

# Novas Condições para Recuperação de Estabilidade com Atuadores Virtuais Estáticos <sup>★</sup>

Iury Valente de Bessa <sup>\*\*\*</sup> Reinaldo Martinez Palhares <sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Universidade Federal de Minas Gerais, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Belo Horizonte, MG

<sup>\*\*</sup> Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Eletricidade, Manaus, AM (e-mail: iurybessa@ufam.edu.br)

<sup>\*\*\*</sup> Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Eletrônica, Belo Horizonte, MG (e-mail: rpalhares@ufmg.br)

**Abstract:** This work presents a novel static virtual actuator structure for fault tolerant control of linear systems under actuator faults conditions. Sufficient conditions for the existence of such static VAs that ensures the stability recovery by fault hiding of systems with input saturation are provided. The proposed methodology makes easier the application of static VAs for fault hiding noticing that the obtained LMI-based conditions, presented in this work, provide less conservative solutions when compared with conditions usually described in the literature. Numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the proposed VA structure.

Este trabalho apresenta uma nova estrutura de atuador virtual estático para controle tolerante a falhas de sistemas lineares em condições de falhas no atuador. São apresentadas condições suficientes para a existência de tais AV's estáticos que garantam a recuperação da estabilidade por mascaramento de falhas de sistemas com saturação na entrada. A metodologia proposta facilita a aplicação de VAs estáticos para mascaramento de falhas dado que as condições baseadas em LMI, que são apresentadas nesse trabalho, fornecem soluções menos conservativas quando comparadas às condições usualmente descritas na literatura. Exemplos numéricos são apresentados para mostrar a efetividade da estrutura simplificada de AV.

*Keywords:* Fault Tolerant Control; Virtual Actuator; Stability Recovery.

*Palavras-chaves:* Controle Tolerante a Falhas; Atuador Virtual; Recuperação de Estabilidade.

## 1. INTRODUÇÃO

Controle tolerante a falhas (FTC) Richter (2011) está recebendo crescente atenção devido à demanda por sistemas automáticos mais seguros e confiáveis. Técnicas de FTC podem ser classificadas em dois grupos principais: FTC passivo (PFTC) que é principalmente baseado em teoria de controle robusto ao tratar a ocorrência de falhas como incertezas que devem ser rejeitadas pelo sistema de controle, dispensando técnicas de reconfiguração de controle ou diagnóstico e isolamento de falhas (FDI); e FTC ativo (AFTC) que usa informações de FDI para alterar a lei ou a estrutura de controle visando garantir o cumprimento dos objetivos de controle apesar da ocorrência de falhas. Em particular, o AFTC pode ser obtido por meio de: acomodação de falhas, que altera a lei de controle para alcançar os objetivos de controle com a parte do sistema que é afetada pela falha; reconfiguração de sistema, que substitui a malha de controle por outra que alcança os objetivos por meio da parte "saudável" do sistema; ou mascaramento de

falhas, que não altera o controlador, e insere um bloco de reconfiguração (BR) entre o sistema com falha e o controlador para recuperar a estabilidade e o desempenho nominal.

O mascaramento de falhas é aplicado a falhas em sensores e atuadores por meio de BR's denominados, respectivamente, sensor virtual (SV) e atuador virtual (AV). Em particular, existem estruturas dinâmicas e estáticas para AV's. Os AV's dinâmicos são mais complexos, se baseiam no princípio do modelo interno e são aplicados a diversas classes de sistemas, tais como lineares (Steffen, 2005), Hammerstein-Wiener (Richter and Lunze, 2010a; Richter, 2011), *piecewise affine* (Richter et al., 2011), L'ure (Pedersen et al., 2016), fuzzy Takagi-Sugeno (Rotondo et al., 2016), e lineares com parâmetros variantes (Rotondo et al., 2014). Por outro lado, os AV's estáticos são raramente usados devido às restritas condições de factibilidade, embora Steffen (2005) mostre que quando factíveis, BR's estáticos restauram a normalidade de todas as variáveis do sistema.

Esse trabalho apresenta uma estrutura simplificada para AV's estáticos e fornece condições menos conservativas baseadas em LMI para a factibilidade desses AV's que garantam a recuperação de estabilidade para sistemas

<sup>★</sup> Esse trabalho foi financiado por CAPES - Brasil, CNPq, FAPEAM and FAPEMIG, e por bolsa de estudos do programa PROPG-CAPES/FAPEAM.

lineares e com saturação nas entradas após a ocorrência de falhas em atuadores. A eficácia do AV simplificado (AVS) proposto é demonstrada por meio de diversos exemplos. O restante desse trabalho é organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta a estrutura do AVS; a Seção 3 apresenta condições suficientes para a recuperação de estabilidade por mascaramento de falhas com o AVS para sistemas lineares e com saturação na entrada; a Seção 4 aplica o AVS a um modelo de navio e compara os resultados ao de outras estruturas de AV's encontradas na literatura; e a Seção 5 apresenta as conclusões.

