}{c|c|c|c|c} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,6 & 0,2 \rightarrow 0,7 & 0,6 \\ X_2 & 0,4 & 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ X_3 & 0,3 & 0,7 & 0,5 & 0,3 \\ X_4 & 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,5 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,5333	0,7333	0,6667	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=66,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	0	-0,3333	0,3333	-0,1667	-0,1667

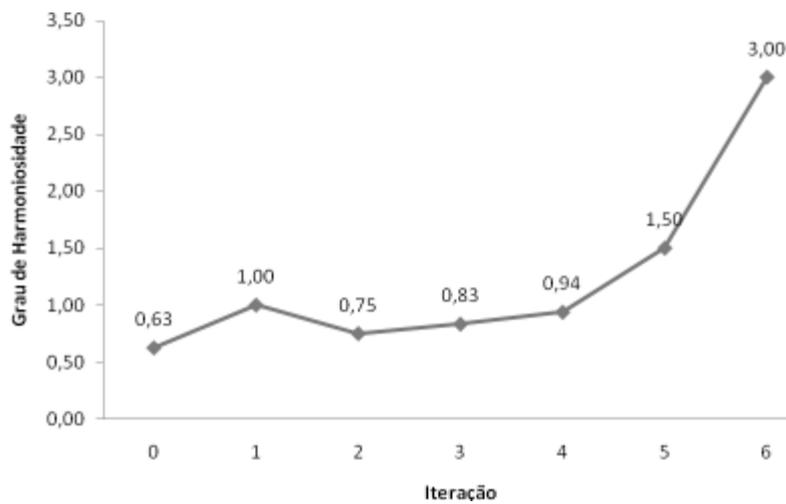
O grupo moderador então decide intervir sobre os coeficientes de importância atribuídos aos especialistas, valorizando aqueles que mais contribuem para o consenso de grupo, fazendo

$$\omega_1 = 0,35; \omega_2 = 0,2; \omega_3 = 0,25; \omega_4 = 0,1; \omega_5 = 0,1,$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_4 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_3$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,75	0,75	0,8333	0,8333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=79,17\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.15 Análise dos Resultados da Utilização do Operador de Agregação Mínimo

Os resultados da combinação do operador Mínimo com os operadores de ordenação estudados são apresentados na Tabela abaixo e analisados em seguida.

	Iterações até o nível de consenso desejado	Alterações de posições iniciais	Alterações dos pesos associados às pessoas	Variação do Grau de Harmoniosidade H	Níveis de consenso de grupo sobre a ordenação final [%]	Alterações na ordenação das alternativas, em relação à ordenação inicial
Agregação pelo Mínimo e Ordenação pela Soma	6	6	1	$H^0 = 0,62 \rightarrow H^6 = 1,5$ H variou pouco na e voltou a crescer até estabilizar em 1,5.	$C_1=71,67$ $C_2=90$ $C_3=70$ $C_4=78,33$	1
Agregação pelo Mínimo e Ordenação pelo Máximo	6	6	1	$H^0 = 0,68 \rightarrow H^6 = 1,15$ O valor de H sofreu pequenas variações descendentes mas manteve um crescimento gradual finalizando em 1,15.	$C_1=80$ $C_2=80$ $C_3=86,67$ $C_4=73,33$	0
Agregação pelo Mínimo e Ordenação pela Média e Desvio Padrão	6	6	1	$H^0 = 0,62 \rightarrow H^6 = 1,5$ H variou pouco na e voltou a crescer até estabilizar em 1,5.	$C_1=71,67$ $C_2=90$ $C_3=70$ $C_4=78,33$	1
Agregação pelo Mínimo e Ordenação pelo Grau de Não Dominância	6	6	1	$H^0 = 0,63 \rightarrow H^6 = 3$ O valor de H aumentou gradativamente até atingir o valor 3.	$C_1=75$ $C_2=75$ $C_3=83,33$ $C_4=83,33$	2

O operador de agregação Mínimo mostrou boa capacidade de preparação das preferências, proporcionando a distinção das alternativas através dos operadores de ordenação. Entretanto, em algumas situações, foram necessárias intervenções do grupo moderador para distinguir a ordenação de alternativas.

A ordenação inicial das alternativas foi diferente para os diferentes operadores de ordenação.

As mudanças de opinião provocaram mudanças na ordenação inicial das alternativas em quase todas as combinações, a exceção dos operadores mínimo e máximo.

Em todos os exemplos simulados foi necessária a intervenção do grupo moderador para alterar os coeficientes de importância dos especialistas, fato este que mostra que o operador de agregação Mínimo provoca alterações mais suaves na elevação dos níveis de consenso.

A princípio, a combinação do operador Soma para a agregação e do operador Grau de Não Dominância para a ordenação foi o que apresentou o maior crescimento da harmoniosidade. Entretanto, devido às mudanças na ordenação inicial das alternativas, fato não desejável, a combinação do operador Soma para a agregação e do operador Máximo para a ordenação é escolhida como a melhor.

7.3.16 Agregação pelo Operador Produto e Ordenação pelo Operador Soma

Ordenação das alternativas: $X_4 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,6667	0,4667	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=60\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,6	-0,4333	-0,4	-0,2333	-0,1

O grupo moderador convida o especialista E_1 a rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 3 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 3 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,9333	0,2667	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=60\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,4667	-0,1333	0,5333	0,2	0,2

O grupo moderador convida então o especialista E_2 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$A_{C_1}^{E_2} =$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	1	2	4	1/2
X_2	1/2	1	1/4	2
X_3	1/4	4	1	3→1/5
X_4	2	1/2	1/3→5	1

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,9333	0,3333	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3	-0,1333	0,0333	-0,1333	-0,1333

O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{MuitoPequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_4 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_3$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,8667	0,3333	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,6333	-0,1333	0,0333	-0,1333	-0,1333

O grupo moderador convida o especialista E_4 a rever a sua opinião e ele faz,

$$R_{C_1}^{E_4} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \rightarrow 0,6 \\ X_2 & 0,7 & 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ X_3 & 0,6 & 0,7 & 0,5 & 0,6 \\ X_4 & 0,8 \rightarrow 0,4 & 0,6 & 0,4 & 0,5 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,8	0,3333	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,8	-0,1333	0,0333	-0,1333	-0,1333

O grupo moderador convida o especialista E_3 a rever a sua opinião e ele faz,

$$U_{C_4}^{E_3} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 0,7 & 0,3 & 0,6 \rightarrow 0,2 & 0,4 \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,8	0,4	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=66,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,5	-0,1667	0,1667	-0,1667	-0,1667

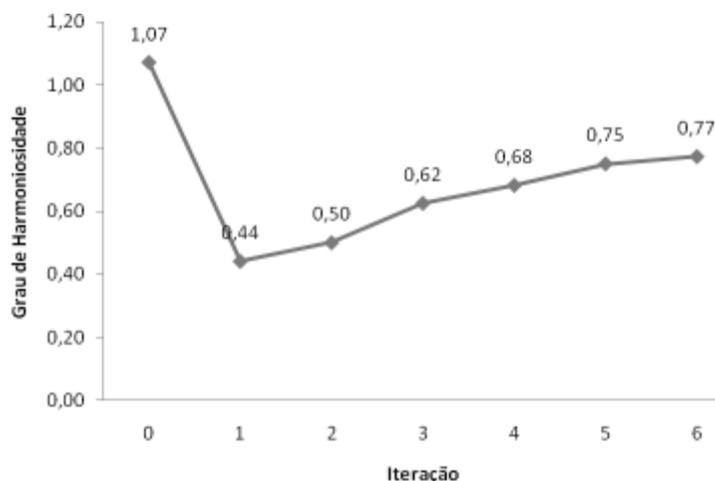
O grupo moderador então decide intervir sobre os coeficientes de importância atribuídos aos especialistas, valorizando aqueles que mais contribuem para o consenso de grupo, fazendo

$$\omega_1 = 0,03; \omega_2 = 0,08; \omega_3 = 0,73; \omega_4 = 0,08; \omega_5 = 0,08,$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,92	0,7033	0,5433	0,8667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=75,83\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.17 Agregação pelo Operador Produto e Ordenação pelo Operador Máximo

Ordenação das alternativas: $X_4 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,6667	0,4667	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=60\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,8	-1,4667	-0,9333	-1,2667	-0,6

O grupo moderador convida o especialista E_1 a rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 3 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 3 & 4 & 2 \end{array}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_4 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_3$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,9333	0,2667	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,8	-1,7333	-1,2	-1,4667	-0,8667

O grupo moderador convida o especialista E_2 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$A_{C_1}^{E_2} = \begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1 & 2 & 4 & 1/2 \\ X_2 & 1/2 & 1 & 1/4 & 2 \\ X_3 & 1/4 & 4 & 1 & 3 \rightarrow 1/5 \\ X_4 & 2 & 1/2 & 1/3 \rightarrow 5 & 1 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,9333	0,2667	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,8	-1,7333	-1,2	-1,4667	-0,8667

O grupo moderador convida o especialista E_4 a rever a sua opinião e ele faz,

$$R_{C_1}^{E_4} =$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0,5	0,3	0,4	0,2→0,6
X_2	0,7	0,5	0,3	0,4
X_3	0,6	0,7	0,5	0,6
X_4	0,8→0,4	0,6	0,4	0,5

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,9333	0,8667	0,2667	0,4667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-2,2	-1,7333	-1,7333	-1,4	-1,4

O grupo moderador convida o especialista E_3 a rever a sua opinião e ele faz,

$$U_{C_4}^{E_3} =$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
	0,7	0,3	0,6→0,2	0,4

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	1	0,8667	0,3333	0,4667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=66,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-2,2	-1,8667	-1,667	-1,5333	-1,8667

O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{MuitoPequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,9333	0,8	0,3333	0,6
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=66,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,4	-2	-1,4	-1,4	-1,7333

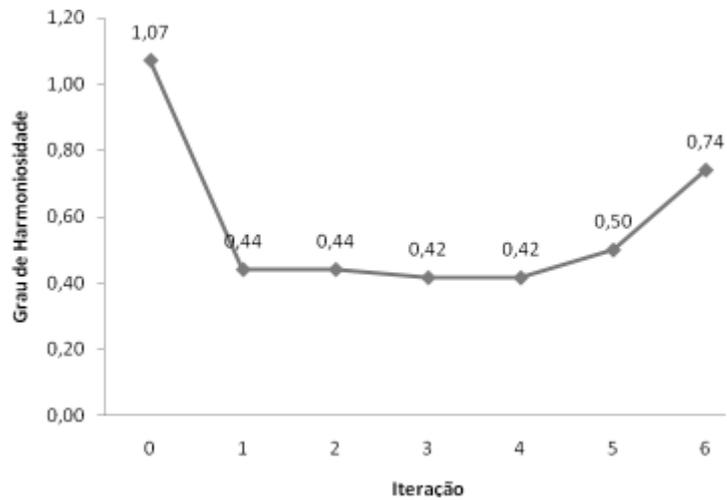
O grupo moderador então decide intervir sobre os coeficientes de importância atribuídos aos especialistas, valorizando aqueles que mais contribuem para o consenso de grupo, fazendo

$$\omega_1 = 0,3; \omega_2 = 0,05; \omega_3 = 0,3; \omega_4 = 0,3; \omega_5 = 0,05,$$

que resulta

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,9833	0,7833	0,5	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=75\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.18 Agregação pelo Operador Produto e Ordenação pelo Operador Média e Desvio Padrão

Ordenação das alternativas: $X_4 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,6667	0,4667	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=60\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,8	-2	-0,5333	-0,8667	-0,8667

O grupo moderador convida o especialista E_2 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$A_{C_1}^{E_2} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1 & 2 & 4 & 1/2 \\ X_2 & 1/2 & 1 & 1/4 & 2 \\ X_3 & 1/4 & 4 & 1 & 3 \rightarrow 1/5 \\ X_4 & 2 & 1/2 & 1/3 \rightarrow 5 & 1 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6667	0,6667	0,5333	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=60\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,8	-2	-0,8	-1,1333	-1,1333

O grupo moderador convida o especialista E_1 a rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 3 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 3 & 4 & 2 \end{array}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_4 \succ X_1 \succ X_2 \succ X_3$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,9333	0,3333	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,8	-1,7333	-1,2	-1,4667	-0,8667

O grupo moderador convida o especialista E_4 a rever a sua opinião e ele faz,

$$R_{C_1}^{E_4} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \rightarrow 0,6 \\ X_2 & 0,7 & 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ X_3 & 0,6 & 0,7 & 0,5 & 0,6 \\ X_4 & 0,8 \rightarrow 0,4 & 0,6 & 0,4 & 0,5 \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,8667	0,3333	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-1,8	-1	-1	-1,3333	-1,3333

