

# UMA ABORDAGEM PARA SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS BASEADA EM TÉCNICAS DE CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ A TEMPO DISCRETO

CLÁUDIO D. CAMPOS\*, REINALDO M. PALHARES†, EDUARDO M. A. M. MENDES†,  
LEONARDO A. B. TÔRRES†, LEONARDO A. MOZELLI†

\**Depto. de Eng. Eletrônica e de Telecomunicação - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais  
Av. Dom José Gaspar 500 - 30535-610, Belo Horizonte - MG - Brasil*

†*Departamento de Engenharia Eletrônica - Universidade Federal de Minas Gerais  
Av. Antônio Carlos 6627 - 31270-010, Belo Horizonte - MG - Brasil*

Emails: campos@pucminas.br, palhares@cpdee.ufmg.br, emmendes@cpdee.ufmg.br,  
torres@cpdee.ufmg.br, lamozelli@yahoo.com.br

**Abstract**— This paper investigates the robust synchronization of coupled chaotic systems based on robust  $\mathcal{H}_\infty$  control techniques and its application in an information transmission experiment. From recent results of the literature, a design methodology has been proposed to deal with the synchronization of a class of Lur'e discrete time systems. Practical experiments are presented in order to emphasize the design methodology effectiveness and to validate its implementation.

**Keywords**— chaotic systems, synchronization,  $\mathcal{H}_\infty$  control, linear matrix inequalities (LMIs).

**Resumo**— Este trabalho investiga a sincronização robusta de sistemas caóticos acoplados com base em técnicas de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  e a sua aplicação em um mecanismo experimental de transmissão de informação. A partir de resultados recentes da literatura, uma metodologia de projeto foi proposta para tratar da sincronização de uma classe de sistemas de Lur'e a tempo discreto. Experimentos práticos são apresentados para enfatizar a efetividade da metodologia de projeto proposta e validar a sua implementação.

**Keywords**— sistemas caóticos, sincronização, controle  $\mathcal{H}_\infty$ , desigualdades matriciais lineares (LMIs).

## 1 Introdução

Motivados pelos resultados apresentados por Louis Pecora e Thomas Carroll em seu artigo seminal, (Pecora and Carroll, 1990), que mostrava a viabilidade de se sincronizar circuitos osciladores com comportamento dinâmico caótico, diversos trabalhos foram desenvolvidos ao longo dos últimos anos contemplando o tema de sincronização de sistemas caóticos.

Entende-se por sistemas caóticos uma classe de sistemas não-lineares que apresentam extrema sensibilidade à sua condição de inicialização. Nestes sistemas, o comportamento dinâmico é de difícil predição a partir do ponto inicial e a sincronização ocorre a medida que, por exemplo, dois sistemas caóticos são forçados a seguirem a mesma trajetória no espaço de estados.

A sincronização de sistemas caóticos encontra aplicação em diversas áreas da física, da biologia e da engenharia. Certamente, em um primeiro momento da história, as aplicações voltadas à mecanismos de comunicação foram as que mais motivaram os estudos em sincronização de sistemas caóticos.

Diversas técnicas para sincronização de sistemas caóticos foram propostas na literatura (veja em (Pecora et al., 1997) um apanhado de algumas destas técnicas e suas aplicações). Atualmente destacam-se trabalhos relacionados à sincronização de sistemas caóticos desenvolvidos com base na aplicação de técnicas da Teoria de Controle Robusto (Millerioux and Daafouz, 2003), (Jiang and Zheng, 2004), (Ji et al., 2006).

Neste trabalho uma metodologia de projeto sistemática será desenvolvida para tratar do problema de sincronização de uma classe de sistemas Lur'e a tempo discreto. Esta metodologia de projeto inspira-se na concatenação das principais idéias apresentadas na literatura (Millerioux and Daafouz, 2001), (Mendes and Billings, 2002) e (Aguirre et al., 2005) e consiste, basicamente, em etapas que envolvem identificação e estimação paramétrica de sistemas, discretização, formulação de um problema de reconstrução de estados e, por fim, a aplicação de técnicas de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  em formulações por desigualdades matriciais lineares – LMIs.

Com o objetivo de ilustrar a efetividade da metodologia de projeto proposta, resultados experimentais serão apresentados neste trabalho, considerando o problema de transmissão de informação. Os experimentos foram realizados em uma plataforma laboratorial baseada no circuito oscilador de Chua (Matsumoto, 1984). A comunicação será realizada com base no princípio de transmissão de informação apresentado em (Tôrres and Aguirre, 2004), através da sincronização de circuitos osciladores de Chua acoplados. O teste de transmissão de informação servirá como um índice de verificação de qualidade do sincronismo robusto obtido pela abordagem proposta neste trabalho.