## 2. ATUADOR VIRTUAL ESTÁTICO SIMPLIFICADO

Considere uma planta cujo modelo nominal (sem falhas) linear  $\Sigma_P$  é descrito a seguir:

$$\Sigma_P : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  e  $y \in \mathbb{R}^p$  são respectivamente vetores de estados, entradas e saídas medidas. Essa planta é conectada ao controlador  $\Sigma_C$ , descrito abaixo, com realimentação de saída.

$$\Sigma_C : \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y_c \\ u_c = C_c x_c \end{cases} \quad (2)$$

onde  $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$  é o vetor de estados do controlador,  $y_c$  é a entrada do controlador proveniente dos sensores da planta e  $u_c$  é o sinal de controle para os atuadores da planta. Nominalmente, o sistema em malha fechada ( $\Sigma_P, \Sigma_C$ ) é obtido com as conexões  $y_c \leftarrow y$  e  $u \leftarrow u_c$ .

O comportamento dessa planta com falhas em atuadores é representado pelo modelo de falhas  $\Sigma_{P_f}$  descrito abaixo.

$$\Sigma_{P_f} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_f u \\ y = Cx \end{cases} \quad (3)$$

**Observação 1.** Neste trabalho, adota-se a representação multiplicativa para falhas em atuadores, ou seja, a ocorrência de falhas no  $i$ -ésimo atuador é representada pela multiplicação de seu indicador  $f_i$  pela  $i$ -ésima variável de entrada. Para sistemas lineares com  $m$  atuadores e  $B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m]$ , a falha no  $i$ -ésimo atuador modifica a  $i$ -ésima coluna de  $B$ , tal que  $B_{f_i} = f_i \cdot B_i$ , para  $0 \leq f_i \leq 1$ , onde  $f_i = 0$  indica perda total do  $i$ -ésimo atuador,  $f_i = 1$  indica ausência de falha, e  $0 < f_i < 1$  indica redução da eficiência desse atuador.

O mascaramento de falhas em sistemas com falhas em atuadores consiste em inserir um AV  $\Sigma_R$  entre  $\Sigma_{P_f}$  e  $\Sigma_C$  após a ocorrência da falha com o objetivo de mitigar os seus efeitos.  $\Sigma_R$  é genericamente descrito a seguir

$$\Sigma_R : \begin{cases} \dot{x}_r = f_r(x_r, u_c, y) \\ u_r = g_r(x_r, u_c, y) \\ y_r = h_r(x_r, u_c, y) \end{cases} \quad (4)$$

O AV dinâmico descrito em (4) apresenta três componentes: o primeiro corresponde à dinâmica de  $\Sigma_R$  que é geralmente relacionada ao princípio do modelo interno; o segundo é responsável por compensar o sinal do controlador para os atuadores; e o terceiro atenua o efeito das falhas nos sinais de sensores que são enviados ao controlador. Richter et al. (2010) mostra que o AV dinâmico é uma

generalização do observador de Luenberger dual proposto em (Rosenbrock, 1962) para alocação perfeita de polos. A Fig. 1 ilustra o mascaramento de falhas, onde o sistema reconfigurado é obtido com as conexões  $y_c \leftarrow y_r$  e  $u \leftarrow u_r$ .

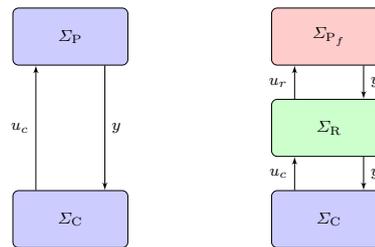


Figura 1. FTC com mascaramento de falhas.

Nesse artigo, é proposto um AVS sem equação dinâmica, o qual é descrito abaixo.

$$\Sigma_R : \begin{cases} y_r = R_1 y + R_2 u_c \\ u_r = R_3 y + R_4 u_c \end{cases} \quad (5)$$

**Observação 2.** A estrutura descrita em (5) é sugerida por Steffen (2005) como um tipo de AV estático. É indicado, no entanto, que tal estrutura não seria capaz de garantir a reconfiguração para diversas classes de problemas (Steffen, 2005). Contudo, até onde se sabe, não houveram novos esforços para a obtenção de melhores condições de factibilidade dessa estrutura. Esse trabalho propõe condições mais relaxadas para a obtenção do AVS descrito em (5), que tem como vantagem a estrutura simplificada que dispensa o princípio do modelo interno.

## 3. RECUPERAÇÃO DE ESTABILIDADE POR MASCARAMENTO DE FALHAS

A Definição 1 descreve o problema de recuperação de estabilidade por mascaramento de falhas.

**Definição 1.** Sejam  $\Sigma_P$  e  $\Sigma_{P_f}$  os modelos nominal e de falhas para o mesmo sistema conectado a um controlador  $\Sigma_C$ . Assumindo que a origem de  $(\Sigma_P, \Sigma_C)$  é assintoticamente estável,  $\Sigma_{P_f}$  é estável por mascaramento de falhas se existe um bloco de reconfiguração  $\Sigma_R$  tal que a origem de  $(\Sigma_{P_f}, \Sigma_R, \Sigma_C)$  é assintoticamente estável.