O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{MuitoPequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,7333	0,8	0,3333	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-2,3	-1	-1	-1,1333	-1,1333

O grupo moderador convida o especialista E_3 a rever a sua opinião e ele faz,

$$U_{C_4}^{E_3} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 0,7 & 0,3 & 0,6 \rightarrow 0,2 & 0,4 \\ \hline \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,8	0,8	0,4	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=66,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-2,2	-1,2667	-0,9333	-1,6	-1,6

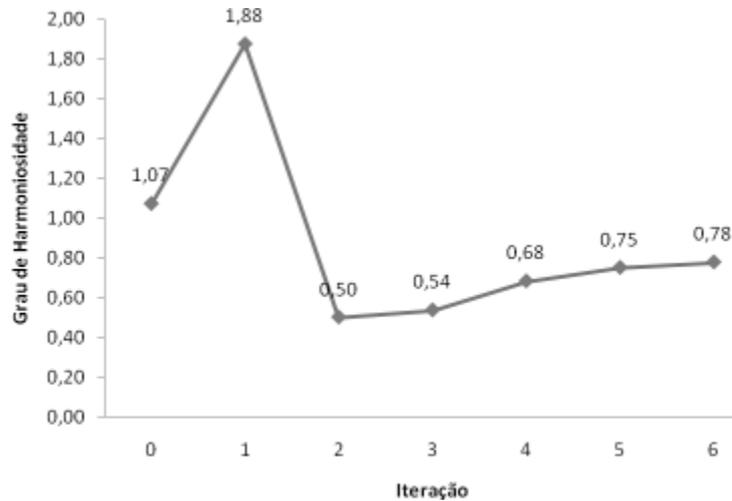
O grupo moderador então decide intervir sobre os coeficientes de importância atribuídos aos especialistas, valorizando aqueles que mais contribuem para o consenso de grupo, fazendo

$$\omega_1 = 0,04; \omega_2 = 0,05; \omega_3 = 0,8; \omega_4 = 0,01; \omega_5 = 0,1,$$

que resulta

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,9467	0,6967	0,59	0,9133
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=78,67\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.19 Agregação pelo Operador Produto e Ordenação pelo Operador Grau de Não-Dominância

Ordenação das alternativas: $X_3 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_2$

Níveis iniciais de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6	0,8	0,6	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

Contribuições individuais para a construção do consenso:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3	0,0333	0,5333	-0,1333	-0,4667

O grupo moderador convida então o especialista E_5 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$f_{C_2}(X_4) = \text{MuitoPequeno} \rightarrow \text{Pequeno}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6	0,8	0,6	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=63,33\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,3	0,0333	0,5333	-0,1333	-0,4667

O grupo moderador convida o especialista E_1 a rever a sua opinião e ele faz,

$$O_{C_1}^{E_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline 3 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 3 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_1 \succ X_3 \succ X_4 \succ X_2$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,5333	0,8667	0,7333	0,5333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=66,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,1667	0	0,8333	-0,1667	-0,5

O grupo moderador convida o especialista E_4 a rever a sua opinião e ele faz,

$$R_{C_1}^{E_4} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 0,5 & 0,3 & 0,4 & 0,2 \rightarrow 0,6 \\ \hline X_2 & 0,7 & 0,5 & 0,3 & 0,4 \\ \hline X_3 & 0,6 & 0,7 & 0,5 & 0,6 \\ \hline X_4 & 0,8 \rightarrow 0,4 & 0,6 & 0,4 & 0,5 \\ \hline \end{array}$$

que resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,5333	0,7333	0,7333	0,6667
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=66,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,1667	0	0,6667	-0,1667	-0,1667

O grupo moderador convida o especialista E_2 a rever a sua opinião. Ele faz,

$$A_{C_1}^{E_2} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline X_1 & 1 & 2 & 4 & 1/2 \\ X_2 & 1/2 & 1 & 1/4 & 2 \\ X_3 & 1/4 & 4 & 1 & 3 \rightarrow 1/5 \\ X_4 & 2 & 1/2 & 1/3 \rightarrow 5 & 1 \end{array}$$

A alteração provoca a mudança da ordenação das alternativas para $X_1 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_2$ e resulta nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,5333	0,7333	0,6667	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=66,67\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,1667	0	0,6667	-0,1667	-0,1667

O grupo moderador convida o especialista E_3 a rever a sua opinião e ele faz,

$$U_{C_4}^{E_3} = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ \hline & 0,7 & 0,3 & 0,6 \rightarrow 0,2 & 0,4 \end{array}$$

resultando nos novos níveis de consenso:

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,6	0,7333	0,7333	0,7333
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=70\%$			

As novas contribuições individuais para a construção do consenso são:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
D_{E_i}	-0,0333	0,1333	0,8	-0,0333	-0,2

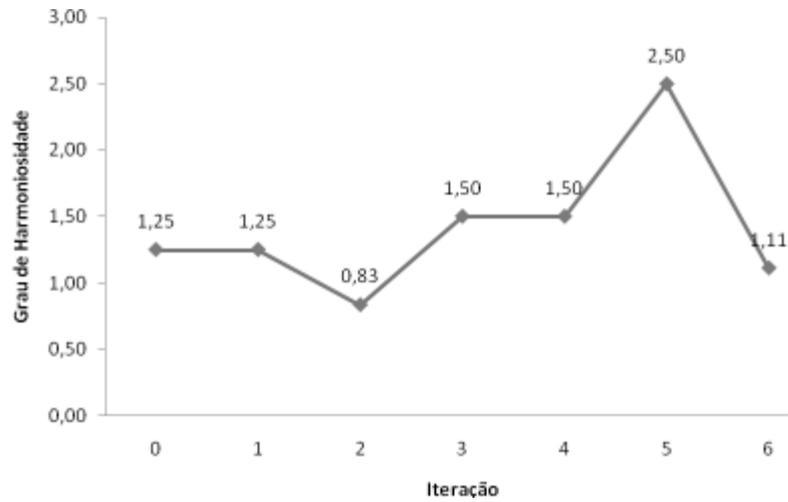
O grupo moderador então decide intervir sobre os coeficientes de importância atribuídos aos especialistas, valorizando aqueles que mais contribuem para o consenso de grupo, fazendo

$$\omega_1 = 0,1; \omega_2 = 0,15; \omega_3 = 0,6; \omega_4 = 0,1; \omega_5 = 0,05,$$

que resulta

	C_1	C_2	C_3	C_4
Consenso sobre cada alternativa	0,65	0,8667	0,9	0,7167
Consenso de grupo sobre todas as alternativas	$C^G=78,33\%$			

O comportamento do grau de harmoniosidade é:



7.3.20 Análise dos Resultados da Utilização do Operador de Agregação Produto

Os resultados da combinação do operador Produto os operadores de ordenação estudados são apresentados na Tabela abaixo e em seguida analisados.

	Iterações até o nível de consenso desejado	Alterações de posições iniciais	Alterações dos pesos associados às pessoas	Varição do Grau de Harmoniosidade H	Níveis de consenso de grupo sobre a ordenação final [%]	Alterações na ordenação das alternativas, em relação à ordenação inicial
Agregação pelo Produto e Ordenação pela Soma	6	6	1	$H^0 = 1,07 \rightarrow H^6 = 0,77$ H variou na descendente e cresceu em seguida até atingir 0,77.	$C_1=92$ $C_2=70,33$ $C_3=54,33$ $C_4=86,67$	1
Agregação pelo Produto e Ordenação pelo Máximo	6	6	1	$H^0 = 1,07 \rightarrow H^6 = 0,74$ H variou na descendente e cresceu em seguida até atingir 0,74.	$C_1=98,33$ $C_2=78,33$ $C_3=50$ $C_4=73,33$	1
Agregação pelo Produto e Ordenação pela Média e Desvio Padrão	6	6	1	$H^0 = 1,07 \rightarrow H^6 = 0,78$ H variou na ascendente e descendente, crescendo gradativamente até atingir o valor 0,98.	$C_1=94,67$ $C_2=69,67$ $C_3=59$ $C_4=91,33$	1
Agregação pelo Produto e Ordenação pelo Grau de Não Dominância	6	6	1	$H^0 = 1,25 \rightarrow H^6 = 1,11$ O valor de H caiu a 0,83, subiu até 2,5 finalizou em 1,11.	$C_1=65$ $C_2=86,67$ $C_3=90$ $C_4=71,67$	2

O operador de agregação Produto mostrou boa capacidade de preparação das preferências, proporcionando na maioria dos casos, a distinção das alternativas através dos operadores de ordenação. Entretanto, em diversas situações, foram necessárias intervenções do grupo moderador para distinguir a ordenação de alternativas.

A ordenação inicial das alternativas foi diferente apenas para a última combinação de operadores.

As mudanças de opinião, em várias oportunidades, provocaram mudanças na ordenação inicial das alternativas.

Em todas as simulações foi necessária a intervenção do grupo moderador para alterar os coeficientes de importância dos especialistas. Entretanto, a intervenção para alcançar o consenso com a utilização do operador Mínimo foi a mais equilibrada. Para os demais operadores, o peso do especialista E_3 foi aumentado significativamente em detrimento aos demais.

A harmoniosidade das soluções foi razoável e a combinação que apresentou a melhor evolução do nível de consenso, diante do mencionado, foi a Agregação pelo operador Produto e a Ordenação pelo operador Máximo.

7.3.21 Análise Global

A Tabela abaixo, mostra os melhores resultados dos exemplos apresentados.

	Iterações até o nível de consenso desejado	Alterações de posições iniciais	Alterações dos pesos associados às pessoas	Varição do Grau de Harmoniosidade H	Níveis de consenso de grupo sobre a ordenação final [%]	Alterações na ordenação das alternativas, em relação à ordenação inicial
Agregação pela Soma e Ordenação pelo Máximo	3	3	0	$H^0 = 1,25 \rightarrow H^3 = 1,5$ O valor inicial de H manteve-se estável ao longo do processo e aumentou no final para 1,5.	$C_1=73,33$ $C_2=80$ $C_3=86,67$ $C_4=66,67$	0
Agregação pelo OWA e Ordenação pelo Máximo	3	3	0	$H^0 = 1,25 \rightarrow H^3 = 2,5$ O valor inicial de H foi inferior ao exemplo anterior, entretanto dobrou ao longo do processo.	$C_1=80$ $C_2=80$ $C_3=86,67$ $C_4=73,33$	1
Agregação pelo Mínimo e Ordenação pelo Máximo	6	6	1	$H^0 = 0,68 \rightarrow H^6 = 1,15$ O valor de H sofreu pequenas variações descendentes mas manteve um crescimento gradual finalizando em 1,15.	$C_1=80$ $C_2=80$ $C_3=86,67$ $C_4=73,33$	0
Agregação pelo Produto e Ordenação pelo Máximo	6	6	1	$H^0 = 1,07 \rightarrow H^6 = 0,74$ H variou na descendente e cresceu em seguida até atingir 0,74.	$C_1=98,33$ $C_2=78,33$ $C_3=50$ $C_4=73,33$	1

As análises anteriores permitem apontar o operador Máximo como o mais recomendado para a ordenação das alternativas.

Uma análise superficial dos operadores de agregação pode apontar o operador Produto como sendo o mais eficiente. Entretanto, a necessidade de constantes intervenções do grupo moderador para conduzir o processo de forma equilibrada mostrou a pouca adequação deste operador do ponto de vista de construção do consenso. Diante disso e das ponderações realizadas anteriormente, o operador Mínimo foi considerado o mais recomendado operador para a agregação das preferências.

Assim, a combinação que proporcionou maior harmoniosidade das soluções foi a Agregação pelo operador Mínimo e a Ordenação pelo operador Máximo.

7.4 Considerações finais

Os resultados do ensaio realizado neste Capítulo permitiram identificar algumas propriedades particulares aos operadores de agregação e ordenação. Entretanto, concordando com os autores de [180], ainda não é possível realizar uma interpretação clara e intuitiva destas

propriedades. Embora existam critérios para a seleção de operadores, como por exemplo os sugeridos em [110], a maioria deles é empírico.

A experiência de combinar os diversos operadores foi bastante proveitosa e permitiu levantar algumas questões para estudos futuros, como por exemplo: a forma de atuação do grupo moderador, totalmente imparcial ou orientativa na condução das opiniões; a orientação do grupo moderador na escolha dos especialistas para revisão de opiniões face a avaliação das contribuições e aos operadores utilizados; e o tratamento dado às informações inconsistentes (que não atendem ao princípio da transitividade, por exemplo).

