

CONDIÇÕES LMIS ALTERNATIVAS PARA SISTEMAS TAKAGI-SUGENO VIA FUNÇÃO DE LYAPUNOV FUZZY

GUSTAVO S. C. DE AVELLAR*, LEONARDO A. MOZELLI*, REINALDO M. PALHARES †*

**Universidade Federal de Minas Gerais*

Emails: {gustavoavellar, mozelli, palhares}@cpdee.com.br

Abstract— This paper presents a systematic approach to reduce conservatism in the stability analysis and control design based on fuzzy Lyapunov functions. The technique consists in decouple the Lyapunov matrices from the system matrices introducing extra degrees of freedom. Another benefit provided by this approach is to establish, in a straightforward way, control design completely based on Linear Matrix Inequalities (LMIs).

Keywords— fuzzy Lyapunov function, Takagi-Sugeno (TS) fuzzy model, linear matrix inequalities (LMIs), fuzzy control

Resumo— Neste trabalho é apresentado um método sistemático para reduzir o conservadorismo presente na análise de estabilidade e na síntese de controladores baseados em funções de Lyapunov fuzzy. A técnica consiste em desacoplar as matrizes de Lyapunov das matrizes do sistema introduzindo novos graus de liberdade. Outro benefício deste método é permitir obter uma estratégia de controle baseada completamente em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs).

Palavras-chave— função de Lyapunov fuzzy, modelagem fuzzy Takagi-Sugeno (TS), desigualdades matriciais lineares (LMIs), controle fuzzy

1 Introdução

Tradicionalmente a análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS) (Takagi e Sugeno, 1985) têm sido baseadas na busca de uma função de Lyapunov quadrática (FLQ), condições propostas inicialmente por Tanaka e Sugeno (1992). Essas condições podem ser reescritas como desigualdades matriciais lineares (LMIs, Linear Matrix Inequalities), que podem ser resolvidas utilizando pacotes especializados para a solução de problemas de otimização convexa (Gahinet et al., 1995; Löfberg, 2004). Essa característica torna atrativo o desenvolvimento de procedimentos para checar a estabilidade e projetar controladores fuzzy para sistemas TS (Wang et al., 1996). No entanto, este procedimento convencional, pode eventualmente não ser factível, especialmente no caso de um grande número de regras (Tanaka et al., 1998) ou devido ao conservadorismo embutido na análise. Devido a estas dificuldades, inúmeras condições de estabilidade mais relaxadas para serem utilizadas em conjunto com a FLQ foram propostas na Literatura (Teixeira et al., 2003; Fang et al., 2006; Mozelli et al., 2007).

Em certas ocasiões, uma única função de Lyapunov não é suficiente para a verificar a estabilidade do sistema TS, mesmo para um número de regras pequeno. Uma forma de contornar este problema é encontrar uma FLQ para partições do espaço de estados que combinadas garantem a estabilidade global do sistema (Cao et al., 1997; Johansson et al., 1999; Wang e Sun, 2005). Essa abordagem é chamada de função de Lyapunov por partes (FLP).

Um outro tipo de função de Lyapunov, de-

envolvida por exemplo por Tanaka et al. (2003) e chamada função de Lyapunov fuzzy (FLF), consiste na combinação fuzzy de várias FLQ. Esse tipo de abordagem ajuda a contornar um dos problemas encontrados nas FLP, que é a possibilidade de haver descontinuidades nas fronteiras das partições. Isso ocorre pois a FLF é composta por uma interpolação suave de uma quantidade de FLQs igual ao número de regras do modelo TS. Um dos problemas encontrados por Tanaka et al. (2003) é a presença da derivada temporal das funções de pertinência na derivada temporal das funções de Lyapunov fuzzy. Para reescrever as condições de estabilidade no formato de LMIs é preciso escolher um limite superior para essa derivada, o que leva a um certo conservadorismo. Outro problema dessa abordagem é o fato que as condições de estabilização são escritas na forma de desigualdades matriciais bilineares (BMI, Bilinear Matrix Inequalities), e reescritas como LMIs através de um artifício de completar quadrados, que pode introduzir algum grau de conservadorismo, além de requerer o ajuste de alguns parâmetros escalares. Por fim, este método requer ainda, que a derivada temporal das funções de pertinência seja computada em tempo real durante a ação de controle.