### 3.1 Recuperação de estabilidade de sistemas lineares por mascaramento de falhas

**Teorema 1.** Sejam  $\Sigma_P$  and  $\Sigma_{P_f}$ , descritos, respectivamente, como (1) e (3), os modelos nominal e de falhas para a mesma planta conectada a um controlador com realimentação de saída  $\Sigma_C$ . Assuma que existe alguma matriz  $P = P^T > 0$  tal que  $P\tilde{A} + \tilde{A}^T P < 0$  com

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \quad (7)$$

então  $\Sigma_{P_f}$  é estável por mascaramento de falhas com  $\Sigma_R$  descrito em (5), se existem  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  que satisfaçam à seguinte desigualdade

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ * & L_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= P_{11}(A + B_f R_3 C) + (A + B_f R_3 C)^T P_{11} + \\ &\quad P_{12} B_c R_1 C + C^T R_1^T B_c^T P_{12} \\ L_{12} &= P_{11} B_f R_4 C_c + P_{12}(A_c + B_c R_2 C_c) + \\ &\quad (A + B_f R_3 C)^T P_{12} + C^T R_1^T B_c^T P_{22} \\ L_{22} &= P_{12} B_f R_4 C_c + C_c^T R_4^T B_f^T P_{12} + \\ &\quad P_{22}(A_c + B_c R_2 C_c) + (A_c + B_c R_2 C_c)^T P_{22} \end{aligned}$$

**Prova.** Assume-se que a origem de  $(\Sigma_P, \Sigma_C) : \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}$ , onde  $\tilde{x} \triangleq [x \ x_c]^T$ , é assintoticamente estável, ou seja existe alguma matriz  $P = P^T \succ 0$ , tal que  $P\tilde{A} + \tilde{A}^T P \prec 0$ .

Segundo a Definição 1,  $\Sigma_{P_f}$  é estável por mascaramento de falhas, se existir algum  $\Sigma_R$  tal que a origem de  $(\Sigma_{P_f}, \Sigma_R, \Sigma_C) : \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_r \tilde{x}$  é assintoticamente estável, onde

$$\tilde{A}_r \triangleq \begin{bmatrix} A + B_f R_3 C & B_f R_4 C_c \\ B_c R_1 C & A_c + B_c R_2 C_c \end{bmatrix} \quad (9)$$

A mesma função de Lyapunov  $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x}$  (com a mesma matriz  $P$ ) é usada para o sistema reconfigurado. Então, a origem de  $(\Sigma_P, \Sigma_R, \Sigma_C)$  é assintoticamente estável se

$$P\tilde{A}_r + \tilde{A}_r^T P \prec 0 \quad (10)$$

Note que (10) é equivalente a (8). Portanto, se existirem  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  que satisfaçam (8), então  $\Sigma_{P_f}$  é estável por mascaramento de falhas com  $\Sigma_R$  descrito em (5).

**Observação 3.** Dado que (3) é linear, a garantia de estabilidade fornecida pelo Teorema 1 é global, e desta forma os chaveamentos ocorridos durante a falha (assumida abrupta) e a reconfiguração não afetam tal conclusão, pois estes efeitos podem ser resumidos às condições iniciais do sistema reconfigurado.

**Exemplo 1.** Considere o sistema em malha fechada  $(\Sigma_P, \Sigma_C)$ , onde  $\Sigma_P$  é dado por (1) e

$$\begin{aligned} \Sigma_C : \begin{cases} \dot{x}_c = (A - BK - LC)x_c + Ly \\ u_c = -Kx \end{cases} \quad (11) \\ A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0] \\ K = \begin{bmatrix} 1.5482 & 1.4222 \\ 0.073 & 0.0833 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 29 \\ 100.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uma falha no primeiro atuador ( $f_1 = 0$ ) ocorre em  $t = 15$  s. Usando  $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x}$ , é possível demonstrar que a origem de  $(\Sigma_P, \Sigma_C)$  é assintoticamente estável, uma vez que existe  $P = P^T \succ 0$  que satisfaz  $P\tilde{A} + \tilde{A}^T P \prec 0$  para  $\tilde{A}$  dado por (7), onde  $A_c = A - BK - LC$ ,  $B_c = L$  e  $C_c = -K$ . Com o LMILAB, determina-se a seguinte  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 0.7886 & 0.1854 & -0.6700 & 0.1927 \\ 0.1854 & 0.5016 & 0.0100 & -0.0226 \\ -0.6700 & 0.0100 & 0.7552 & -0.2339 \\ 0.1927 & -0.0226 & -0.2339 & 0.0880 \end{bmatrix}$$

De acordo com o Teorema 1, a mesma  $P$  em (1) pode ser usada para encontrar  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  que satisfaçam (8) e recuperem a estabilidade de  $\Sigma_{P_f}$ . Desta forma, o LMILAB fornece os seguintes ganhos:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1.0944 & R_2 &= [-0.0723 \ 11.4896] \\ R_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1085 \end{bmatrix} & R_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.0052 & 13.1243 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