Três aspectos, entretanto, merecem destaque neste experimento de combinação de operadores de agregação das preferências e ordenação das alternativas:

- A influência direta dos operadores sobre a ordenação das alternativas, que podem resultar em ordenações completamente distintas;
- O comportamento do grau de harmoniosidade do nível de consenso de grupo sobre as alternativas, oscilatório para operadores que potencializam as alterações de opiniões dos especialistas e amortecido para operadores que suavizam essas mudanças;
- A relação inversa entre o grau de harmoniosidade da solução final e a eficiência do processo (traduzida na quantidade de iterações necessária para alcançar o nível de consenso desejado).

Finalmente, é importante dizer que este estudo não pretende apontar, de forma conclusiva e inquestionável, a melhor combinação de operadores, mas despertar a necessidade de investigações mais profundas sobre a sensibilidade do processo de tomada de decisão em função dos operadores utilizados.

8 SISTEMAS DE APOIO A DECISÕES

8.1 Considerações Iniciais

O termo “Sistemas de Apoio a Decisão”, *Decision Support Systems* (DSS), é utilizado como uma denominação genérica para descrever qualquer tipo de ferramenta computacional que se destina a apoiar as decisões em uma organização (uma relação de vários sistemas desenvolvidos pode ser encontrada em [16]). No Brasil, podem ser destacados os sistemas:

- PRADIN [181], desenvolvido com o propósito de auxiliar programas de capacitação de técnicos do setor público, organizações não governamentais, pesquisadores e estudantes no campo dos Indicadores Sociais e Políticas Públicas, em especial, no uso de técnicas de análise multicritério ou auxílio multicritério à decisão.
- THOR [182], desenvolvido com o propósito de auxiliar a tomada de decisão em qualquer processo decisório em que se tenha pelo menos duas alternativas para a solução e utiliza um algoritmo híbrido de apoio à decisão multicritério.

O objetivo central de um DSS é melhorar a qualidade e efetividade da tomada de decisão. Esses sistemas podem ser utilizados por gestores na tomada de decisões estratégicas, no caso específico deste trabalho, decisões baseadas nas perspectivas estabelecidas pela metodologia BSC, como mecanismo de redução das incertezas e dos riscos tradicionalmente associados a essa atividade, provendo soluções mais robustas.

Neste Capítulo, são introduzidos inicialmente os conceitos, as características, os tipos e os principais componentes de um DSS. Em seguida, é apresentado um protótipo desenvolvido para apoiar a tomada de decisão mono ou multicritério, individual ou em grupo (assuntos abordados no Capítulo 5), com a possibilidade de estabelecimento ou não de consenso sobre as decisões e escolha da abordagem de condução do processo (assuntos abordados no Capítulo 6) e a apresentação dos indicadores de qualidade das soluções obtidas (assunto abordado no Capítulo 7).

8.2 Conceitos

Desde a criação do termo DSS, no início dos anos 70, vários trabalhos de pesquisa e aplicações práticas foram desenvolvidos. As definições clássicas, associam o DSS ao apoio à tomada de decisões gerenciais semiestruturadas ou não estruturadas [183] ou ainda a sistemas que agregam recursos intelectuais de indivíduos às capacidades do computador para melhorar a qualidade de decisões [184]. Entretanto, não existe consenso em torno de uma definição universalmente aceita e diferentes significados podem ser assumidos por diferentes pessoas.

Do ponto de vista de aplicação, um DSS pode ser visto como uma ferramenta computacional que implementa modelos e métodos eficientes no apoio a tomada de decisão, especialmente em situações que envolvam problemas semiestruturados ou não estruturados. Deve apresentar recursos interativos, flexíveis e adaptáveis às necessidades dos usuários, além de uma interface amigável que permita a incorporação gradual das informações dos decisores e mediadores.

A implementação de um DSS em uma organização não tem como pretensão automatizar o processo de tomada de decisão e aumentar a sua eficiência, apesar de proporcionar este benefício e permitir maior agilidade nas simulações e análises de cenários diversos para um mesmo problema. É pois, o intuito principal do DSS, apoiar a tomada de decisão fornecendo mais alternativas de utilização de modelos de representação das informações e métodos de processamento dessas informações, proporcionando maior efetividade e qualidade das decisões tomadas.

8.3 Características

A tecnologia dos DSS é fundamentada sobre em três pilares: Diálogo, Dados e Modelagem (DDM). Definido pelos autores de [185] como o paradigma DDM, o primeiro “D” representa a facilidade de utilização, permitindo que decisores não-técnicos possam interagir com o sistema sem dificuldade; o segundo “D” representa o acesso a fontes de dados de diferentes tipos e formatos e à habilidade de processá-los; e o “M” representa a disponibilidade de modelos para representação dos dados. Na prática, um bom DSS deve apresentar equilíbrio entre estas três capacidades.

Os autores de [186] listaram algumas características ideais e capacidades de um DSS:

- Apoiar na solução de problemas semiestruturados ou não estruturados;
- Acessível a profissionais de diferentes níveis;
- Apoiar decisões em grupo e individuais;
- Permitir a implementação de regras de inferência;
- Permitir a atuação de um grupo moderador;
- Disponibilizar variedade de estilos e processos decisões;
- Adaptabilidade e flexibilidade na condução da tomada de decisão e abordagem aos usuários;
- Disponibilizar interface amigável para não técnicos;
- Combinar o uso de modelos e técnicas analíticas;
- Facilidades de acesso e recuperação de dados;
- Facilidades de integração e conexão de rede.

Dotado destas características, um DSS pode certamente contribuir para melhorar a eficiência, efetividade e produtividade dos decisores na tomada de decisões.

8.4 Tipos

Com base nas características enumeradas acima, podem ser identificados cinco tipos principais de DSS [16], cujas funcionalidades podem ser combinadas, no tocante à implementação:

- DSS direcionado a modelos específicos - sistemas mais antigos, atualmente em desuso, pois os sistemas modernos utilizam vários modelos.
- DSS direcionado a dados - sistemas mais avançados, voltados para o acesso em tempo real a grandes bases de dados.
- DSS direcionado ao conhecimento ou DSS inteligente - sistemas baseados em regras, capazes de inferir novos dados a partir dos dados processados, tratar inconsistências na entrada dos dados e até mesmo sugerir ações aos decisores.
- DSS direcionado a decisões em grupo - sistemas que permitem que múltiplos usuários trabalhem colaborativamente na solução de um problema de decisão.
- DSS em rede - sistemas recentes, que utilizam os recursos de Internet com desenvolvimentos associados a negócios, comércio e serviços eletrônicos.

Nesta classificação, é importante ressaltar que a decisão é considerada de maneira diferente em cada instância citada e indicar que diversas áreas da ciência têm contribuído para a quebra de paradigmas, evolução dos modelos e métodos existentes e sugestão de novas abordagens.

8.5 Componentes

Para implementar as características mencionadas no item 8.3, a estrutura geral de um DSS deve conter, no mínimo, os seguintes subsistemas:

- Gerenciador de dados - deve contemplar uma base de dados para armazenar os dados internos e externos, provenientes da conexão com outras fontes de dados.
- Gerenciador de modelos e métodos - pacote de software que inclui modelos e métodos com capacidade de processar e analisar dados quantitativos e qualitativos.

- Gerenciador de conhecimento - componente capaz de processar os dados dos outros subsistemas e gerar novos dados ou informações através de regras.
- Interface com o usuário - mecanismos de interação entre os computadores e os decisores.

A Figura 15 ilustra os principais componentes de um DSS [16].

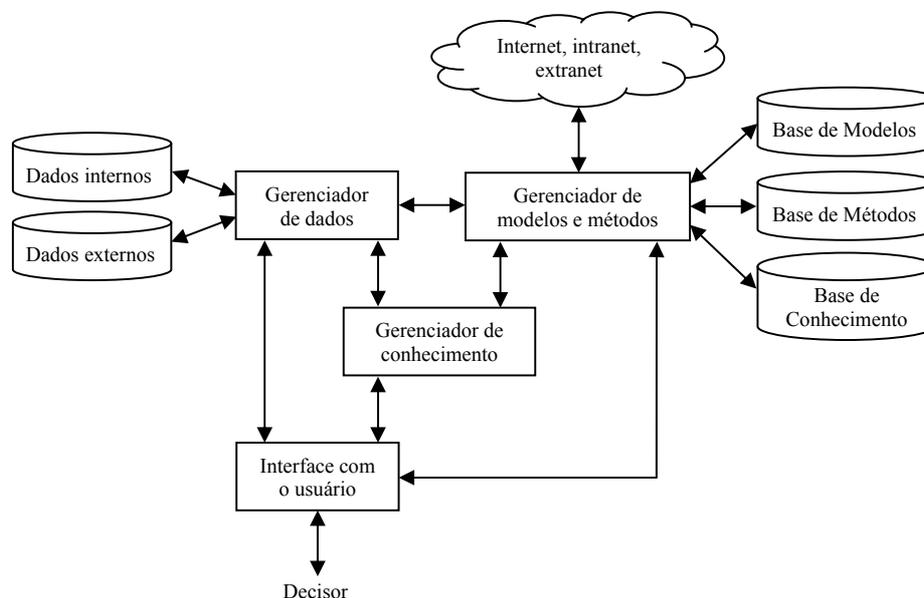


Figura 15: Principais componentes de um DSS

8.6 Protótipo de DSS Desenvolvido

Um protótipo de DSS, direcionado a decisões em grupo, foi desenvolvido com o objetivo de implementar os modelos e métodos estudados e criar um ambiente para realização de simulações e análise de cenários e situações envolvendo a combinação de técnicas diversas. Implementado no ambiente MATLAB versão 7, o *Multiperson Multicriteria Decision Making System* (2MDMS), auxilia a solução de problemas de tomada de decisão multicritério, individual e em grupo, relacionados ao planejamento estratégico. Entretanto, devido às suas características flexíveis, o sistema pode apoiar problemas de tomada de decisão em atividades de outros setores.

O 2MDMS contempla os componentes descritos no item 8.5, com as seguintes particularidades:

- Subsistema gerenciador de dados¹, capaz de coletar os dados iniciais do problema como número de decisores, critérios e alternativas, e orientar os decisores quanto à entrada dos dados referentes à apreciação das alternativas de solução do problema;
- Subsistema gerenciador de modelos e métodos, no qual foram implementados cinco modelos de representação de preferências (Esquema de Ordenação, Relação de Preferência Multiplicativa, Função de Utilidade, Relações de Preferência *Fuzzy* e Função de Pertinência de Relação de Preferência *Fuzzy* Generalizada), os respectivos métodos para uniformização das preferências, quatro métodos de agregação de preferências (Soma, OWA, Mínimo e Produto), quatro métodos de ordenação das alternativas (Soma, Máximo, Média de Desvio Padrão e Grau de Dominância) e três abordagens para a construção de consenso (Autocrática, Interativa e Supervisionada);
- Subsistema gerenciador de conhecimento, componente capaz de executar regras de inferência e avaliar inconsistências nas preferências expressadas;
- Subsistema de interface com o usuário, com mecanismos como janelas, quadros de texto, caixas de seleção, caixas de diálogo e gráficos capazes de auxiliar os decisores na expressão de suas preferências, processamento das informações e análise dos resultados na tomada de decisão.

A seguir, são apresentadas as principais funcionalidades implementadas no 2MDMS e as respectivas interfaces associadas.

¹ A versão protótipo armazena e gerencia os dados internos e externos em uma base de dados própria, não utilizando portanto, um Gerenciador de Banco de Dados Relacional. Futuramente, quando implementado em conjunto com um sistema de gestão do tipo ERP, o Banco de Dados será imprescindível para armazenar o grande volume de dados referentes a indicadores e históricos.

8.6.1 Tela de Abertura

Ao iniciar o sistema, é apresentada a tela de abertura mostrada na Figura 16, com a divisão dos seguintes campos: Dados Iniciais, Modelagem das Preferências, Métodos de Agregação, Métodos de Ordenação, Abordagens de Consenso e Resultados. A distribuição destes campos foi idealizada para conduzir o processo de tomada de decisão, passo a passo, procurando apresentar a cada momento, somente as informações essenciais à atividade a ser realizada.