Para contornar estes problemas, Rhee e Won (2006) propõem uma FLF alternativa cuja diferenciação no tempo não depende das funções de pertinência e pode levar a condições de estabilidade e estabilização menos conservadoras que em (Tanaka et al., 2003). Apesar da análise de estabilidade em (Rhee e Won, 2006) ser feita através de LMIs, a síntese de controladores no entanto é obtida por meio de uma descrição por BMIs. O procedimento apresentado para resolve-las é baseado

em um algoritmo com diversos passos e inclui a escolha de alguns parâmetros para a convergência, o que torna a sua repetibilidade difícil.

Neste artigo, um dos principais objetivos é reduzir o conservadorismo encontrado em (Rhee e Won, 2006). Isto é feito através de uma abordagem sistemática para relaxar as condições de estabilidade e estabilização de sistemas fuzzy contínuos. São introduzidas novas variáveis matriciais de relaxação que permitem o desacoplamento das matrizes de Lyapunov das matrizes do sistema. Este tipo de estratégia foi utilizada com êxito no contexto de sistemas com retardo no tempo (Souza et al., 2007; Souza et al., 2008b; Souza et al., 2008a). Então, as grandes contribuições da estratégia proposta são a redução no conservadorismo das condições de estabilidade em (Rhee e Won, 2006) e, principalmente, permitir obter uma nova estratégia mais relaxada completamente baseada em LMIs para o projeto de controladores, ao contrário da abordagem BMI apresentada por Rhee e Won (2006). Em (Mozelli et al., 2008) uma solução análoga é proposta para reduzir o conservadorismo presente em (Tanaka et al., 2003).

Notação: O sobre-escrito “ T ” indica a matriz transposta; o sobre-escrito “ $-T$ ” indica a inversa da matriz transposta; a notação “ $*$ ” é usada para substituir termos transpostos em uma matriz simétrica; já $diag(\cdot)$ indica uma matriz diagonal. Para maior simplificação adota-se:

$$\sum_{i < j}^3 h_{ij} \Leftrightarrow h_{12} + h_{13} + h_{23}.$$

2 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno

Considere o seguinte modelo fuzzy TS para sistemas dinâmicos não-lineares contínuos Rhee e Won (2006):

REGRA i :

$$\text{SE} \quad x_1(t) \text{ é } M_1^{\alpha_{i1}} \text{ e } x_n(t) \text{ é } M_n^{\alpha_{in}} \quad (1)$$

$$\text{ENTÃO} \quad \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$$

Para este modelo, os estados $x(t)$ são escolhidos como variáveis premissas. Note que α_{ij} determina qual conjunto fuzzy, dentro daqueles baseados na variável premissa $x_j(t)$, será utilizado no antecedente da i -ésima regra. Para maiores detalhes desta notação, veja o trabalho de Rhee e Won (2006). O modelo inferido a partir de (1) é:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \beta_i(x(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (2)$$

onde $\beta_i(x(t))$ são as funções de pertinência nor-

malizadas da seguinte forma:

$$0 \leq \beta_i(x(t)) \leq 1, \sum_{i=1}^r \beta_i(z(t)) = 1, (i = 1, 2, \dots, r) \quad (3)$$

A função de Lyapunov fuzzy candidata utilizada neste artigo é dada por (Rhee e Won, 2006):

$$V(x(t)) = 2 \int_{\Gamma(0,x)} f(\psi) \cdot d\psi, \quad (4)$$

onde $\Gamma(0, x)$ é o caminho da origem até o estado atual e $d\psi$ é um vetor de deslocamento infinitesimal. A função $f(x(t))$ é um vetor fuzzy, parametrizado de acordo com as mesmas regras que (3):

$$f(x(t)) = \sum_{i=1}^r \beta_i(x(t)) P_i x(t). \quad (5)$$

Nota 1 P_i é definido da mesma forma que em (Rhee e Won, 2006). Isto é, as matrizes P_i têm a forma especial:

$$P_i \triangleq D_0 + D_i, \quad (6)$$

sendo

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{12} & 0 & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & d_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_i = \begin{bmatrix} d_{11}^{\alpha_{i1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^{\alpha_{i2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^{\alpha_{in}} \end{bmatrix}.$$

Esta notação indica que somente os elementos de D_i (elementos da diagonal de P_i) mudam com as regras fuzzy. Os elementos da diagonal são alterados de acordo com os conjuntos fuzzy na premissa da regras SE-ENTÃO. Se uma variável premissa pertencer ao mesmo conjunto fuzzy em regras distintas, então os elementos da diagonal relativos àquela variável serão iguais. Contudo, seja $x_j(t)$ pertencente a conjuntos distintos nas regras k e l . Os j -ésimos elementos da diagonal de D_k e D_l (quais sejam $d_{jj}^{\alpha_{kj}}$ e $d_{jj}^{\alpha_{lj}}$) serão diferentes.