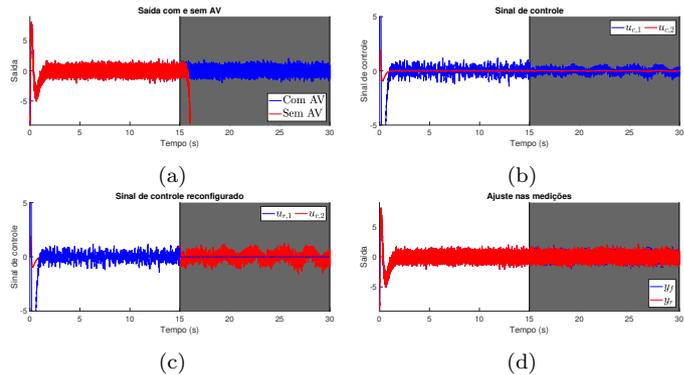


Figura 2. Resultados do exemplo 1.

As Figs. 2a-2d apresentam os resultados da simulação com o AVS considerando ruído de medição  $\nu \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$ . Fig. 2a compara as saídas de  $\Sigma_{P_f}$  com e sem AV. Note que a resposta sem AV se torna instável após a ocorrência da falha ( $t = 15$  s) enquanto a resposta com o AVS permanece em torno do ponto de equilíbrio. As Figs. 2b e 2c mostram, respectivamente, os sinais de controle fornecidos pelos controladores ( $u_c$ ) e os sinais de controles reconfigurados ( $u_r$ ). Note que devido aos baixos valores na segunda linha de  $K$ , o esforço de controle tende a ser mais solicitado ao primeiro atuador, por isso o sinal de controle do primeiro atuador ( $u_{c,1}$ ) tem mais energia que o do segundo atuador ( $u_{c,2}$ ) como mostrado na Fig. 2b. No entanto, com a falha no primeiro atuador, o AV redistribui esse sinal de controle de forma que o sinal reconfigurado do primeiro atuador ( $u_{r,1}$ ) é anulado e o sinal reconfigurado do segundo atuador ( $u_{r,2}$ ) tem seu módulo aumentado após a falha conforme mostrado na Fig. 2c. A Fig. 2d demonstra que o AVS também compensa o efeito da falha nos sinais de medidos antes de aplicá-los ao controlador.

### 3.2 Recuperação de estabilidade por mascaramento de falhas em sistemas lineares com saturação na entrada

O Exemplo 1 demonstra que o mascaramento de falhas com AV's tende a realocar o esforço de controle para atuadores saudáveis. Eventualmente, tal realocação pode sobrecarregar esses atuadores ou resultar em saturações. Desta forma, é importante lidar com a saturação na entrada quando abordagens de mascaramento de falhas são usadas. De fato, o projeto de AV's com saturação na entrada já é considerado na literatura em (Richter, 2011; Rotondo et al., 2015; Fan et al., 2012; Richter and Lunze, 2010b). Nesse sentido, o próximo teorema fornece condições suficientes para a recuperação de estabilidade por mascaramento de falhas em sistemas lineares com saturação na entrada.

**Teorema 2.** Sejam  $\Sigma_P$  e  $\Sigma_{P_f}$  os seguintes modelos nominal e de falhas para a mesma planta com saturação na entrada

$$\Sigma_P : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B \text{sat}(u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (12)$$

$$\Sigma_{P_f} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_f \text{sat}(u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{sat}(u) = [\text{sat}_1(u_1) \ \dots \ \text{sat}_m(u_m)]^T \quad (14)$$

$$\text{sat}_l(u_l) = \begin{cases} u_l, & \text{se } -\bar{u}_l \leq u_l \leq \bar{u}_l \\ \bar{u}_l, & \text{se } u_l > \bar{u}_l \\ -\bar{u}_l, & \text{se } u_l < -\bar{u}_l \end{cases} \quad (15)$$

Assuma que essa planta é conectada a um controlador com realimentação de saída  $\Sigma_C$  descrito em (2), tal que existe alguma matriz  $P = P^\top > 0$ , uma matriz diagonal  $T > 0$ , e uma matriz  $W = [W_1 \ W_2]$  tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^\top P + P\tilde{A} & P\tilde{B} - W^\top T \\ * & -2T \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (16)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se existirem  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  que satisfaçam

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & P_{11}B_f - W_1^\top T \\ * & L_{22} & P_{12}B_f - W_2^\top T \\ * & * & -2T_f \end{bmatrix} \prec 0 \quad (18)$$

$$L_{11} = P_{11}(A + B_f R_3 C) + (A + B_f R_3 C)^\top P_{11} + P_{12} B_c R_1 C + C^\top R_1^\top B_c^\top P_{12}$$

$$L_{12} = P_{11} B_f R_4 C_c + P_{12} (A_c + B_c R_2 C_c) + (A + B_f R_3 C)^\top P_{12} + C^\top R_1^\top B_c^\top P_{22}$$

$$L_{22} = P_{12} B_f R_4 C_c + C_c^\top R_4^\top B_f^\top P_{12} + P_{22} (A_c + B_c R_2 C_c) + (A_c + B_c R_2 C_c)^\top P_{22}$$

então  $\Sigma_{P_f}$  é estável por mascaramento de falhas com  $\Sigma_R$  descrito em (5).