A seção 2 apresenta uma proposta de metodologia de projeto para sincronização de sistemas caóticos e uma abordagem para sincronização robusta de uma classe de sistemas Lur'e a tempo discreto. A seção 3 desenvolve uma aplicação experimental de transmis-

são de informação para evidenciar a efetividade da metodologia de projeto apresentada. A seção 4 apresenta a conclusão do trabalho.

## 2 Desenvolvimento

### 2.1 Metodologia de Projeto

A metodologia de projeto para solucionar o problema de sincronização caótica consiste em três passos. Primeiramente, os parâmetros que caracterizam os modelos dos sistemas caóticos deverão ser estimados. Em seguida, caso seja necessário, deve-se obter um modelo discreto que represente de forma fiel o modelo contínuo no tempo. Por fim, deve-se aplicar a abordagem desenvolvida neste trabalho para a sincronização robusta de sistemas caóticos.

Para a estimação dos parâmetros dos modelos sugere-se a aplicação das abordagens apresentadas em (Aguirre et al., 2005) ou (Sitz et al., 2004), onde os parâmetros dos sistemas são estimados, recursivamente, através de um algoritmo baseado no filtro de Kalman uncented – UKF. Estas abordagens de estimação provaram ser bastante eficientes, mesmo para os casos de identificação de sistemas não-lineares a partir de massas de dados corrompidas com ruído.

Em (Mendes and Billings, 2002) é apresentado um método para discretização de sistemas não-lineares. Este método de discretização é eficiente ao garantir no sistema discretizado a preservação dos pontos fixos originais do sistema contínuo e a reconstrução da sua dinâmica, mesmo para uma ampla faixa de valores de tempo de integração.

### 2.2 Esquema de Sincronização Mestre-Escravo

Considere um esquema de sincronização constituído de sistemas não-lineares a tempo discreto com transições de estados e saídas descritas por:

$$\text{Mestre} \quad \begin{cases} x_{k+1}^m = A(\rho_k)x_k^m + B(\rho_k) \\ y_k^m = Cx_k^m \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Escravo} \quad \begin{cases} x_{k+1}^e = A(\rho_k)x_k^e + B(\rho_k) + u_k \\ y_k^e = Cx_k^e \end{cases} \quad (2)$$

onde  $x_k^{m,e} \in \mathbb{R}^n$  e  $x_{k+1}^{m,e} \in \mathbb{R}^n$  denotam os vetores de estado nos instantes de tempo discreto  $k$  e  $k+1$ , respectivamente<sup>1</sup>.  $y_k^{m,e} \in \mathbb{R}^m$  denotam os vetores de saída medida.  $u_k \in \mathbb{R}^n$  denota o vetor de controle de sincronização.  $A(\rho_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  representa a matriz dinâmica do sistema,  $B(\rho_k) \in \mathbb{R}^n$  é um termo afim,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz de saída e  $\rho_k \in \mathbb{R}^p$  o vetor de parâmetros, função do tempo.

O sincronismo é uma condição obtida quando sistemas dinâmicos descrevem, simultaneamente, uma trajetória comum no espaço de estados.

<sup>1</sup>Os subscritos ‘m’ e ‘e’ denotam os sistemas *mestre* e *escravo*, respectivamente.

Definindo o erro de sincronização como a diferença entre os estados dos sistemas mestre e escravo,  $\epsilon_k = X_k^m - X_k^e$ , e assumindo uma lei de controle  $u_k = L(\rho_k)(y_k^m - y_k^e)$ , onde  $L(\rho_k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  representa uma matriz de ganhos de sincronização, pode-se investigar a sincronização entre os sistemas mestre e escravo através do sistema de erro de sincronização usando a definição do erro de sincronismo:

$$\epsilon_{k+1} = (A(\rho_k) - L(\rho_k)C)\epsilon_k \quad (3)$$

A sincronização global entre os sistemas mestre e escravo é assegurada para qualquer estado inicial  $x_0^e$ , se a condição de convergência

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\epsilon_k\| = 0, \quad \forall \epsilon_0 \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

pode ser verificada, sendo que  $\|\cdot\|$  representa a norma Euclidiana.