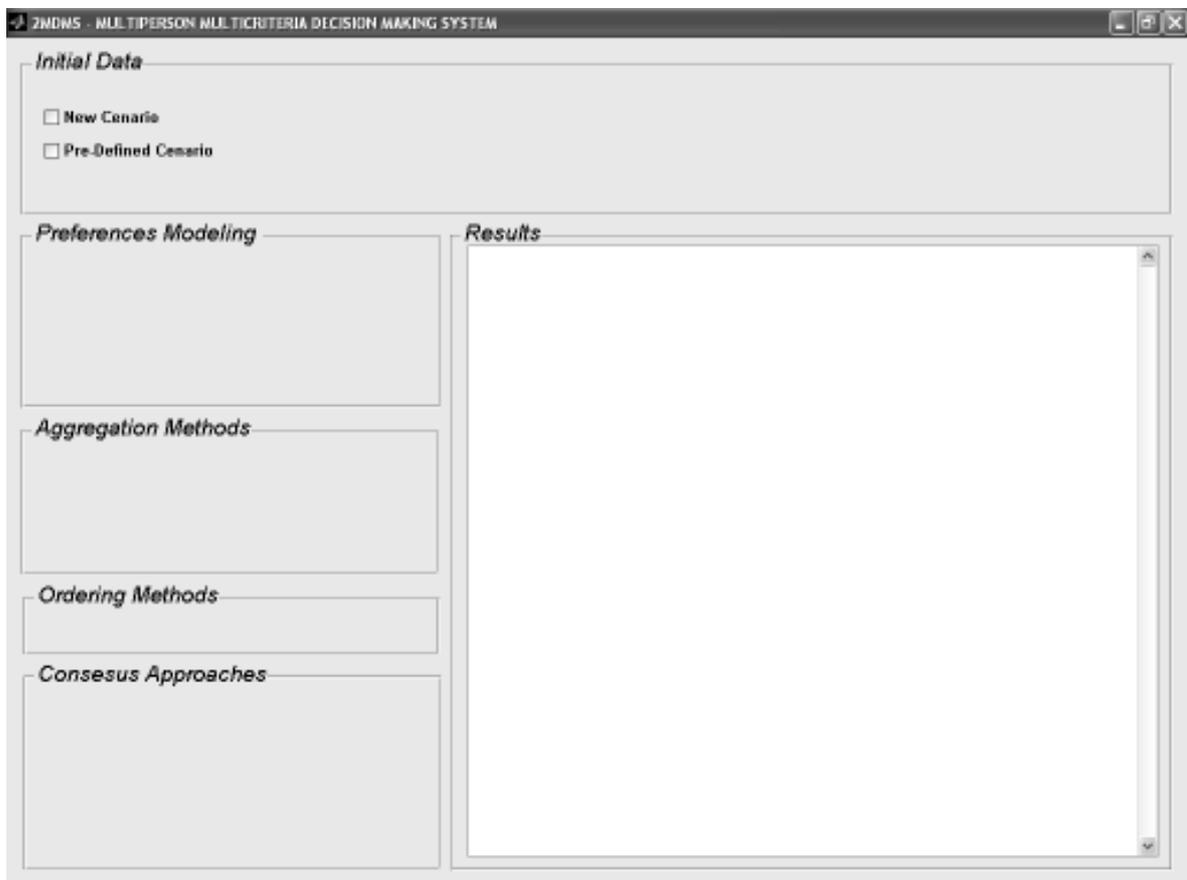


Figura 16: Tela de abertura do 2MDMS

8.6.2 Entrada de Dados Iniciais

Os dados iniciais podem ser introduzidos pelos participantes da tomada de decisão, ou pelo grupo moderador, preferencialmente. Estão disponíveis, inicialmente, duas possibilidades: construir um novo cenário ou processar os dados de cenários pré-definidos. Optando pela

segunda alternativa, os dados iniciais são resgatados da base de dados do sistema e apresentados conforme mostra a Figura 17. No campo superior, são apresentadas as quantidades de especialistas, critérios e alternativas, com as respectivas descrições. No campo Resultados são apresentadas as preferências dos especialistas sobre as alternativas, levando em conta cada critério, na estrutura de relações de preferência *fuzzy*.

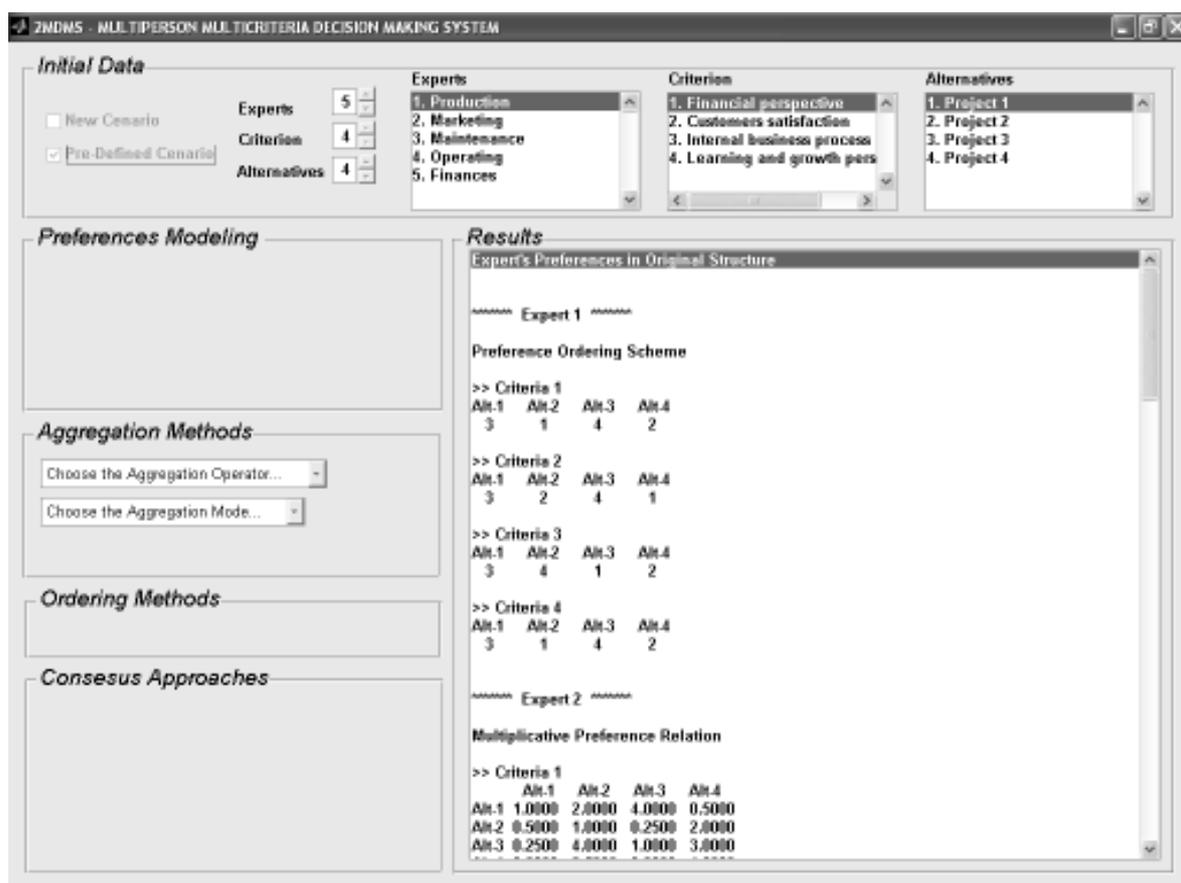


Figura 17: Dados iniciais de um cenário pré-definido

Nesta modalidade, é possível apenas trabalhar os dados no tocante à agregação das preferências e à ordenação das alternativas. Cabe ao usuário portanto, escolher os operadores desejados e verificar os resultados apontados para a tomada de decisão. As interfaces dessas etapas, bem como a formatação dos resultados finais, são apresentadas na modalidade de tomada de decisão para novos cenários.

Optando por um novo cenário, devem ser informados o número e denominação dos participantes, o número e descrição dos critérios e o número e descrição das alternativas, como mostra a Figura 18. O sistema suporta decisões monocritério e multicritério, individuais ou em grupo.

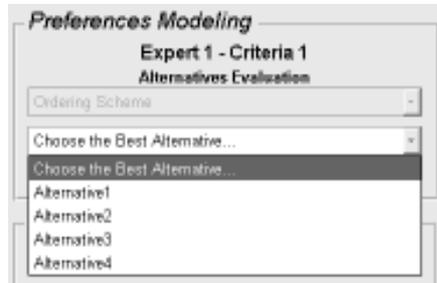
Figura 18: Interface para entrada de dados iniciais de novos cenários

8.6.3 Modelagem das Preferências

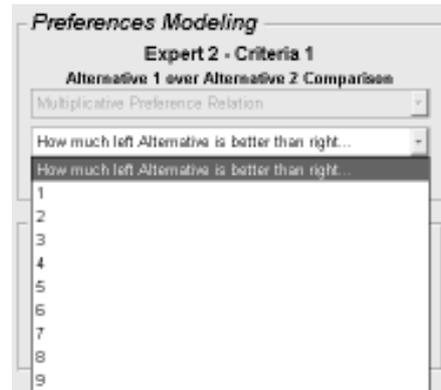
Na sequência, cada participante deve escolher, dentre as opções mostradas na Figura 19, a estrutura desejada para expressar as suas preferências.

Figura 19: Interface para escolha da estrutura de modelagem de preferências

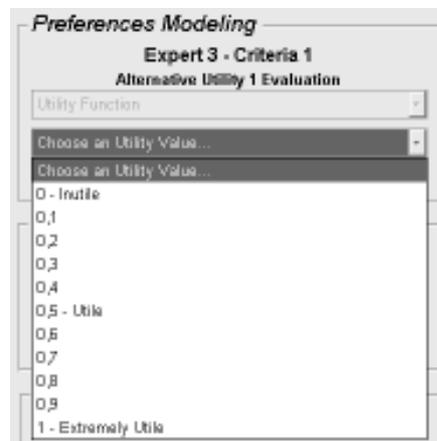
Cada opção de estrutura corresponde a uma interface específica para a entrada dos dados, como ilustra a Figura 20.



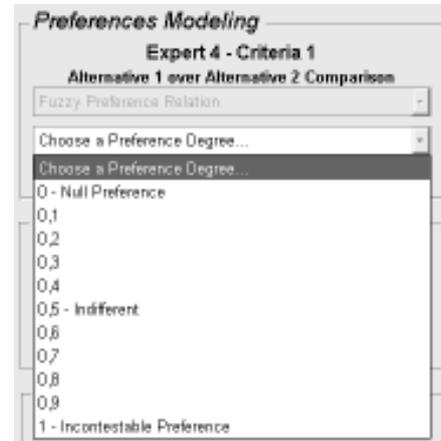
(a)



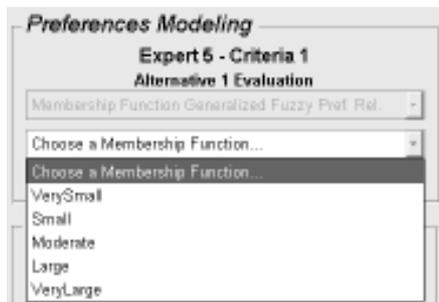
(b)



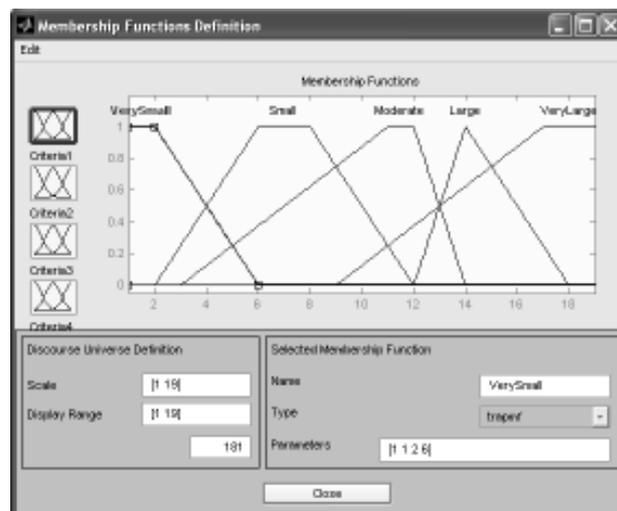
(c)



(d)



(e₁)



(e₂)

Figura 20: Interface para entrada de dados para as estruturas
(a) Ordenação de Preferência (b) Relação de Preferência Multiplicativa (c) Função Utilidade
(d) Relação de Preferência Fuzzy (e₁) Relação de Preferência Fuzzy Generalizada
(e₂) Interface para definição das Funções de Pertinência

Após a entrada dos dados de todos os especialistas, o campo Resultados mostra as preferências de cada um, na estrutura escolhida, como ilustrado na Figura 17. A uniformização dos dados é realizada através do acionamento do botão , cujos resultados são ilustrados na Figura 21.