Nota 2 Rhee e Won (2006) demonstraram que (4) é uma função de Lyapunov se as matrizes P_i possuem a estrutura apresentada em (6).

3 Novas Condições de Estabilidade

As novas condições de estabilidade para sistemas TS contínuos serão enunciadas através do Teorema abaixo. Estas condições visam reduzir o conservadorismo apresentado em (Rhee e Won, 2006).

Teorema 1 *O sistema fuzzy contínuo (2) é estável se existirem matrizes P_i simétricas, e matrizes M_1 e M_2 quaisquer, que satisfaçam as seguintes LMIs:*

$$P_i \succ 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (7)$$

$$\Theta_i \prec 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (8)$$

onde

$$\Theta_i \triangleq \begin{bmatrix} -M_1 A_i - A_i^T M_1^T & * \\ P_i - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Prova: Encontra-se no Apêndice. \square

4 Exemplo de Análise de Estabilidade

O exemplo a seguir é utilizado para demonstrar como as condições propostas reduzem o conservadorismo presente em abordagens baseadas em FLQ (Tanaka e Sugeno, 1992; Tanaka et al., 1998; Teixeira et al., 2003; Fang et al., 2006) e também aquelas baseadas em FLF (Rhee e Won, 2006). Neste exemplo, o sistema analisado possui três regras

$$\begin{aligned} R_1 : & \text{ SE } x_1(t) \text{ é } M_1^1 \text{ ENTÃO } \dot{x}(t) = A_1 x(t) \\ R_2 : & \text{ SE } x_1(t) \text{ é } M_1^2 \text{ ENTÃO } \dot{x}(t) = A_2 x(t) \\ R_3 : & \text{ SE } x_1(t) \text{ é } M_1^3 \text{ ENTÃO } \dot{x}(t) = A_3 x(t) \end{aligned}$$

As matrizes locais são dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.00 & a \\ -0.06 & -1.00 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 \\ -1.94 & -1.00 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.00 & b \\ -0.50 & -1.50 \end{bmatrix}.$$

As matrizes de Lyapunov para este exemplo devem ser montadas da seguinte forma:

$$P_1 = \begin{bmatrix} d_{11}^1 & p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} d_{11}^2 & p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} d_{11}^3 & p_{21} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

pois há apenas uma variável premissa $x_1(t)$ que pertence a um conjunto diferente em cada uma das regras.

Os intervalos onde a estabilidade foi analisada são $a \in [-0.5, 5]$ e $b \in [-1, 7]$.

A Figura 1 exibe o resultado obtido através das abordagens baseadas em FLQ (Tanaka e Sugeno, 1992; Tanaka et al., 1998; Teixeira et al., 2003; Fang et al., 2006), onde os pares de parâmetros a e b assinalados com círculos representam sistemas estáveis. A Figura 2 exibe os resultados obtidos através das abordagens baseadas em FLF, sendo que os pares de parâmetros assinalados por círculos representam o resultado obtido por Rhee e Won (2006) e os pares de parâmetros

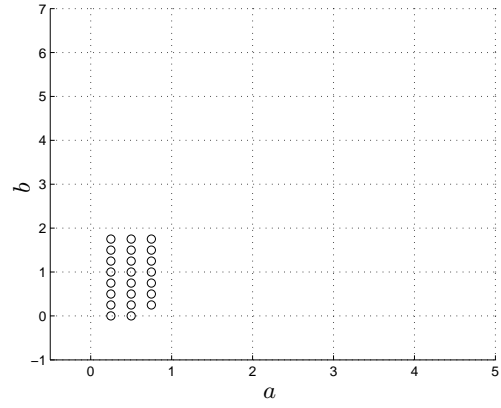


Figura 1: Área de estabilidade gerada pelas abordagens baseadas em função de Lyapunov quadrática.