A dificuldade em se estabelecer condições gerais para a solução do problema de sincronização global de sistemas caóticos tem conduzido as investigações neste tema a tratar sistemas de estrutura particular. Um sistema muito investigado na literatura para este propósito é o sistema Lur’e. Diversas abordagens como (Bowong et al., 2004), (Liao and Chen, 2003), (Suykens et al., 1999) e (Suykens et al., 1997) foram apresentadas para tratar da sua sincronização.

Nesta perspectiva, este trabalho contemplará investigações a cerca da sincronização de uma classe de sistemas Lur’e a tempo discreto que poderá ser representada através de descrições locais no espaço de estados. Esta descrição é adequada à aplicação de técnicas difundidas na Teoria de Controle Robusto. Considera-se que os sistemas não-lineares poderão ser representados em uma configuração linear por partes, onde o espaço de estados será particionado em  $N$  regiões  $R_i$  de modo que  $\bigcup_{i=1}^N R_i \subseteq \mathbb{R}^n$ . A cada instante de tempo  $k$  o vetor de estados  $x_k$  visitará uma região  $R_i$ , que estará associada a um único conjunto de matrizes constantes  $A_i$ ,  $B_i$  e  $L_i$ .

### 2.3 Sincronização Robusta $\mathcal{H}_\infty$

Considere um cenário onde o sistema mestre possa sofrer a interferência de sinais exógenos  $w_k \in \mathbb{R}^q$  em sua dinâmica e na saída medida:

$$\text{Mestre} \quad \begin{cases} x_{k+1}^m = A_i x_k^m + B_i + E_i w_k \\ y_k^m = C_i x_k^m + D_i w_k \end{cases} \quad (5)$$

onde  $E_i \in \mathbb{R}^{n \times q}$  e  $D_i \in \mathbb{R}^{m \times q}$  representam matrizes de ponderação.

Neste contexto ruidoso, a sincronização entre os sistemas mestre e escravo pode ter o seu desempenho degradado. Em um pior caso, a sincronização poderá ser inviabilizada em função da presença destes sinais exógenos.

A determinação de uma lei de controle  $u_k$  que garanta a sincronização entre os sistemas mestre e escravo e que seja robusta (insensível) a interferências ruidosas torna-se fundamental.

O teorema apresentado na sequência tratará do problema de sincronização de sistemas caóticos em um contexto ruidoso. Este teorema está fundamentado no conceito de estabilização robusta  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema de erro (3) reescrito como:

$$\text{Erro} \quad \begin{cases} \epsilon_{k+1} = (A_i - L_i C) \epsilon_k + (E_i - L_i D_i) w_k \\ z_k = \tilde{C} \epsilon_k + \tilde{D} w_k \end{cases} \quad (6)$$

sendo que  $z_k \in \mathbb{R}^r$  denota um vetor de ponderação do erro de sincronização e  $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  e  $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{r \times q}$  representam matrizes de ponderação.

O índice de desempenho robusto norma- $\mathcal{H}_\infty$  pode ser determinado através do limitante superior  $\gamma$  do ganho induzido  $\ell_2$  definido como:

$$\sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} < \gamma \quad (7)$$

onde  $\|\cdot\|_2$  corresponde à norma  $\ell_2$ .

Este ganho corresponde à razão entre a energia de um sinal de ponderação ‘ $z$ ’ associado à informação do erro de sincronização e à energia do sinal de distúrbios exógenos ‘ $w$ ’.

O problema de sincronização caótica pode ser formulado como um problema de estabilização robusta do sistema de erro de sincronização (6).

O teorema que se segue fornece condições suficientes para que as matrizes de ganho de sincronização  $L_i$  possam ser obtidas.

**Teorema 1** Considere o sistema de erro (6). Se existirem matrizes simétricas  $S_i \succ \mathbf{0}$ ,  $S_j \succ \mathbf{0}$ , matrizes  $V$  e  $F_i$  e um escalar  $\gamma > 0$  que solucionem o problema de otimização:

$$\begin{cases} \text{minimizar } \gamma \\ \text{s.a.:} \\ \begin{bmatrix} S_j - V^T - V & V A_i - F_i C_i & V E_i - F_i D_i \\ A_i^T V^T - C_i^T F_i^T & -S_i + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \tilde{D} \\ E_i^T V^T - D_i^T F_i^T & \tilde{D}^T \tilde{C} & -\gamma^2 \mathbf{I} + \tilde{D}^T \tilde{D} \end{bmatrix} \prec 0 \\ \forall (i, j) \in \{1 \cdots N\} \end{cases}$$

então o ganho de sincronização é dado por  $L_i = V^{-1} F_i$ . Além disso, o nível de atenuação de distúrbios  $\mathcal{H}_\infty$  da entrada  $w_k$  para a saída de ponderação do erro de sincronização  $z_k$ , corresponde ao valor  $\gamma$ .