Results

Expert's Preferences reduced to Fuzzy Preference Relations

***** Expert 1 *****

>> Criteria 1

Alt.	Alt.1	Alt.2	Alt.3	Alt.4
Alt.1	0.5000	0.1667	0.6667	0.3333
Alt.2	0.8333	0.5000	1.0000	0.6667
Alt.3	0.3333	0.0000	0.5000	0.1667
Alt.4	0.6667	0.3333	0.8333	0.5000

>> Criteria 2

Alt.	Alt.1	Alt.2	Alt.3	Alt.4
Alt.1	0.5000	0.3333	0.6667	0.1667
Alt.2	0.6667	0.5000	0.8333	0.3333
Alt.3	0.3333	0.1667	0.5000	0.0000
Alt.4	0.8333	0.6667	1.0000	0.5000

>> Criteria 3

Alt.	Alt.1	Alt.2	Alt.3	Alt.4
Alt.1	0.5000	0.6667	0.1667	0.3333
Alt.2	0.3333	0.5000	0.0000	0.1667
Alt.3	0.8333	1.0000	0.5000	0.6667
Alt.4	0.6667	0.8333	0.3333	0.5000

>> Criteria 4

Alt.	Alt.1	Alt.2	Alt.3	Alt.4
Alt.1	0.5000	0.1667	0.6667	0.3333
Alt.2	0.8333	0.5000	1.0000	0.6667
Alt.3	0.3333	0.0000	0.5000	0.1667

Figura 21: Apresentação das preferências reduzidas a Relações de Preferência *Fuzzy*

8.6.4 Escolha do Método de Agregação

Para a agregação das preferências, devem ser escolhidos, primeiramente, o operador e o modo de agregação desejado, cujas opções são mostradas na figura 22.

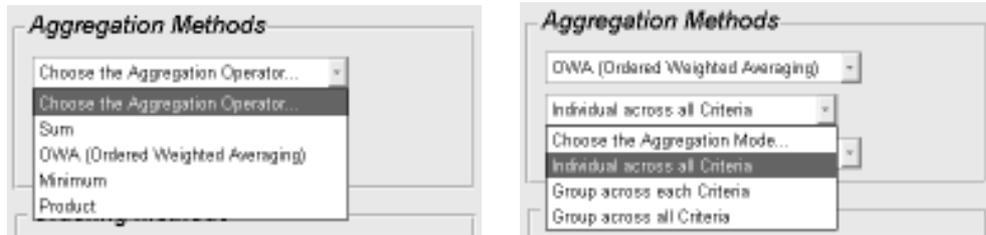
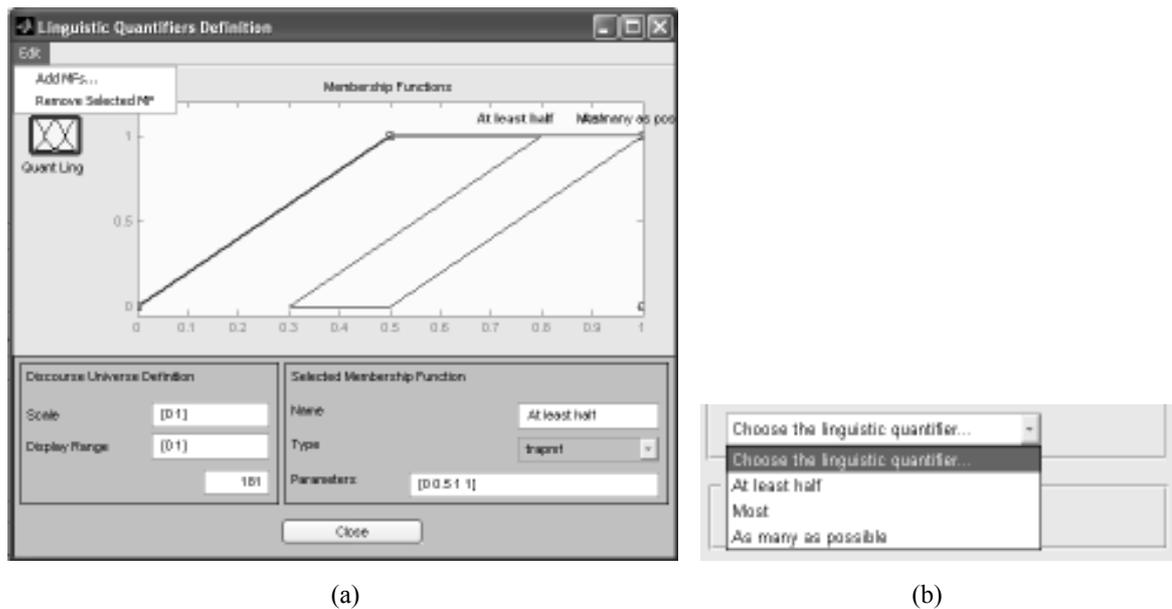


Figura 22: Métodos de agregação

(a) Interface para seleção do operador de agregação (b) Interface para seleção da modalidade de agregação

Optando pelo operador OWA, o usuário deve validar ou redefinir os quantificadores linguísticos pré-definidos, ou mesmo construir novos perfis de quantificadores, como ilustra a Figura 23 (a). Mais adiante, deve ser escolhido o quantificador linguístico dentre as opções configuradas no gráfico, como mostra a Figura 23 (b).



(a)

(b)

Figura 23: Quantificador linguístico

(a) Interface para definição (b) Interface para seleção

Fazendo a opção por um dos demais operadores de agregação, o usuário deve definir os coeficientes de importância para os critérios e/ou especialistas, acionando o botão **Importance Coefficients Definition**. Este comando ativa uma interface para a entrada dos parâmetros, como ilustrado abaixo.

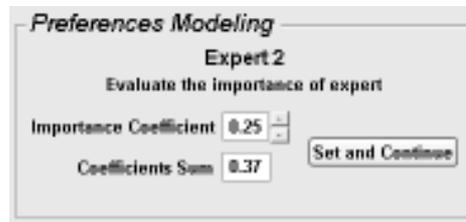


Figura 24: Interface para definição dos coeficientes de importância

8.6.5 Escolha do Método de Ordenação

Para a ordenação das alternativas, deve ser escolhido o operador de ordenação, dentre as alternativas mostradas na Figura 25.



Figura 25: Interface para seleção do operador de ordenação

8.6.6 Escolha da Abordagem de Consenso

Uma vez definida uma das modalidades de agregação de grupo (ver Figura 22), será indagado sobre a necessidade de construção de consenso.

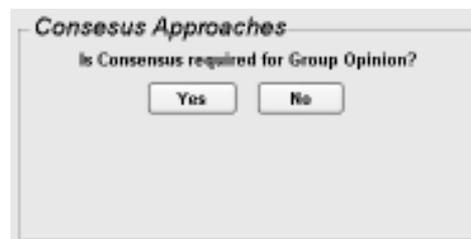


Figura 26: Interface para definição da necessidade de construção de consenso

Optando pela construção de consenso, devem ser definidos a abordagem, o nível de consenso desejado, o número de alternativas que deve atender ao consenso e o número máximo de iterações permitido, como mostra a Figura 27.



Figura 27: Interface para definição dos parâmetros de consenso

Para a realização da abordagem Autocrática, é necessário ainda informar os parâmetros mostrados na Figura 28.



Figura 28: Interface para entrada de parâmetros para a abordagem Autocrática

A abordagem Autocrática não requer a intervenção do grupo moderador. A evolução das iterações é apresentada no campo Resultados, como ilustra a Figura 29. Adicionalmente, são apresentados dois gráficos: um contendo o histórico de alterações dos coeficientes de importância atribuídos aos especialistas ao longo do processo; e outro o grau de harmoniosidade da solução, respectivamente ilustrados nas Figuras 30 e 31.

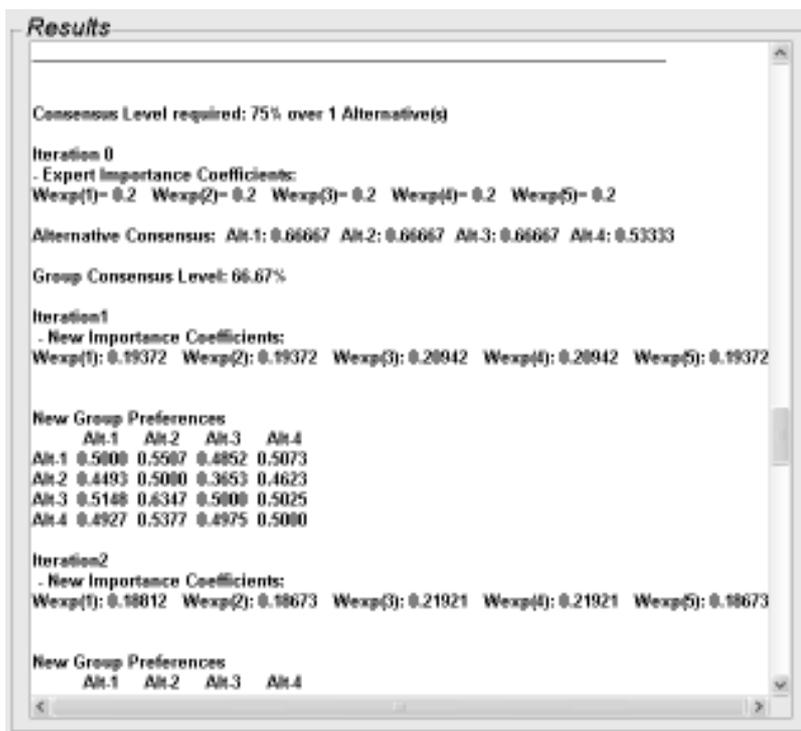


Figura 29: Evolução das iterações na construção de consenso segundo a abordagem autocrática

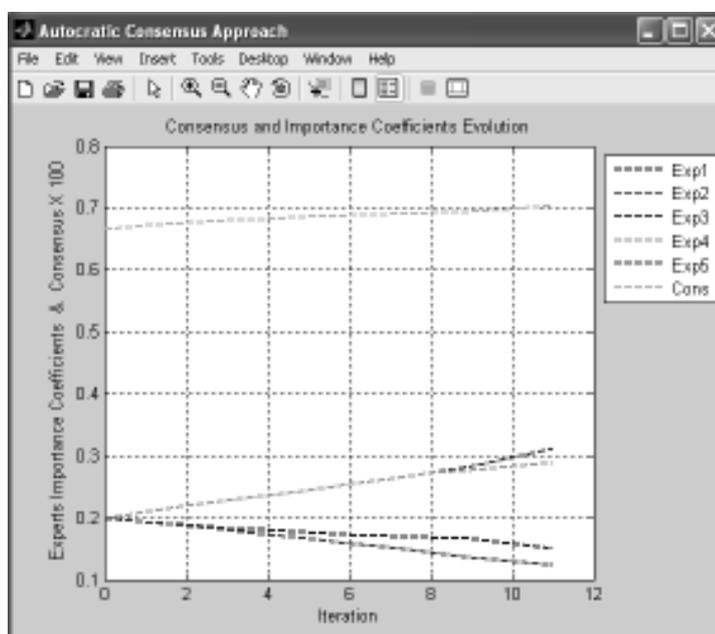


Figura 30: Histórico de alterações dos coeficientes de importância sobre os especialistas na construção de consenso segundo a abordagem autocrática

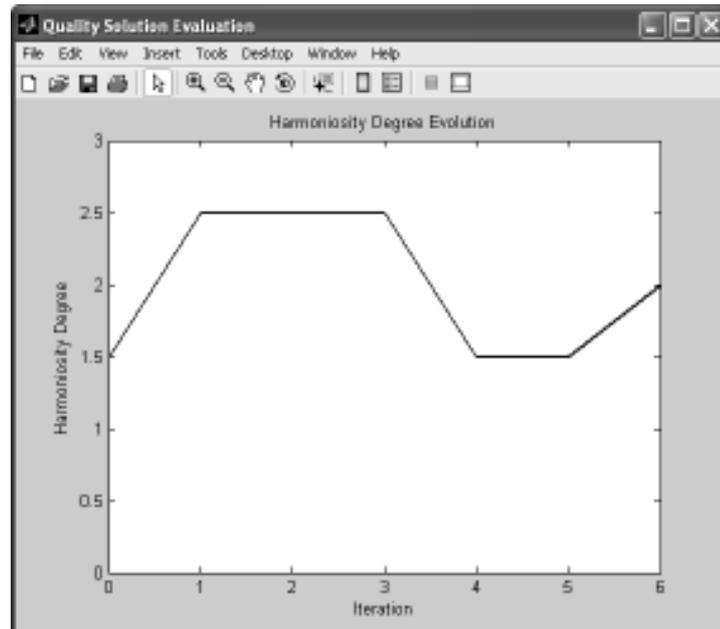


Figura 31: Comportamento do grau de harmoniosidade da solução

A abordagem Interativa também não necessita da intervenção do grupo moderador. A cada iteração, o especialista mais divergente da opinião do grupo, indicado pelo sistema com base na análise das contribuições individuais para a construção do consenso, é convidado a rever a sua posição. Dessa forma, um mesmo especialista pode ser convidado seguidas vezes até que sua opinião convirja para a opinião da maioria. A evolução das iterações é apresentada no campo Resultados (Figura 29). A interface para a realização das mudanças é semelhante à utilizada para a entrada dos dados iniciais, acrescida da facilidade de manter as preferências para determinados os critérios escolhidos, como mostra a figura 32. O comportamento do grau de harmoniosidade da solução é mostrado graficamente, como ilustra a Figura 31.