**Prova.** Considere uma não-linearidade de zona morta genérica  $\psi(u)$  e assumamos a seguinte relação com a não-linearidade de saturação:

$$\psi(u) = \text{sat}(u) - u \quad (19)$$

Substituindo (19) em (12), o seguinte modelo é obtido para o sistema em malha fechada  $(\Sigma_P, \Sigma_C)$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\psi(u_c) \quad (20)$$

Considere ainda  $W$  tal que  $-\rho \leq u_c - W\tilde{x} \leq \rho$ , para algum  $\rho \in \mathbb{R}_+$ . Então, de acordo com (Khalil, 2000) a não linearidade de setor  $\psi(u_c)$  satisfaz à seguinte desigualdade para alguma matriz  $T > 0$  diagonal

$$\psi^\top(u_c) T (\psi(u_c) + W\tilde{x}) \leq 0 \quad (21)$$

A derivada de  $V(\tilde{x})$  é

$$\dot{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^\top (\tilde{A}^\top P + P\tilde{A})\tilde{x} + \psi^\top \tilde{B}^\top P\tilde{x} + \tilde{x}^\top P\tilde{B}\psi \quad (22)$$

A desigualdade (16) é equivalente a

$$\dot{V}(\tilde{x}) < 2\psi^\top(u_c) T (\psi(u_c) + W\tilde{x})$$

que garante a estabilidade assintótica da origem de  $(\Sigma_P, \Sigma_C)$  dentro da região de atração  $\tilde{x}^\top P\tilde{x} \leq 1$ .

Além disso, a mesma  $P$  que satisfaz (16) pode ser usada para encontrar uma condição suficiente para recuperação de estabilidade do sistema reconfigurado  $(\Sigma_P, \Sigma_R, \Sigma_C)$ :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_r \tilde{x} + \tilde{B}_r \psi(u_c) \quad (23)$$

$$\tilde{A}_r \triangleq \begin{bmatrix} A + B_f R_3 C & B_f R_4 C_c \\ B_c R_1 & A_c + B_c R_2 C_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_r \triangleq \begin{bmatrix} B_f \\ 0 \end{bmatrix}$$

A origem de (23) é assintoticamente estável se existem  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  que satisfaçam à seguinte desigualdade

$$\dot{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^\top (\tilde{A}^\top P + P\tilde{A})\tilde{x} + \psi^\top \tilde{B}^\top P\tilde{x} + \tilde{x}^\top P\tilde{B}_f \psi < 2\psi^\top(u_c) T (\psi(u_c) + W) \quad (24)$$

que equivale a

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_r^\top P + P\tilde{A}_r & P\tilde{B}_r - W^\top T \\ * & -2T \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (25)$$

Note que  $\tilde{A}_r^\top P + P\tilde{A}_r$  é apresentado na prova do Teorema 1

$$\tilde{A}_r^\top P + P\tilde{A}_r = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ * & L_{22} \end{bmatrix} \quad (26)$$

O bloco  $P\tilde{B}_r - W^\top T$  é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P_{11} B_f - W_1^\top T \\ P_{12} B_f - W_2^\top T \end{bmatrix} \quad (27)$$

finalmente, (18) é obtida ao substituir (26) e (27) em (25). Consequentemente, se existirem  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  que satisfaçam (18), então a origem de  $(\Sigma_P, \Sigma_R, \Sigma_C)$  é assintoticamente estável, portanto,  $\Sigma_{P_f}$  é estável por mascaramento de falhas com  $\Sigma_R$  descrito como (5) (cf. Definição 1).

**Exemplo 2.** Considere o sistema em malha fechada do exemplo 1 com um ganho  $K$  do controlador diferente e saturação nas entradas

$$K = \begin{bmatrix} 0.5108 & 0.9335 \\ 0.6258 & 0.6387 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 27 \\ 88.5 \end{bmatrix}$$

Uma falha no primeiro atuador ocorre em  $t = 15$  s, tal que  $f_1 = 0$ . A origem de  $(\Sigma_P, \Sigma_C)$  é assintoticamente estável e (16) é satisfeita com:

$$P = \begin{bmatrix} 0.6418 & 0.1161 & -0.5928 & 0.1802 \\ 0.1161 & 0.4022 & 0.0050 & -0.0209 \\ -0.5928 & 0.0050 & 0.7710 & -0.2505 \\ 0.1802 & -0.0209 & -0.2505 & 0.0973 \end{bmatrix}$$