**Demonstração:** Reescreva o sistema de erro (6) como:

$$\begin{cases} \epsilon_{k+1} = \tilde{A}_i \epsilon_k + \tilde{B}_i w_k \\ z_k = \tilde{C} \epsilon_k + \tilde{D} w_k \end{cases} \quad (8)$$

sendo  $\tilde{A}_i \equiv (A_i - L_i C_i)$ ,  $\tilde{B}_i \equiv (E_i - L_i D_i)$ .

Considere a função de Lyapunov dependente de parâmetro:

$$V(\epsilon_k, p) = \epsilon_k^T S_p \epsilon_k \quad (9)$$

com  $S_p \succ \mathbf{0}$ .

A estabilidade e o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema de erro (6) podem ser alcançados se o sinal da função quadrática:

$$V(\epsilon_{k+1}, j) - V(\epsilon_k, i) + z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k < 0 \quad (10)$$

pode ser verificado para todo  $(i, j) \in \{1 \cdots N\}$ ,  $\epsilon_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $w_k \in \mathbb{R}^m$  não-nulo e um dado nível  $\gamma$  de atenuação de distúrbios  $\mathcal{H}_\infty$ .

Aplicando (8) e (9) em (10) segue:

$$\begin{aligned} & (\tilde{A}_i \epsilon_k + \tilde{B}_i w_k)^T S_j (\tilde{A}_i \epsilon_k + \tilde{B}_i w_k) - \epsilon_k^T S_i \epsilon_k \\ & + z_k^T z_k - \gamma^2 w_k^T w_k < 0, \end{aligned} \quad (11)$$

que pode ser representado na notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_k \\ w_k \end{bmatrix}^T \Lambda \begin{bmatrix} \epsilon_k \\ w_k \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T S_j \tilde{A}_i - S_i + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{A}_i^T S_j \tilde{B}_i + \tilde{C}^T \tilde{D} \\ \tilde{B}_i^T S_j \tilde{A}_i + \tilde{D}^T \tilde{C} & \tilde{B}_i^T S_j \tilde{B}_i - \gamma^2 \mathbf{I} + \tilde{D}^T \tilde{D} \end{bmatrix}$$

Aplicando o Complemento de Schur em (12) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -S_j & S_j \tilde{A}_i & S_j \tilde{B}_i \\ \tilde{A}_i^T S_j & -S_i + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \tilde{D} \\ \tilde{B}_i^T S_j & \tilde{D}^T \tilde{C} & -\gamma^2 \mathbf{I} + \tilde{D}^T \tilde{D} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (13)$$

Definindo uma variável de relaxação  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $V = V^T = S_j$  (veja (de Oliveira and Skelton, 2002) para detalhes), e multiplicando (13) à esquerda e à direita pela transformação de similaridade  $\text{diag}\{V S_j^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$ , segue:

$$\begin{bmatrix} S_j - V^T - V & V A_i - V L_i C_i & V E_i - V L_i D_i \\ A_i^T V^T - C_i^T L_i^T V^T & -S_i + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{C}^T \tilde{D} \\ E_i^T V^T - D_i^T L_i^T V^T & \tilde{D}^T \tilde{C} & -\gamma^2 \mathbf{I} + \tilde{D}^T \tilde{D} \end{bmatrix} \prec 0$$

Por fim, procedendo com a mudança de variáveis linearizante:  $V L_i \rightsquigarrow F_i$ ; obtém-se as restrições matriciais do problema de otimização.  $\square$

**Nota 1:** Considerando que o problema de otimização pode ser reescrito como um problema convexo descrito por desigualdades matriciais lineares – LMIs (considere minimizar uma variável  $\delta \equiv \gamma^2$  e, posteriormente, fazer  $\gamma = \sqrt{\delta}$ ), o menor nível  $\gamma$  de atenuação de distúrbios  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser obtido.

### 3 Aplicação

Nesta seção serão apresentados resultados experimentais obtidos com a aplicação da abordagem desenvolvida neste trabalho para tratar da sincronização robusta  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas caóticos.

O problema de transmissão de informação será investigado com base na metodologia de projeto proposta e no princípio de transmissão de informação via controle - ITVC - apresentado em (Tôres and Aguirre, 2004).