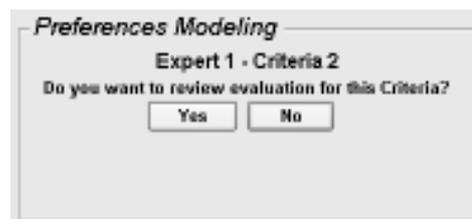


Figura 32: Interface com o usuário para manter as preferências sobre determinados critérios

Na abordagem Supervisionada, o grupo moderador desempenha papel fundamental, definindo como o processo é conduzido. A cada iteração, o grupo moderador deve analisar os resultados parciais do nível de consenso individual e de grupo, bem como a recomendação do sistema quanto ao especialista indicado para revisar a opinião. O grupo moderador pode ou não aceitar essa recomendação. Dessa forma, como mostra a Figura 33, o grupo moderador pode decidir por convidar o especialista indicado pelo sistema, convidar o próximo especialista na escala de contribuições para o consenso, ou revisar os coeficientes de importância de critérios e/ou especialistas. A evolução das iterações pode ser acompanhada no campo Resultados (Figura 29) e o comportamento do grau de harmoniosidade da solução é mostrado graficamente, como ilustrado na Figura 31.



Figura 33: Interface com o grupo moderador para a condução da construção de consenso segundo a abordagem supervisionada

8.7 Considerações Finais

Mesmo na condição de protótipo, o sistema 2MDMS tem contribuído de forma importante para a consolidação dos conceitos e técnicas associadas ao complexo universo da tomada de decisão. As funcionalidades implementadas, apesar de suficientes para desempenhar as tarefas propostas, ainda podem ser incrementadas e outras incorporadas para agregar maior robustez ao sistema. A princípio, é possível levantar em algumas questões pertinentes, como por exemplo, melhorar a consistência na entrada de dados, implementar facilidades para o armazenamento de novos cenários e escolha de cenários pré-definidos, amadurecer a forma de atuação do grupo moderador na orientação das alterações, aprimorar a interface com os usuários, considerar dados de fontes externas (principalmente os dados do sistema BSC) na construção de

regras de inferência, etc. Além destas, são esperadas ainda outras mudanças no sistema para adequá-lo às situações reais do planejamento estratégico.

9 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Os trabalhos desenvolvidos na presente tese foram motivados pela demanda de empresas que utilizam a metodologia BSC em sua gestão estratégica e enfrentam problemas com a eficiência e a efetividade de seus processos de tomada de decisão. Apesar do número significativo de técnicas e abordagens apresentado na bibliografia levantada, poucas evidenciam uma preocupação com resultados e análises consistentes de aplicações práticas. Neste sentido, foram realizados estudos e uma generalização teórica para o desenvolvimento de fundamentos metodológico, informativo e computacional para apoiar e justificar as decisões estratégicas adotadas pelas empresas na elaboração e acompanhamento de seus planejamentos estratégicos.

9.1 Conclusões

No presente trabalho, foi formulado e resolvido um problema científico de desenvolvimento, análise e aplicação de modelos, métodos e algoritmos eficientes para a tomada de decisão multicritério, dedicados ao apoio à solução dos problemas de gestão estratégica. Com isso, foram obtidos os seguintes resultados fundamentais:

- Desenvolvimento e aperfeiçoamento de vários modelos e métodos de análise multicritério, especialmente as abordagens capazes de processar adequadamente as incertezas das informações na avaliação e/ou comparação de alternativas, agregação de preferências, priorização de aspectos de importância, ordenação das alternativas e construção de consenso;
- Aplicação e avaliação do desempenho das combinações de operadores de agregação de preferências e ordenação de alternativas, com a constatação de que os operadores Mínimo para agregação e Máximo para ordenação resultam em processamento eficiente das informações associado à harmoniosidade da solução;
- Proposição de uma metodologia para medição e avaliação da qualidade das soluções com base no conceito de soluções harmoniosas;

- Afirmação da importância do papel do grupo moderador na condução e orientação do processo de tomada de decisão para a construção de consenso;
- Implementação de um protótipo computacional capaz de apoiar, de forma interativa, a tomada de decisão;
- Consideração de exemplos associados aos problemas encontrados nas empresas de energia elétrica, gerados pela utilização da metodologia do sistema BSC.

A adoção da metodologia BSC na gestão estratégica de várias empresas trouxe benefícios inquestionáveis, promovendo a introdução de novos indicadores de desempenho e permitindo o acompanhamento mais amplo das iniciativas estratégicas implementadas. Entretanto, o impacto da introdução destes novos elementos na gestão estratégica é significativo e as empresas que adotaram a metodologia BSC têm identificado a necessidade de melhor orientação de seus processos decisórios e melhor fundamentação dos modelos de métodos utilizados.

O amplo estudo de modelos e métodos aplicados à tomada de decisão permitiu conhecer a fundo os aspectos teóricos e realizar implementações práticas, atividades estas fundamentais na formulação das novas abordagens visando melhorar e superar as deficiências encontradas. A teoria dos conjuntos *fuzzy* se mostrou bastante eficiente e versátil na modelagem das informações dos decisores, sendo flexível para contemplar as incertezas inerentes às preferências humanas e transparente o suficiente para permitir análises eficazes.

Finalmente, a implantação de sistemas de apoio a decisões é uma alternativa indicada para aumentar a eficácia dos processos de tomada de decisão, auxiliando na agilização da criação de cenários complexos e suportando a análise dos resultados provenientes do processamento das preferências dos decisores.

9.2 Trabalhos Futuros

Na gestão estratégica, incluindo o planejamento estratégico, é necessário dar respostas a duas questões fundamentais: “que fazer?” e “como fazer?”. Os resultados produzidos neste trabalho, contribuem fundamentalmente para responder a primeira questão, associada à definição dos projetos estratégicos e esquemas de desenvolvimento a serem executados pelas empresas. A

segunda questão, está associada à alocação multicritério de recursos para a execução dos empreendimentos selecionados. Nesta tarefa, a falta de clareza na concepção de uma “solução ótima” é a dificuldade metodológica fundamental, que envolve métodos de otimização multicritério. As pesquisas [40-42,187], permitem identificar vantagens da utilização da abordagem de Bellman-Zadeh [52,110,188] na solução de problemas dessa natureza. A aplicação da abordagem de Bellman-Zadeh permite a criação de um método eficiente (do ponto de vista computacional), bem como rigoroso (do ponto de vista da obtenção de soluções que pertencem ao conjunto de Pareto) para a análise de modelos de otimização multicritério. Quando aplicada, apresenta resultados bastante satisfatórios na definição de uma solução harmoniosa com base na solução dos correspondentes problemas *max-min*. Desta forma, a aplicação da abordagem de Bellman-Zadeh pode ser uma linha das pesquisas futuras, particularmente para a solução dos problemas da alocação multicritério de recursos entre projetos estratégicos e esquemas de desenvolvimento.

Com relação a implantação dos resultados deste trabalho, os recursos de operacionais poderão ser ampliados para sistemas distribuídos de apoio a tomada de decisão, a fim de proporcionar maior conforto e operacionalidade a membros da equipe de decisores territorialmente distantes.

As perspectivas de realização de trabalhos junto à CEMIG Distribuição são positivas e é uma realidade próxima. O contato com as particularidades e especificidades da gestão estratégica dessa grande empresa permitirá ampliar os conhecimentos das necessidades práticas e direcionar o desenvolvimento de modelos e métodos a fim de torná-los plenamente adequados aos processos realizados. Independentemente deste propósito maior, algumas implementações no sistema de apoio a decisões desenvolvido estão previstas:

- A ampliação dos recursos de interface com o usuário para facilitar a construção e manipulação de cenários;
- A inclusão de uma interface que possibilite o decisor não se manifestar sobre situações em que não tenha opinião formada ou não esteja seguro para responder;
- A ampliação dos recursos para verificar a consistência dos dados introduzidos;

- A ampliação do módulo Gereciador de Conhecimento com a inclusão de regras de produção relacionadas à prática operacional da gestão estratégica;
- A incorporação de um banco de dados relacional para conexão com os sistemas corporativos.

10 BIBLIOGRAFIA

- [1] G.C. Freitas, Na direção de uma empresa inteligente, **10º Fórum SAP**, São Paulo, 2006.
- [2] R.V. Reis, **Utilização do Balanced Scorecard para Auxiliar na Determinação da Participação dos Funcionários nos Lucros ou Resultados das Empresas**, Dissertação de Mestrado. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- [3] R.S. Kaplan and D.P. Norton, The balanced scorecard: Measures that drive performance, **Harvard Business Review**, 70, 1992, 71-79.
- [4] R.S. Kaplan e D.P. Norton, **A Estratégia em Ação: Balanced Scorecard**. São Paulo: Editora Campus, 1997.
- [5] R.S. Kaplan e D.P. Norton, **Utilizando o Balanced Scorecard como Sistema Gerencial Sstratégico**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2000.
- [6] R.S. Kaplan and D.P. Norton, Putting the balanced scorecard to work, **Harvard Business Review**, 71, 1993, 134-147.
- [7] R.S. Kaplan and D.P. Norton, Using the balanced scorecard as a strategic management system, **Harvard Business Review**, 74, 1996, 75-85.
- [8] R.S. Kaplan and D.P. Norton, **The Balanced Scorecard: Translating Strategy into Action**. Boston: Harvard Business School, 1996.
- [9] R.S. Kaplan and D.P. Norton, **Organização Orientada para a Estratégia - Como as empresas que adotam o Balanced Scorecard prosperam no novo ambiente de negócios**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2001.
- [10] F.G. Lopes, **Balanced Scorecard e ISO 9001**, <http://www.keyassociados.com.br>. Acesso em 28.09.2006.

- [11] T.C. Toscano, **Fatores críticos de sucesso para implantação e uso do balanced scorecard como ferramenta de gestão da estratégia: estudo de caso de duas empresas brasileiras**, Dissertação de Mestrado. Belo Horizonte: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2008.
- [12] R.S. Kaplan and D.P. Norton, The strategy map: Guide to aligning intangible assets, **Strategy and Leadership**, 32(5), 2004, 10-17.
- [13] R.S. Kaplan and D.P. Norton, **Strategy Maps: Converting Intangible Assets into Tangible Outcomes**. Boston: Harvard Business School, 2004.
- [14] R.F. Miorando, C.H. Marchesan, L.A.S. Franz, A.F. Muller, F. Ely e C.S. Ten Caten, Desenvolvimento e aplicação de uma metodologia para avaliação de desempenho baseada no *Balanced Scorecard* em uma concessionária de energia elétrica, em **Anais do XI SIMPEP**. Bauru, 2004.
- [15] S.H. Barszcz, J.L. Kovaleski e J.C. Barszcz, As aplicações do Balanced Scorecard na Engenharia de Produção: uma análise baseada nas publicações do ENEGEP, em **Anais do XXVI ENEGEP**. Fortaleza, 2006.
- [16] J. Lu, G. Zhang, D. Ruan, and F. Wu, **Multi-Objective Group Decision Making**. London: Imperial College Press, 2007.
- [17] H.A. Simon, **The New Science of Management Decision**. Prentice Hall: Englewood, 1977.
- [18] C.L. Hwang and K. Yoon, **Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications - A State-of-the-Art Survey**. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [19] C.L. Hwang and A.S.M. Masud, **Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1979.

- [20] L.F.A.M. Gomes, M.C.G. Araya e C. Carignano, **Tomada de Decisões em Cenários Complexos: Introdução aos Métodos Discretos do Apoio Multicritério à Decisão**. São Paulo: Thomson, 2004.
- [21] F.Y. Edgeworth, **Mathematical Physics**. London: P. Keegan, 1881.
- [22] V. Pareto, **Cours d'Économie Politique**. Lousanne: Lousanne Rouge, 1886.
- [23] K.M. Miettinen, **Nonlinear Multiobjective Optimization**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [24] Yu.A. Dubov, C.I. Travkin e V.N. Yakimets, **Modelos Multicritério da Formação e Seleção de Variantes de Sistemas**. Moscou: Nauka, 1986 (em russo).
- [25] P.Ya. Ekel, Taking into account the uncertainty factor in problems of modelling and optimizing complex systems. **Advances in Modelling and Analysis**, C-43, 1994, 11-22.
- [26] M. Salukvadze, On the extension of solutions in problems of optimization under vector valued criteria, **Journal of Optimization Theory and Application**, 13, 1974, 203-217.
- [27] M. Sakawa, **Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization**. New York: Plenum Press, 1993.
- [28] J.P. Ignizio, **Goal Programming and Extensions**. Massachusetts: Lexington Books, 1976.
- [29] J.P. Ignizio, The determination of a subset of efficient solutions via goal programming, **Computer and Operations Research**, 8, 1981, 9-16.
- [30] M.A. Quaddus and A.G. Holzman, IMOLP: an interactive method for multiple objective linear programs, **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, 16, 1986, 462-468.
- [31] S. Ziont and J. Wallenius, An interactive programming method for solving the multiple criteria problem, **Management Science**, 22, 1975, 652-663.