A mesma  $P$  em (1) pode ser usada para encontrar  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  que satisfaçam (18). Usando o LMILAB, os seguintes ganhos são obtidos:

$$R_1 = 1.0390 \quad R_2 = [1.0806 \quad -0.4909]$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1670 \end{bmatrix}, \quad R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.7111 & 0.8876 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar a abordagem proposta, desprezando a saturação, um VA diferente é obtido com o Teorema 1:

$$R_1 = 0.8955 \quad R_2 = [2.1888 \quad -1.8654]$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.9366 \end{bmatrix}, \quad R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3.7142 & -1.8645 \end{bmatrix}$$

A Fig. 3 apresenta as respostas dos sistemas reconfigurados obtidos por meio do Teorema 2 e Teorema 1, e sem AV, considerando  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 3$ . Ademais, é adicionado a saída um ruído de medição  $\nu \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$  e uma perturbação em degrau em  $t = 17$  s. Em particular, Fig. 3a mostra a resposta nos três cenários. Note que enquanto o sistema sem AV se torna instável após a ocorrência da falha, os demais se mantêm estáveis mesmo após a perturbação. Contudo, a resposta obtida por meio do Teorema 1 se mantém oscilando após a perturbação. Fig. 3b compara o sinal de controle para o atuador saudável considerando a saturação. O AV obtido com o Teorema 2 é capaz de

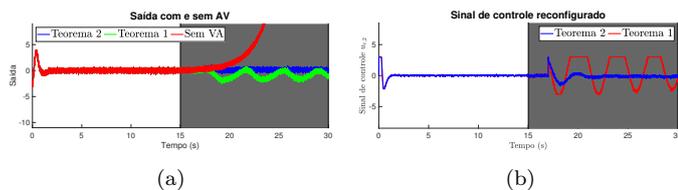


Figura 3. Resultados do exemplo 2.

recuperar a estabilidade evitando saturações. De outro modo, o AV obtido com o Teorema 1 sofre saturação no sinal de controle reconfigurado, o que afeta o desempenho do sistema reconfigurado causando oscilações.

#### 4. ESTUDO DE CASO

Nessa seção, o modelo linearizado de navio oceânico (Richter, 2011) é usado para investigar a aplicação do AVS e compará-lo a estruturas de AV propostas por Steffen (2005) e Richter (2011). O navio tem dois propulsores que produzem forças  $u_1$  e  $u_2$  em N, e um terceiro atuador que é um leme usado para produzir momento de guinada  $u_3$  em N.m. A dinâmica do navio é descrita com quatro estados: velocidades de avanço ( $v$ ) e de deriva ( $w$ ) em m/s, velocidade de guinada ( $r$ ) em rad/s e ângulo de aproamento ( $\psi$ ) em rad. Também são consideradas, as perturbações causadas pelos ventos nas direções de avanço  $a_v$  e de deriva  $a_w$  em  $m/s^2$ . Assume-se que velocímetros, giroscópio e bússola são sensores disponíveis para medições da velocidade de avanço  $\hat{v}$ , velocidade de guinada  $\hat{r}$ , e ângulo de aproamento  $\hat{\psi}$ . Desta forma, o modelo simplificado e linearizado do navio é descrito a seguir

$$\Sigma_P : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_d d \\ y = Cx + \nu \end{cases} \quad (28)$$

onde  $\nu \sim \mathcal{N}(0, 0.0001)$ ,

$$x = \begin{bmatrix} v \\ w \\ r \\ \psi \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \hat{r} \\ \hat{\psi} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.2105 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2841 & -0.054 & 0 \\ 0 & -0.3857 & -0.2381 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0526 & 0.0526 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.0238 & -0.0238 & 0.2381 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No primeiro cenário, a saturação na entrada é desprezada e o AVS obtido por meio do Teorema 1 é comparado ao AV dinâmico  $\Sigma_{R_d}$  proposto em (Steffen, 2005; Richter, 2011) para recuperar a estabilidade em malha fechada, cuja estrutura é descrita a seguir:

$$\Sigma_{R_d} : \begin{cases} \dot{x}_\Delta(t) = A_\Delta x_\Delta(t) + B_\Delta u_c(t) \\ y_r = y + C x_\Delta \\ u_r = M u_c + N y \end{cases} \quad (29)$$

onde  $A_\Delta \triangleq A - B_f M$ ,  $B_\Delta \triangleq B - B_f N$ , e  $x_\Delta \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_\Delta(0) = 0$ .