Uma plataforma laboratorial denominada PCChua será considerada para a implementação dos experimentos de transmissão de informação. Para os detalhes construtivos e operacionais da plataforma PCChua veja (Tôres and Aguirre, 2005).

#### 3.1 Transmissão de Informação

Considere o mecanismo de transmissão de informação exibido na figura 1, composto de dois circuitos osciladores caóticos de Chua (Matsumoto, 1984) em um acoplamento unidirecional.

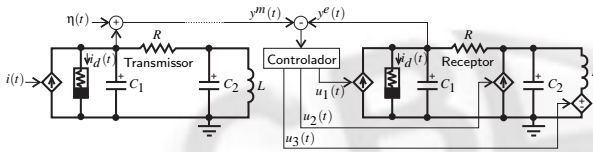


Figura 1: Sistema de comunicação unidirecional.

Neste mecanismo de transmissão, a informação a ser transmitida  $i(t)$  é injetada no circuito oscilador caótico de Chua nomeado ‘transmissor’, perturbando aditivamente o seu campo vetorial. Matematicamente, esta perturbação corresponde a uma modificação nas equações diferenciais que governam a dinâmica do sistema oscilador. Um sinal escalar  $y^m(t)$  é tomado como sinal a ser transmitido, servindo tanto para o propósito de transportar a informação, quanto para servir de referência para a sincronização do circuito de recepção. Este sinal poderá ser corrompido pela influência de ruídos  $\eta(t)$  no canal de transmissão.

O sistema transmissor pode ser representado matematicamente pelo seguinte conjunto de equações diferenciais que governam sua dinâmica:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_{C_1}(t)}{dt} = \frac{v_{C_2}(t) - v_{C_1}(t)}{R} - i_d(v_{C_1}(t)) + i(t) \\ C_2 \frac{dv_{C_2}(t)}{dt} = \frac{v_{C_1}(t) - v_{C_2}(t)}{R} + i_L(t) \\ L \frac{di_L(t)}{dt} = -v_{C_2}(t) - r_L i_L(t) \\ i_d(v_{C_1}) = m_0 v_{C_1} + \frac{(m_1 - m_0)(|v_{C_1} + B_p| - |v_{C_1} - B_p|)}{2} \\ y^m(t) = v_{C_1}(t) + \eta(t) \end{cases} \quad (14)$$

no qual  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $r_L$ ,  $m_0$ ,  $m_1$  e  $B_p$  são os parâmetros do circuito;  $i(t)$  é o sinal escalar de informação;

$y^m(t)$  é o sinal escalar correspondente a série temporal a ser transmitida e  $\eta(t)$  é o sinal de ruído que pode corromper o sinal transmitido.

O circuito nomeado ‘receptor’ compreende um circuito oscilador caótico de Chua completamente acessível para o controle através dos sinais  $u(t)$  do controlador.

Análogo ao transmissor, o sistema receptor tem sua dinâmica governada pelo seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\begin{cases} C_1^* \frac{dv_{C_1^*}(t)}{dt} = \frac{v_{C_2^*}(t) - v_{C_1^*}(t)}{R^*} - i_d^*(v_{C_1^*}(t)) + u_1(t) \\ C_2^* \frac{dv_{C_2^*}(t)}{dt} = \frac{v_{C_1^*}(t) - v_{C_2^*}(t)}{R^*} + i_L^*(t) + u_2(t) \\ L^* \frac{di_L^*(t)}{dt} = -v_{C_2^*}(t) - r_L^* i_L^*(t) + u_3(t) \\ i_d^*(v_{C_1^*}) = m_0^* v_{C_1^*} + \frac{(m_1^* - m_0^*)(|v_{C_1^*} + B_p^*| - |v_{C_1^*} - B_p^*|)}{2} \\ y^e(t) = v_{C_1^*}(t) \end{cases} \quad (15)$$

sendo que  $C_1^*$ ,  $C_2^*$ ,  $L^*$ ,  $R^*$ ,  $r_L^*$ ,  $m_0^*$ ,  $m_1^*$  e  $B_p^*$  compreendem os parâmetros do circuito receptor;  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  são sinais escalares de controle e  $y^e(t)$  é o sinal de saída medida do circuito receptor.