- [32] R. Benayoun, J. Montogolfier, J. Tergny, and O. Larichev, Linear programming with multiple objective functions: step method (STEM), **Mathematical Programming**, 1, 1971, 366-375.
- [33] R.E. Steuer, An interactive multiple objective linear programming procedure, **TIMS Studies in the Management Sciences**, 6, 1977, 225-239.
- [34] P.Ya. Ekel, W. Pedrycz, V. Popov, M. Junges, and M. Moraes, Models and methods of multicriteria decision making in a fuzzy environment and their applications, in **Proceedings of the Seventh International Fuzzy Systems Association World Congress**. Prague, 3, 1997, 89-94.
- [35] P.Ya. Ekel, W. Pedrycz, and R. Schinzinger, Methods of multicriteria decision making in fuzzy environment and their applications, in **Proceedings of the North American Fuzzy Information Processing Society Conference**. New York, 1999, 625-629.
- [36] A.A. Lyapunov (Ed.), **Pesquisa Operacional: Aspectos Metodológicos**. Moscou: Nauka, 1972 (em russo).
- [37] M. Zeleny. **Multiple Criteria Decision Making**. New York/St. Louis/San Francisco: McGraw-Hill, 1982.
- [38] S. Rao, **Engineering Optimization: Theory and Practice**. New York/Chichester/Brisbane: John Wiley & Sons, 1996.
- [39] P.Ya. Ekel, M. Horta, J. Pereira Jr., A. Prakhovnik, and A. Kharchenko, Multicriteria optimization in load management and energy market problems, **WSEAS Transactions on Mathematics**, 1, 2002, 13-18.
- [40] P.Ya. Ekel and E.A. Galperin, Box-triangular multiobjective linear programs for resource allocation with application to load management and energy market problems, **Mathematical and Computer Modelling**, 37, 2003, 1-17.

- [41] P.Ya. Ekel, M. Menezes, and F. Schuffner Neto, Decision making in fuzzy environment and its application to power engineering problems, **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, 1, 2007, 527-536.
- [42] L. Canha, P. Ekel, J. Queiroz, and F. Schuffner Neto, Models and methods of decision making in fuzzy environment and their applications to power engineering problems, **Numerical Linear Algebra with Applications**, 14, 2007, 369-390.
- [43] L.F.A.M. Gomes, C.F.S. Gomes e A.T. Almeida, **Tomada de Decisões Gerencial: Enfoque Multicritério**. São Paulo: Atlas, 2002.
- [44] F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma, Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations, **Fuzzy Sets and Systems**, 97, 1998, 33-48.
- [45] F. Seo and M. Sakawa, Fuzzy multiattribute utility analysis for collective choice. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, 15, 1985, 45-53.
- [46] P.A. Raj and D.N. Kumar, Ranking alternatives with fuzzy weights using maximizing set and minimizing set. **Fuzzy sets and Systems**, 105, 1999, 365-375.
- [47] T.L. Saaty, **Método de Análise Hierárquica**. Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil, 1991.
- [48] T.L. Saaty. **Multicriteria Decision Making. The Analytical Hierarchy Process**. Pittsburgh: RWS Publications, 1990.
- [49] T. Tanino, On group decision making under fuzzy preferences, in **Multiperson Decision Making Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory**. Boston: Kluwer, 1990, 172-175.
- [50] J. Wang and Y.I. Lin, A fuzzy multicriteria group decision making approach to select configuration items for software development, **Fuzzy Sets and Systems**, 134, 2003, 343-363.

- [51] D.F. Li and J.B. Yang, Fuzzy linear programming technique for multiattribute group decision making in fuzzy environments. **Information Sciences**, 158, 2004, 263-275.
- [52] W. Pedrycz and F. Gomide, **An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design**. Cambridge, Massachusetts/London: MIT Press, 1998.
- [53] J. Kacprzyk and M. Fedrizzi (Eds.), **Fuzzy Regression Analysis**. Heidelberg/New York: Physica-Verlag, 1992.
- [54] L. Fung and K.S. Fu. The k-th optimal policy algorithm for decision making in fuzzy environment, in **Proceedings of the IFAC Symposium on Identification and Systems Parameter Estimation**. Hague, 1973, 1052-1059.
- [55] T.L. Saaty. Exploring the interface between hierarchies multiple objectives and fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, 1, 1978, 57-68.
- [56] A.M. Norwich and I.B. Turksen. Measurement and scaling of membership functions, in **Applied Systems and Cybernetics**. New York/Oxford/Toronto: Pergamon Press, 6, 1981, 2851-2858.
- [57] R.R. Yager. Level sets for membership evaluation of fuzzy subsets, in **Fuzzy Set and Possibility Theory: Recent Advances**. New York/Oxford/Toronto: Pergamon Press, 1982, 90-97.
- [58] M.R. Civanlar and H.J. Trussell. Constructing membership functions using statistical data. **Fuzzy Sets and Systems**, 18, 1986, 1-13.
- [59] J.E. Chen and K.N. Otto. Constructing membership functions using interpolation and measurement theory, **Fuzzy Sets and Systems**, 73, 1995, 313-327.
- [60] A.F. Blishun. Comparative analysis of methods of measuring fuzziness, **Soviet Journal of Computer and System Sciences**, 27, 1989, 110-126.
- [61] G.J. Klir and B. Yuan. **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995.

- [62] P.Ya. Ekel and V. Popov. Fuzzy set theory and problems of the design and control of power systems and subsystems, in **Proceedings of the 4th IEEE Conference on Control Applications**. Albany, 1995, 46-51.
- [63] P.Ya. Ekel, L.D.B. Terra, F.P.G. Paletta, and Z.A. Styczynski. Fuzzy technology in design, planning, and control of complex systems (on the example of power engineering problems), in **Electrical and Computer Engineering Series: Signal Processing, Communications and Computer Science**, 2000, 333-338.
- [64] H. Tanaka, S. Vegima, and K. Asai. Linear regression analysis with fuzzy models, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, 12, 1982, 903-907.
- [65] L. Tran and L. Duckstein. Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure, **Fuzzy sets and Systems**, 130, 2002, 331-341.
- [66] K. Yoon and C.L. Hwang, **Multiple Attribute Decision Making: An Introduction**. London: Sage Publication, 1995.
- [67] T.A. Farmer, Testing the robustness of multiattribute utility theory in an applied setting, **Decision Sciences**, 18, 1998, 178-193.
- [68] R. Roy. Problems and methods with multiple objective functions, **Mathematical Programming**, 1, 1971, 239-266.
- [69] T.L. Saaty, **The Analytic Hierarchy Process**. New York: Mac Graw Hill, 1980.
- [70] R. Keeney and H. Raifa, **Decisions with Multiple Objectives. Preferences and Value Trade-offs**. New York/Chichester/Brisbane: John Wiley & Sons, 1976.
- [71] F.A. Lootsma, A multiplicative variant of the analytic hierarchy process, **Report of the faculty of technical mathematics and informatics**, n. 90-45, Delft: Delft University of Technology, 1990.
- [72] S.R. Watson and A.N.S. Freeling, Assessing attribute weights by ratios, **Omega**, 10, 1982, 582-583.

- [73] V.A. Belton and T. Gear, The legitimacy of rank reversal - a comment, **Omega**, 13, 1985, 143-144.
- [74] P. Vincke, Analysis of multicriteria decision aid in Europe, **European Journal of Operational Research**, 25, 1986, 160-168.
- [75] B. Roy, Classement et choix em présence de points de vue multiples (La méthode Electre), **RIRO**, 8, 1986, 57-75.
- [76] B. Roy and P. Bertier, La méthode Electre II, **SEMA (Mestra International)**, **Note de Travail 142**, 1971.
- [77] B. Roy, Electre III: un algorithme de rangement fondé sur une représentation des préférences em présence de critères multiples, **Cahiers du Centre d'études de Recherche Operationnelle**, 20, 1978, 3-24.
- [78] B. Roy and J.C. Hugonnard, Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by multicriteria, **Transportation Research**, 164A, 1982, 301-312.
- [79] B. Roy and J.M. Skalka, Electre IS: aspects méthodologiques ET guide d'utilisation. **Cahier du LAMSADE**. Paris: Université de Paris-Dauphine, 30, 1985.
- [80] W. Yu, **Aide Multicritère à La Décision Dans le Cadre de la Problématique du TRI**. Tese de Doutorado. Paris: Université de Paris-Dauphine, 1992.
- [81] J.P. Brans, B. Mareshal, P. Vincke, Prométhée: a new family of outranking methods in multicriteria analysis, in **Operational Research' 84**. Amsterdam/London/New York: North-Holland, 1984, 408-421.
- [82] A. Schärliig, **Pratiquer electre et Prométhée: um Complément à Décider sur Plusieurs Critères**. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1996.

- [83] R.O. Parreiras, **Algoritmos Evolucionários e Técnicas de Tomada de Decisão em Análise Multicritério**. Tese de Doutorado. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- [84] J.P. Brans and B. Mareshal, **The Promethee-gaia Decision Support System for Multicriteria Investigations**. Brussels: University of Brussels, 1997.
- [85] R. Keeney and H. Raifa, **Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs**. New York/Santa Barbara/London: John Wiley & Sons, 1976.
- [86] M.Tong and Bonissone P.P. A linguistic approach to decision making with fuzzy sets, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, 10, 1980, 716-723.
- [87] F. Herrera and E.H. Viedma. Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information, **Fuzzy Sets and Systems**, 115, 2000, 67-82.
- [88] Z. Xu. On method for uncertain multiple attribute decision making problems with uncertain multiplicative preference information on alternatives, **Fuzzy Optimization and Decision Making**, 4, 2005, 131-139.
- [89] E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and F. Chiclana, A consensus model for multiperson decision making with different preferences structures, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, A-32, 2002, 394-402.
- [90] Q. Zhanga, J.C.H. Chena, and P.P. Chong. Decision consolidation: criteria weight determination using multiple preference formats, **Decision Support Systems**, 38, 2004, 247-258.
- [91] P. Vincke, **Multicriteria Decision-Aid**. New York/Chichester/Brisbane: John Wiley & Sons, 1992.
- [92] V.A. Popov and P.Ya. Ekel, Fuzzy set theory and problems of controlling the design and operation of electric power systems, **Soviet Journal of Computer and System Sciences**, 25, 1987, 92-99 (printed in the USA).

- [93] P.Ya. Ekel, Approach to decision making in fuzzy environment, **International Journal of Computers and Mathematics with Applications**, 37, 1999, 59-71.
- [94] L.S. Belyaev and L.A. Krumm, Applicability of probabilistic methods in energy calculations, **Power Engineering**, 21, 1983, 3-10.
- [95] H. Rommelfanger. The advantages of fuzzy optimization models in practical use, **Fuzzy Optimization and Decision Making**, 3, 2004, 295-309.
- [96] G.B. Dantzig, Linear programming under uncertainty. **Management Science**, 1, 1955, 197-207.
- [97] W.K. Grassman, **Stochastic Systems for Management**. Amsterdam/London/New York: North-Holland, 1981.
- [98] H.M. Wagner, **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1986.
- [99] R.D. Luce and H. Raiffa, **Games and Decisions**. New York/Chichester/Brisbane: John Wiley & Sons, 1957.
- [100] J. Milnor, Games against nature, in **Game Theory and Related Approaches to Social Behavior**. New York/Chichester/Brisbane: John Wiley & Sons, 1963, 120-131.
- [101] H. Raiffa, **Decision Analysis**. Reading/Menlo Park/Sydney: Addison-Wesley, 1968.
- [102] E.L. Andrade, **Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e Modelos para a Análise de Decisão**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1990.
- [103] G.M. Kaufman, **Statistical Decision and Related Techniques in Oil and Gas Exploration**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1961.
- [104] L.S. Belyaev. **A Practical Approach to Choosing Alternative Solutions to Complex Optimization Problems under Uncertainty**. Laxenburg: IIASA, 1977.