A Fig. 4 ilustra os resultados para o modelo de navio (28) com condição inicial  $x(0) = [2 \ -0.5 \ 0.1 \ -0.1]^\top$  e perturbação

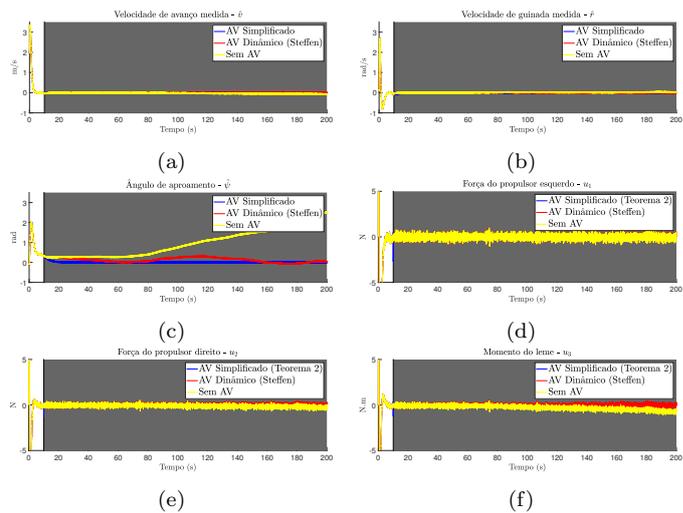


Figura 4. Resultados da simulação do modelo do navio.

aleatória  $d \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$ . Uma falha afeta o atuador do leme ( $u_3$ ) em  $t = 10$  s tal que  $f_3 = 0$ . Na Fig. 4, as respostas dos sistemas em malha fechada sem AV, com AV dinâmico (Steffen, 2005), e com AVS proposto são comparados. Um controlador de realimentação de saída descrito como (11) é usado com os seguintes ganhos

$$K = \begin{bmatrix} 26.1062 & 19.6206 & -1.3762 & 3.7873 \\ 12.2279 & 11.7411 & 1.6050 & 2.2237 \\ 11.8446 & 11.7831 & 3.0318 & 2.3863 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -7.4875 & -18.5991 & 28.0882 \\ -3.2405 & 15.8168 & -161.6894 \\ 14.8450 & 26.7155 & -14.2092 \\ -1.9205 & -2.6953 & 10.0393 \end{bmatrix}$$

$M$  em (29) é escolhido de forma que  $A_\Delta$  seja Hurwitz

$$M = \begin{bmatrix} 0.0032 & 4.3194 & 0.0229 & 0.2901 \\ 0.0034 & 1.2437 & -0.0099 & 0.0417 \\ 0.0027 & -2.4666 & 0.0012 & -0.1897 \end{bmatrix} \times 10^4$$

e  $N$  é arbitrariamente escolhido como a identidade, conforme (Richter, 2011). O AV obtido por meio do Teorema 1 apresenta os seguintes ganhos

$$R_1 = \begin{bmatrix} 17.933 & -10.1513 & -2.2952 \\ 13.9222 & -8.5543 & -2.0272 \\ -6.4949 & 23.4335 & 7.7843 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} -1.1511 & -0.8394 & 2.8945 \\ 0.3547 & -5.0651 & 4.3686 \\ 10.1776 & -37.8113 & 19.6236 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0.5215 & -0.2479 & -0.0275 \\ -1.0364 & 0.4790 & 0.0436 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 0.1753 & -0.7559 & 0.4444 \\ -0.2413 & 1.0191 & -0.5895 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3$$

As Figs. 4a-4c mostram as saídas medidas e as Figs. 4d-4f mostram os sinais de controle do navio. Esses resultados indicam que tanto o AV dinâmico quanto o AVS são capazes de recuperar a estabilidade após a falha no atuador, mas o terceiro estado ( $\psi$ ) se torna instável sem AV. A recuperação de estabilidade obtida pelo AVS é ligeiramente mais rápida em relação ao AV dinâmico, que mantém uma pequena oscilação após a falha.

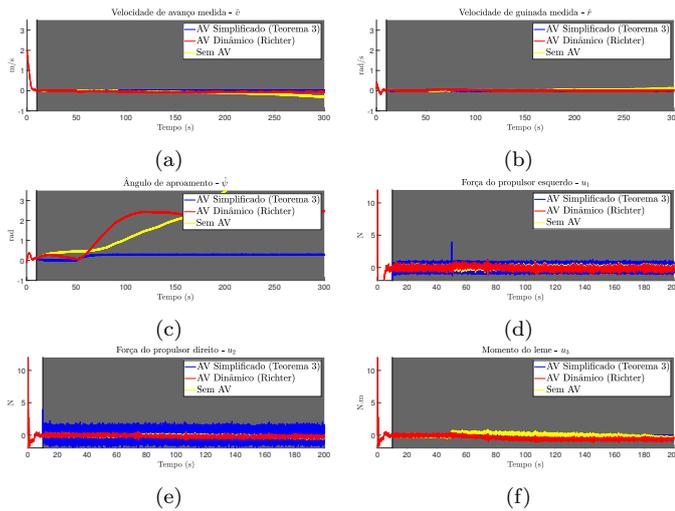


Figura 5. Resultados da simulação com o modelo do navio com saturação na entrada.