O princípio ITVC estabelece que qualquer controlador que garanta uma sincronização idêntica, ou quase-idêntica, entre os circuitos osciladores transmissor e receptor, pode ser visto como um circuito de demodulação para o sinal de informação que foi injetado na dinâmica do sistema transmissor. Desta forma, se o controlador garantir a sincronização dos sistemas transmissor e receptor, então o sinal de controle  $u_1(t)$  corresponderá ao sinal de informação  $i(t)$  demodulado através da ação de controle.

#### 3.2 Aplicação da Metodologia de Projeto

O primeiro passo da metodologia de projeto consiste na identificação dos parâmetros que caracterizam o sistema de comunicação mostrado na figura 1. Aplicando a abordagem apresentada em (Aguirre et al., 2005), onde os parâmetros dos sistemas são estimados recursivamente através de um algoritmo baseado no Filtro de Kalman Uncented – UKF, obteve-se os valores listados na tabela 1 para os parâmetros do circuito oscilador de Chua da plataforma PCChua.

Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores
$R$	1673Ω	$r_L$	0Ω
$C_1$	30.14μF	$m_0$	-0.365mS
$C_2$	185.66μF	$m_1$	-0.801mS
$L$	52.28H	$B_p$	1.74V

Tabela 1: Parâmetros estimados para o circuito oscilador da plataforma PCChua

O segundo passo da metodologia consiste na discretização dos sistemas transmissor (14) e receptor (15) e na representação do sistema de comunicação Fig. 1 como um esquema de sincronização robusta mestre-escravo.

Aplicando o método de discretização apresentado em (Mendes and Billings, 2002) chega-se a uma representação linear por partes. Esta representação descreve localmente a dinâmica dos circuitos osciladores de Chua através de três modelos lineares:

$$\begin{aligned} \text{Transmissor} \quad & \begin{cases} x_{k+1}^m = A_i x_k^m + B_i + \underbrace{E_i w_k}_{\mathfrak{u}(k)} \\ y_k^m = C_i x_k^m + D_i w_k \end{cases} \\ \text{Receptor} \quad & \begin{cases} x_{k+1}^e = A_i x_k^e + B_i + u_k \\ y_k^e = C_i x_k^e \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

onde as matrizes que caracterizam a dinâmica dos modelos locais assumem o formato:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 - T/(RC_1) - Tm_0/C_1 & T/(RC_1) & 0 \\ T/(RC_2) & 1 - T/(RC_2) & T/C_2 \\ 0 & -T/L & 1 - TrL/L \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1 - T/(RC_1) - Tm_1/C_1 & T/(RC_1) & 0 \\ T/(RC_2) & 1 - T/(RC_2) & T/C_2 \\ 0 & -T/L & 1 - TrL/L \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 1 - T/(RC_1) - Tm_0/C_1 & T/(RC_1) & 0 \\ T/(RC_2) & 1 - T/(RC_2) & T/C_2 \\ 0 & -T/L & 1 - TrL/L \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} \frac{+TB_p(m_1 - m_0)}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} \frac{-TB_p(m_1 - m_0)}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ E_i &= \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, D_i = 0.0001 \\ \tilde{C}_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{D}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Da aplicação do Teorema 1 ao sistema de sincronização mestre-escravo discretizado, considerando os valores dos parâmetros apresentados na tabela 1, tempo de amostragem  $T = 10$  ms, e um único ganho de sincronização para todo o espaço de estados ( $L_i = G, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ ), obtém-se:

$$G = [99.45 \times 10^{-3} \quad 2.93 \times 10^{-3} \quad 51.50 \times 10^{-9}]^T \quad (18)$$

que garante um nível de atenuação de distúrbios  $\mathcal{H}_\infty$   $\gamma = 9.70 \times 10^{-4}$ .

**Nota 2:** Ao considerar  $L_i = G, \forall i \in \{1, 2, 3\}$  na resolução do Teorema 1, a implementação da abordagem torna-se mais simples, dispensando a necessidade de transmissão do índice ‘i’, relativo ao modelo local, para o sistema receptor.

Os vetores de peso  $E_i$  e  $D_i$  foram definidos com base na amplitude do sinal de informação  $i(t)$  e na amplitude do sinal de ruído  $\eta(t)$  que corrompe o sinal transmitido  $y^m(t)$ . Observa-se que o termo  $\mathfrak{u}(k) = E_i w_k$

assume a posição do sinal de informação discretizado, ou seja,  $\mathfrak{u}(k) \equiv \frac{T}{C_1} i(kT)$ . Assim, no presente contexto de comunicação, o índice de desempenho robusto norma- $\mathcal{H}_\infty$  aparece como um mecanismo capaz de garantir uma maior proteção da informação e assegurar sua melhor reconstrução. Isto é possível, uma vez que a estabilização robusta  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema de erro de sincronização (6) tende a minimizar o efeito do sinal de entrada exógena  $w_k$  sobre o sinal de ponderação do erro de sincronização  $\varepsilon_k$ . Consequentemente, o sinal de informação  $i(t)$  tem sua influência minimizada sobre o sinal transmitido  $y^m(t)$  para sincronização do sistema receptor.