- [105] P.Ya. Ekel and V.A. Popov, Consideration of the uncertainty factor in problems of modelling and optimizing electrical networks, **Power Engineering**, 23(2), 1985, 45-52.
- [106] P Ya. Ekel, V. Popov, and V. Zorin. Taking into account uncertainty factor in models of discrete optimization of electric power supply systems, in **Lecture Notes in Control and Information Sciences: System Modelling and Optimization**, 143, 1990, 741-747.
- [107] P.Ya. Ekel, Fuzzy sets and models of decision making, **Computers and Mathematics with Applications**, 44, 2002, 863-875.
- [108] L.A. Zadeh, Fuzzy sets. **Information and Control**, 8, 1965, 338-353.
- [109] D. Dubois and H. Prade, **Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications**. New York: Academic Press, 1980.
- [110] H.J. Zimmermann, **Fuzzy Set Theory and Its Application**. Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [111] P.Ya. Ekel, Methods of decision making in fuzzy environment and their application, **Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications**, 47, 2001, 979-990.
- [112] P.Ya. Ekel and F.H. Schuffner Neto, Algorithms of discrete optimization and their application to problems with fuzzy coefficients, **Information Sciences**, 176, 2006, 2846-2868.
- [113] W.J. Araujo, R.C. Berredo, P.Ya. Ekel, and R.M. Palhares, Discrete optimization algorithms and problems of decision making in a fuzzy environment, **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, 1, 2007, 593-602.
- [114] G. Bojadziev and M. Bojadziev, **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications**. Singapore/New Jersey/London/Hong Kong: World Scientific, 1995
- [115] X. Wang and E.E. Kerre, Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I), **Fuzzy Sets and Systems**, 118, 2001, 375-385.

- [116] S. Freeling, Fuzzy sets and decision analysis, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, 10, 1980, 341-354.
- [117] H. Lee-Kwang, A method for ranking fuzzy numbers and its application to decision-making. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 7, 1999, 677-685.
- [118] C.H. Cheng, A new approach for ranking fuzzy numbers by distance methods, **Fuzzy Sets and Systems**, 95, 1998, 307-313.
- [119] S.J. Chen and C.L. Hwang, **Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications**. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 1992.
- [120] P.Ya. Ekel, W. Pedrycz, and R. Schinzinger, A general approach to solving a wide class of fuzzy optimization problems, **Fuzzy Sets and Systems**, 97, 1998, 49-66.
- [121] P. Fortemps and M. Roubens, Ranking and defuzzification methods based on area compensation, **Fuzzy Sets and Systems**, 82, 1996, 319-330.
- [122] C. Chen and C.M. Klein, An efficient approach to solving fuzzy MADM problems, **Fuzzy Sets and Systems**, 88, 1997, 51-67.
- [123] L.H. Chen and H.W. Lu, The preference order on fuzzy numbers, **Computers and Mathematics with Applications**, 4, 2002, 1455-1465.
- [124] T.Y. Tseng and C.M. Klein, New algorithm for the ranking procedure in fuzzy decision making, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, 19, 1989, 1289-1296.
- [125] P.T. Chang and E.S. Lee, Ranking of fuzzy sets based on the concept of existence. **Computers Mathematics Applications**, 27, 1994, 1-21.
- [126] V. Zorin e P.Ya. Ekel, **Desenvolvimento e Controle de Sistemas de Fornecimento de Energia Elétrica**. Kiev: Znanie, 1986 (em russo).

- [127] P. Ekel and V. Popov, Fuzzy set theory and expert system methodology in the design and control of power systems and subsystems, in **Critical Technology**. New York: Cognizant Communication Corporation, 1, 1996, 314-320.
- [128] S.A. Orlovski, Decision-making with a fuzzy preference relation, **Fuzzy Sets and Systems**, 1, 1978, 155-167.
- [129] S.A. Orlovski, **Problemas de Tomada de Decisoões com Informação Fuzzy**. Moscou: Nauka, 1981 (em russo).
- [130] A. Banerjee, Rational choice under fuzzy preferences: the Orlovsky choice function. **Fuzzy Sets and Systems**, 33, 1993, 295-299.
- [131] S.M. Baas and H. Kwakernaak, Rating and raking of multi-aspect alternatives using fuzzy sets, **Automatica**, 13, 1977, 47-58.
- [132] J.F. Baldwin and N.C.F. Guild, Comparison of fuzzy sets on the same decision space. **Fuzzy Sets and Systems**, 2, 1979, 213-231.
- [133] D. Dubois and H. Prade, Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory. **Information Sciences**, 30, 1983, 183-224.
- [134] K. Horiuchi and N. Tamura. VSOP fuzzy numbers and their fuzzy ordering, **Fuzzy Sets and Systems**, 93, 1998, 197-210.
- [135] D. Pospelov (ed.), **Conjuntos Fuzzy em Modelos de Controle e Inteligência Artificial**. Moscou: Nauka, 1986 (em russo).
- [136] J. Fodor and M. Roubens, **Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support**. Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [137] M. Marimin, M. Umamo, I. Hatono and H. Tamure, Linguistic labels for expressing fuzzy preference relations in fuzzy group decision making, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, 28, 1998, 205-218.

- [138] K. Sengupta, Fuzzy preference and Orlovsky choice procedure, **Fuzzy Sets and Systems**, 93, 1998, 231-234.
- [139] M.H. Rasmy, S.M. Lee, W.F. Abd El-Wahed, A.M. Ragab, and M.M. El-Sherbiny, An expert system for multiobjective decision making: application of fuzzy linguistic preferences and goal programming, **Fuzzy Sets and Systems**, 127, 2002, 209-220.
- [140] M.Z. Zgurovsky and V.C. Totsenko, Group incomplete paired comparisons with account expert competence, **Mathematical and Computer Modelling**, 39, 2004, 349-361.
- [141] M. Fedrizzi and S. Giove. Incomplete pairwise comparison and consistency optimization, **European Journal of Operational Research**, 183, 2007, 303-313.
- [142] E. Herrera-Vedma, F. Chiclana, F. Herrera, and S. Alonso, Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, 37-B, 2007, 176-189.
- [143] C. Cheng, Simple fuzzy group decision making method, in **Proceedings of the IEEE International Conference Fuzzy Systems**, Seoul, 2, 1999, II-910–II-915.
- [144] R.R. Yager, Non-numeric multi-criteria multi-person decision making, **Group Decision and Negotiation**, 2, 1993, 81-93.
- [145] R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, 18, 1998, 183–190.
- [146] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay, Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators, **Fuzzy Sets and Systems**, 79, 1996, 175–190.
- [147] G. Bordogna, M. Fedrizzi, and G. Passi, A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, A-27, 1997, 126-132.

- [148] R.R.Yager, Generalized OWA aggregation operators. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, 3, 2004, 93-107.
- [149] Y.M. Wang and C. Parkan, A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, **Information Sciences**, 177, 2007, 1867-1877.
- [150] D. Ben-Arieh and Z. Chen, Linguistic-labels aggregation and consensus measure for autocratic decision making using group recommendations, **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, A-36, 2006, 558-568.
- [151] R. Slowinski (ed.), **Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics**. Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [152] M. Roubens, **Choice Procedures in Fuzzy Multicriteria Decision Analysis Based on Pairwise Comparisons**. Liege: University of Liege, 1995.
- [153] Z.P. Fang, J. Ma, and Q. Zhang, An approach to multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives, **Fuzzy Sets and Systems**, 131, 2002, 101-106.
- [154] C.R. Barrett, P.K. Patanalk, and M Salles, On choosing rationally when preferences are fuzzy, **Fuzzy Sets and Systems**, 34, 1990, 197-212.
- [155] D. Bouyssou, Acyclic fuzzy preference and the Orlovski choice function: a note, **Fuzzy Sets and Systems**, 89(1), 1997, 107-111.
- [156] E.S. Lee and R.L. Li, Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events, **Computers and Mathematics with Applications**, 15, 1988, 887-896.
- [157] P.Ya. Ekel, E. Galperin, R. Palhares, C. Campos, and M. Silva, Fuzzy coefficients and fuzzy preference relations in models of decision making, in **Lecture Notes in Artificial Intelligence**, 2773, 2003, 229-236.

- [158] R.C. Berredo, P.Ya. Ekel, and R.M. Palhares, Fuzzy preference relations in models of decision making, **Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications**, 63, 2005, 735-741.
- [159] P.Ya. Ekel, R.L.J. Carnevalli, B.M. Mendonça Neta, D.L. de Souza e R.M. Palhares, Modelos e métodos de tomada de decisões em ambiente fuzzy e suas aplicações, em **Anais do XXXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Natal, 2003, 980-990.
- [160] P.Ya. Ekel and L.D.B. Terra, Fuzzy preference relations: methods and power engineering applications, **OPSEARCH**, 39, 2002, 34-45.
- [161] J. Ness and C. Hoffman, **Putting Sense Into Consensus: Solving the Puzzle of Making Team Decisions**. Tacoma: VISTA Associates, 1998.
- [162] P. Prodanovic and S.P. Simonovic, Fuzzy compromise programming for group decision making, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, A-33, 2003, 358-365.
- [163] K.C. Ng and B. Abramson, Consensus diagnosis: A simulation study, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, 22, 1992, 916–928.
- [164] M. Fedrizzi and J. Kacprzyk (eds.), **Multiperson Decision Making Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory**. Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [165] H.S. Lee, Optimal consensus of fuzzy opinions under group decision making environment. **Fuzzy Sets and Systems**, 132, 2002, 303–315.
- [166] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay, A sequential selection process in group decision making with linguistic assessment, **Information Sciences**, 85, 1995, 223-239.
- [167] H.M. Hsu and C.T. Chen, Aggregation of fuzzy opinions under group decision making, **Fuzzy Sets and Systems**, 79, 1996, 279-285.
- [168] Z.S. Xu and J. Chen, An interactive method for fuzzy multiple attribute group decision making, **Information Sciences**, 177, 2007, 248-263.

- [169] P. Bernardes, P.Ya. Ekel, and R. Parreiras, A new consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments, in **Mathematical Logic Research**. Houppauge: Nova Science Publishers, in press.
- [170] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, and H. Nurmi, Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority, **Fuzzy Sets and Systems**, 49, 1992, 21–31.
- [171] N. Bryson, Group decision-making and the analytic hierarchy process: Exploring the consensus-relevant information content, **Computers and Operations Research**, 23, 1996, 27–35.
- [172] J. Einhorn, Expert judgment: Some necessary conditions and an example, **Journal of Applied Psychology**, 59, 1974, 562–571.
- [173] J. Shanteau, D. Weiss, R.P. Thomas, and J.C. Pounds, Performance based assessment of expertise: How to decide if someone is an expert or not, **European Journal of Operational Research**, 136, 2002, 253–263.
- [174] Z. Xu, Multi-person multi-attribute decision making models under intuitionistic environment, **Fuzzy Optimization and Decision Making**, 6, 2007, 221-236.
- [175] K. Penivati, Criteria for evaluating group decision-making methods, **Mathematical and Computer Modelling**, 46, 2007, 935-947.
- [176] Z. Xu, Group decision making based on multiple types of linguistic preference relations, **Information Sciences**, 178, 2008, 452-467.
- [177] Y.P. Jiang, Z.P. Fan, and J. Ma, A method for group decision makin with multi-granularity linguistic assessment information, **Information Sciences**, 178, 2008, 1098-1109.
- [178] P. Ekel, J. Queiroz, R. Parreiras, and R. Palhares, Fuzzy set based models and methods of multicriteria group decision making, **Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications**, in press.

- [179] Y. Chung-Hsing and C. Yu-Hern, Validating multiattribute decision making methods for supporting group decisions, in **Proceedings of the 2008 IEEE International Conferences on Cybernetics & Intelligent Systems**. Chengdu, 2008, 878-883.
- [180] G. Beliakov and J. Warren, Appropriate choice of aggregation operators in fuzzy decision support systems, **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 9, 2001, 773-784.
- [181] P.M. Jannuzzi, **Associação Nacional de Instituições de Planejamento, Pesquisa e Estatística**, <http://www.anipes.org.br>, Acesso em 17.04.2009.
- [182] C.F.S. Gomes, **Centro de Análises de Sistemas Navais**, <https://www.casnav.mar.mil.br>, Acesso em 17.04.2009.
- [183] G.A. Gorry and M.S. Scott-Morton, A framework for management information system, **Sloan Management Review**, 13, 1971, 55-70.
- [184] P.G.W. Keen and M.S. Scott-Morton, **Decision Support Systems: An Organization Perspective**. Reading: Addison Wesley, 1978.
- [185] R.H. Sprague and H.J. Watson, **Decision Support Systems: Putting Theory into Practice**. London: Prentice-Hall, 1993.
- [186] E. Turban, J.E. Aronson, and T.P. Liang, **Decision Support Systems and Intelligent Systems**. Pearson: Prentice Hall, 2005.
- [187] P.Ya. Ekel, C.A.P.S. Martins, J.G. Pereira Jr., R.M. Palhares, and L.N. Canha, Fuzzy set based multiobjective allocation of resources and its applications, **Computers and Mathematics with Applications**, 52, 2006, 197-210.
- [188] R.E. Bellman and L.A. Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, **Management Science**, 17, 1970, 141-164.