No segundo cenário, cujos resultados são mostrados na Fig. 5, a falha afeta o mesmo atuador em  $t = 10$  s, mas dessa vez são consideradas saturações nas entradas, tal que  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 4$ . Ademais, ocorre uma mudança na referência do ângulo de apreamento para  $0.3$  rad em  $t = 50$  s. Na Fig. 5, são comparados os sinais de controle e as saídas medidas do sistema sem AV, com o AV Hammerstein (Richter, 2011), e com o AVS obtido por meio do Teorema 2. O AV Hammerstein tem a seguinte estrutura

$$\Sigma_{R_d} : \begin{cases} \dot{x}_\Delta(t) = A_\Delta x_\Delta(t) + B_\Delta \phi(u_c(t)) \\ y_r = y + C x_\Delta \\ u_r = M u_c + N y \end{cases} \quad (30)$$

onde  $\phi(\cdot) = \text{sat}(\cdot)$ . Os ganhos  $M$  e  $N$  são extraídos de (Richter, 2011):

$$M = \begin{bmatrix} 0.0154 & -0.0042 & 0.0054 & 0.0005 \\ 0.0154 & 0.0042 & -0.0054 & -0.0005 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = I_3$$

O Teorema 2 produz os seguintes ganhos para  $\Sigma_R$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 18.4827 & -8.0961 & -1.7685 \\ 14.2480 & -7.3938 & -1.7721 \\ -7.2056 & 21.0602 & 7.2613 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} -0.7773 & -2.8771 & 4.2952 \\ 0.3497 & -5.7000 & 5.0352 \\ 9.8222 & -35.6340 & 18.0142 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0.5142 & -0.2412 & -0.0285 \\ -1.0504 & 0.4444 & 0.0356 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 0.1623 & -0.7304 & 0.4423 \\ -0.2332 & 1.0215 & -0.6067 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3$$

Fig. 5 mostra que ambos, AV Hammerstein e AVS são capazes de recuperar a estabilidade após a falta no atuador, embora o AVS proporcione uma recuperação mais rápida com uma estrutura mais simples.

## 5. CONCLUSÕES

Esse artigo apresentou uma nova estrutura de AV estático para mascaramento de falhas, assim como condições baseadas em LMI para recuperação de estabilidade com esse

AV proposto aplicado a sistemas lineares e sistemas com saturação na entrada. Exemplos numéricos mostraram que o AVS é capaz de fornecer resultados ligeiramente melhores que os AV's dinâmicos da literatura com uma estrutura menos complexa.

## REFERÊNCIAS

- Fan, J.H., Zhang, Y.M., and Zheng, Z.Q. (2012). Robust fault-tolerant control against time-varying actuator faults and saturation. *IET Control Theory & Applications*, 6(14), 2198–2208. doi:10.1049/iet-cta.2011.0713.
- Khalil, H. (2000). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- Pedersen, A., Richter, J., Tabatabaeipour, M., Jóhannsson, H., and Blanke, M. (2016). Fault tolerant emergency control to preserve power system stability. *Control Engineering Practice*, 53, 151–159. doi:10.1016/j.conengprac.2015.11.004.
- Richter, J., Lunze, J., and Steffen, T. (2010). The relation between the virtual actuator and the dual observer. *European Journal of Control*, 16(5), 525–531. doi:10.3166/ejc.16.525-531.
- Richter, J. (2011). *Reconfigurable Control of Nonlinear Dynamical Systems: A fault-hiding Approach*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Berlin Heidelberg.
- Richter, J., Heemels, W., Wouw, N., and Lunze, J. (2011). Reconfigurable control of piecewise affine systems with actuator and sensor faults: Stability and tracking. *Automatica*, 47(4), 678–691. doi:10.1016/j.automatica.2011.01.048.
- Richter, J. and Lunze, J. (2010a). Reconfigurable control of Hammerstein systems after actuator failures: stability, tracking, and performance. *International Journal of Control*, 83(8), 1612–1630. doi:10.1080/00207179.2010.484072.
- Richter, J. and Lunze, J. (2010b). Reconfigurable control of hammerstein systems after actuator failures: stability, tracking, and performance. *International Journal of Control*, 83(8), 1612–1630. doi:10.1080/00207179.2010.484072.
- Rosenbrock, H. (1962). Distinctive problems of process control. *Chemical Engineering Progress*, 58(9), 43–50.
- Rotondo, D., Nejjari, F., and Puig, V. (2014). A virtual actuator and sensor approach for fault tolerant control of LPV systems. *Journal of Process Control*, 24(3), 203–222. doi:10.1016/j.jprocont.2013.12.016.
- Rotondo, D., Nejjari, F., and Puig, V. (2016). Fault tolerant control of a proton exchange membrane fuel cell using Takagi–Sugeno virtual actuators. *Journal of Process Control*, 45, 12–29. doi:10.1016/j.jprocont.2016.06.001.
- Rotondo, D., Ponsart, J.C., Theilliol, D., Nejjari, F., and Puig, V. (2015). A virtual actuator approach for the fault tolerant control of unstable linear systems subject to actuator saturation and fault isolation delay. *Annual Reviews in Control*, 39, 68 – 80. doi:10.1016/j.arcontrol.2015.03.006.
- Steffen, T. (2005). *Control reconfiguration of dynamical systems: linear approaches and structural tests*. Springer Berlin Heidelberg.