A matriz de ponderação  $\tilde{C}$  e o vetor de ponderação  $\tilde{D}$  foram convenientemente definidos de forma a se estabelecer as direções e intensidades na composição do sinal de ponderação do erro de sincronização  $z_k$ .

Para a implementação do mecanismo de comunicação na plataforma PCChua, o ganho de sincronização (18) deverá ser transformado de forma a incluir o efeito dos seguradores de ordem zero dos atuadores e para que se tenha sinais de compensação compatíveis com o sistema (15). Desta forma, os ganhos de sincronização do PCChua serão:

$$G^{PCChua} = \begin{bmatrix} 2.99 \times 10^{-3} \\ 0.54 \times 10^{-3} \\ 2.69 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} C_1 G_1 / T \\ C_2 G_2 / T \\ LG_3 / T \end{bmatrix} \quad (19)$$

### 3.3 Resultados Práticos

Considerando um sinal de informação  $i(t)$  resultante da adição de um sinal senoidal, um sinal quadrado e um sinal dente de serra, todos com amplitude de 0.12 mV e frequências de 0.4 Hz, 1.0 Hz e 1.5 Hz, respectivamente, procedeu-se um experimento de transmissão de informação na plataforma PCChua.

A figura 2 exibe o sinal transmitido pelo circuito oscilador mestre (transmissor) para a sincronização com o circuito oscilador escravo (receptor). O sinal de informação  $i(t)$  foi injetado entre os instantes de tempo de 30 a 90 segundos. O sinal de erro de sincronização  $y^m(t) - y^e(t)$  e o sinal de controle  $u_1(t)$  são exibidos nas figuras Fig. 3 e Fig. 4, respectivamente. O sinal de controle foi ativado entre os instantes de tempo de 15 a 105 segundos. A recuperação de informação pelo princípio ITVC é evidenciada na figura 5 que mostra, em sobreposição, os sinais de informação e de controle para uma janela de tempo de 75 a 95 segundos.

## 4 Conclusões

Este trabalho centrou-se na investigação do problema de sincronização de sistemas caóticos com base em técnicas da Teoria Controle Robusto.

Uma metodologia de projeto sistemática foi proposta para tratar da sincronização de uma classe de sistemas de Lur’e a tempo discreto que pode assumir uma representação linear por partes.

Para tratar da sincronização robusta  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas caóticos, uma abordagem em formulação por desigualdades matriciais lineares - LMIs foi desenvolvida.

Resultados experimentais foram apresentados evidenciando a efetividade da metodologia de projeto proposta.

#### Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do CNPq, FAPEMIG e PUC Minas.

#### Referências

- Aguirre, L. A., Teixeira, B. O. S. and Tôrres, L. A. B. (2005). Using data-driven discrete-time models and unscented Kalman filter to estimate unobserved variables of nonlinear systems, *Physical Review E* **72**(2).
- Bowong, S., Kakmeni, F. M. M. and Koina, R. (2004). A new synchronization principle for a class of Lur'e systems with applications in secure communication, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **14**(7): 2477–2491.
- de Oliveira, M. C. and Skelton, R. E. (2002). On stability tests for linear systems, *Proceedings of the 15th IFAC Triennial World Congress*, Barcelona, Spain.
- Ji, Y., Wen, C. Y. and Li, Z. G. (2006). Impulsive synchronization of chaotic systems via linear matrix inequalities, *International Journal of Bifurcations and Chaos* **16**(1): 221–227.
- Jiang, G.-P. and Zheng, W. X. (2004). An LMI criterion for chaos synchronization via the linear-state-feedback approach, *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei, Taiwan, pp. 1433–1438.
- Liao, X. and Chen, G. (2003). Chaos synchronization of general Lur'e systems via time-delay feedback control, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **13**(1): 207–213.
- Matsumoto, T. (1984). A chaotic attractor from Chua's circuit, *IEEE Transactions on Circuits & Systems* **CAS-31**(12): 1055–1058.
- Mendes, E. M. A. M. and Billings, S. A. (2002). A note on discretization of nonlinear differential equations, *Chaos* **12**(1): 66–71.
- Millerioux, G. and Daafouz, J. (2001). Global chaos synchronization and robust filtering in noisy context, *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications* **48**(10): 1170–1176.
- Millerioux, G. and Daafouz, J. (2003). Polytopic observer for global synchronization of systems with output measurable nonlinearities, *International Journal of Bifurcations and Chaos* **13**(3): 703–712.
- Pecora, L. M. and Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems, *Physical Review Letters* **64**(8): 821–824.
- Pecora, L. M., Carroll, T. L., Johnson, G. A. and Mar, D. J. (1997). Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts and applications, *Chaos* **7**(4): 520–543.
- Sitz, A., Schwarz, U. and Kurths, J. (2004). The unscented Kalman filter, a powerful tool for data analysis, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **14**(6): 2093–2105.
- Suykens, J. A. K., Curran, P. F. and Chua, L. O. (1999). Robust synthesis for master-slave synchronization of Lur'e systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I* **46**(7): 841–850.
- Suykens, J. A. K., Curran, P. F., Vandewalle, J. and Chua, L. O. (1997). Robust nonlinear  $\mathcal{H}_\infty$  synchronization of chaotic Lur'e systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I* **44**(10): 891–904.
- Tôrres, L. A. B. and Aguirre, L. A. (2004). Transmitting information by controlling nonlinear oscillators, *Physica D - Nonlinear Phenomena* **196**(3-4): 387–406.

Tôrres, L. A. B. and Aguirre, L. A. (2005). Peccha - A laboratory setup for real-time control and synchronization of chaotic oscillations, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **15**(8): 2349–2360.

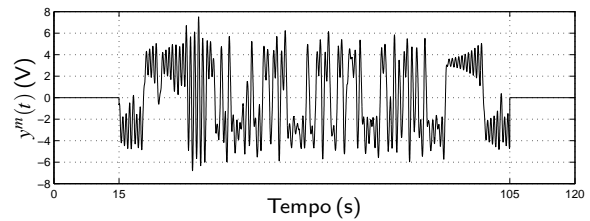


Figura 2: Sinal transmitido

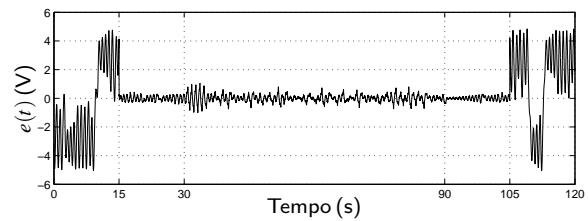


Figura 3: Sinal de erro:  $y^m(t) - y^e(t)$

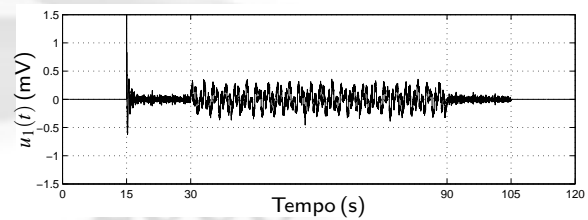
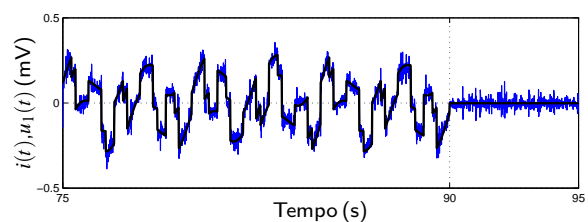
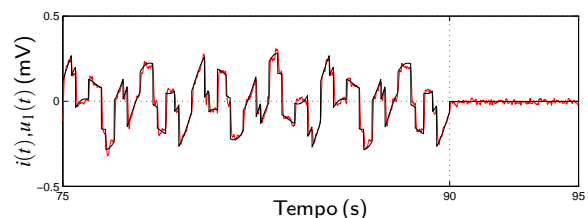


Figura 4: Sinal de controle: componente  $u_1(t)$



(a) Sinal de informação  $i(t)$  - preto; Sinal de controle  $u_1(t)$  - azul



(b) Sinal de informação  $i(t)$  - preto; Sinal de controle filtrado  $u_1(t)$  - vermelho

Figura 5: Informação recuperada sem filtragem (a) e com filtragem (b) (Filtro Butterworth: ordem 2,  $f_c = 10$  Hz)