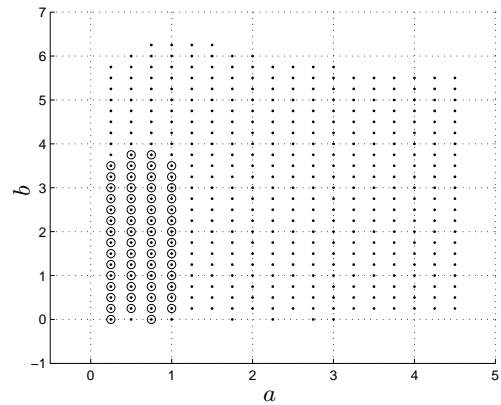


Figura 2: Regiões de estabilidade geradas pelas abordagens baseadas em função de Lyapunov fuzzy.

assinalados por pontos representam o resultado do Teorema 1.

É fácil constatar, através das Figuras 1 e 2 que as abordagens através de FLQ são mais conservadoras que as abordagens baseadas em FLF. Particularmente analisando a Figura 2, nota-se facilmente que a abordagem proposta neste artigo e apresentada no Teorema 1 é bem menos conservadora que a abordagem proposta por Rhee e Won (2006).

5 Novas Condições para Síntese de Controladores Fuzzy

Nesta seção será apresentado um novo procedimento baseado em LMIs para a síntese de controladores fuzzy. É utilizado o conceito de compensação paralela distribuída (CPD) (Tanaka e Sugeno, 1992; Tanaka et al., 1998; Teixeira et al., 2003; Fang et al., 2006; Rhee e Won, 2006), em que o controlador baseia-se no mesmo conjunto de regras (1) do modelo TS (2):

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \beta_i(x(t)) F_i x(t), \quad (10)$$

onde $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são os ganhos locais.

Considerando a realimentação de estados (10), o modelo TS (2) em malha fechada é descrito da forma:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \beta_i(x(t)) \beta_j(x(t)) \{A_i - B_i F_j\} x(t). \quad (11)$$

O próximo Teorema apresenta um procedimento para síntese de controladores que é inteiramente baseado em LMIs, ao contrário do procedimento apresentado por Rhee e Won (2006), que é baseado em BMIs. Esse Teorema apresenta condições suficientes para obtenção dos ganhos F_i para estabilização do sistema em malha fechada (11).

Teorema 2 *Considere um escalar $\mu > 0$ dado. O sistema (11) é estabilizável via o controlador (10), com ganhos locais dados por $F_i = S_i^T R^{-T}$, se existirem matrizes simétricas T_i , matrizes R , S_i quaisquer tais que as LMIs abaixo sejam factíveis:*

$$T_i \succ 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (12)$$

$$\tilde{\Theta}_{ii} \prec 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (13)$$

$$\bar{\Theta}_{ij} \prec 0 \quad (i < j, i, j = 1, 2, \dots, r), \quad (14)$$

sendo

$$\tilde{\Theta}_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{11}^{ij} & * \\ \tilde{\theta}_{21}^{ij} & \tilde{\theta}_{22}^{ij} \end{bmatrix}, \quad \bar{\Theta}_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{11}^{ij} & * \\ \bar{\theta}_{21}^{ij} & \bar{\theta}_{22}^{ij} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Theta}_{11}^{ij} \triangleq -A_i R^T - R A_i^T + B_i S_j^T + S_j B_i^T$$

$$\tilde{\Theta}_{21}^{ij} \triangleq T_i - \mu (A_i R^T - B_i S_j^T) + R$$

$$\tilde{\Theta}_{22}^{ij} \triangleq \mu (R + R^T)$$

$$\bar{\Theta}_{11}^{ij} \triangleq \tilde{\theta}_{11}^{ij} + \tilde{\theta}_{11}^{ji},$$

$$\bar{\Theta}_{21}^{ij} \triangleq \tilde{\theta}_{21}^{ij} + \tilde{\theta}_{21}^{ji},$$

$$\bar{\Theta}_{22}^{ij} \triangleq \tilde{\theta}_{22}^{ij} + \tilde{\theta}_{22}^{ji}$$

Prova: Encontra-se no Apêndice. \square

6 Exemplo de Controle

Seja um sistema fuzzy TS formado por duas regras:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 2 \end{bmatrix}.$$

cujas funções de pertinência são:

$$h_1(x_1(t)) = \begin{cases} [1 - \sin(x_1(t))]/2 & \text{se } |x_1(t)| \leq \pi/2, \\ 0 & \text{se } x_1(t) > \pi/2, \\ 1 & \text{se } x_1(t) < -\pi/2 \end{cases}$$

$$h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t)).$$

O vetor de estados é dado por $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$ com a variável premissa sendo apenas $x_1(t)$. O objetivo deste exemplo é obter os ganhos do controlador fuzzy via CPD para que o sistema seja estável com os parâmetros $a = 2$ e $b = 1$. Os ganhos obtidos através da aplicação do Teorema 2 foram:

$$F_1 = [-2, 3117 \quad 11, 8192]^T,$$

$$F_2 = [-2, 3396 \quad 10, 3267]^T.$$

As matrizes de Lyapunov obtidas foram:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 30, 1806 & -65, 0050 \\ -65, 0050 & 207, 3002 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 23, 3648 & -65, 0050 \\ -65, 0050 & 207, 3002 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3 mostra o retrato de fases do sistema em malha fechada. Note que na Figura 3 as setas convergem para um ponto de equilíbrio, no caso, a origem, então o controlador projetado via Teorema 2 estabiliza o sistema em malha fechada.

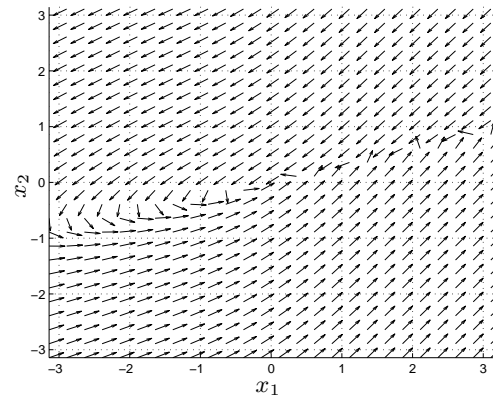


Figura 3: Diagrama de fase do sistema em malha fechada gerado pela abordagem proposta no Teorema 2.

7 Conclusões

Neste artigo foi proposto um método sistemático para reduzir o conservadorismo presente em abordagens apresentadas na Literatura. Além de atingir este objetivo, foi possível obter uma nova estratégia mais relaxada e completamente baseada em LMIs para o projeto de controladores, ao contrário da estratégia FLF baseadas em BMIs.

8 Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro do CNPq e da FAPEMIG.

A Apêndice

Nesta seção será utilizada a seguinte notação:

$$\beta_i(x(t)) \Leftrightarrow \bar{\beta}_i, \quad x(t) \Leftrightarrow \bar{x}$$

A relaxação das condições de estabilidade e síntese de controladores encontradas ao longo deste texto se deve à aplicação do termo nulo adaptado a sistemas TS, apresentado a seguir e utilizado com sucesso em outro contexto em Souza et al. (2007):

$$2[\bar{x}^T M_1 + \dot{\bar{x}}^T M_2] \times \left[\dot{\bar{x}} - \sum_{i=1}^r \bar{\beta}_i A_i \bar{x} \right] = 0 \quad (15)$$

Prova: [Teorema 1] Considere (7) e assuma (5) como a função de Lyapunov candidata. Aplicando a derivada de Lie:

$$\dot{V}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^r \bar{\beta}_i \{ \bar{x}^T P_i \dot{\bar{x}} + \dot{\bar{x}}^T P_i \bar{x} \} \quad (16)$$

Adicionando (15) em (16) e utilizando o vetor a seguir:

$$\xi(t) \triangleq [\bar{x}^T \quad \dot{\bar{x}}^T]^T, \quad (17)$$

obtem-se:

$$\dot{V}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^r \bar{\beta}_i \xi^T \Theta_i \xi, \quad (18)$$

sendo Θ_i definido em (9). Se (8) é satisfeita, então $\dot{V}(\bar{x}) < 0$. Portanto, conclui-se da teoria de Lyapunov que a estabilidade é garantida. \square

Prova: [Teorema 2] O resultado do Teorema 1 será utilizado como ponto de partida. Considere (18) e substitua os termos A_i em (9) pelas matrizes em malha fechada $A_i - B_i F_j$. Assim, (18) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \bar{\beta}_i \bar{\beta}_j \xi^T \Lambda_{ij} \xi \\ &= \sum_{i=1}^r \bar{\beta}_i^2 \xi^T \Lambda_{ii} \xi + \sum_{i < j} \bar{\beta}_i \bar{\beta}_j \xi^T (\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}) \xi, \end{aligned} \quad (19)$$

onde

$$\Lambda_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{ij} & * \\ \lambda_{21}^{ij} & \lambda_{22}^{ij} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{ij} &\triangleq -M_1(A_i - B_i F_j) - (A_i - B_i F_j)^T M_1^T, \\ \lambda_{21}^{ij} &\triangleq T_i - M_2(A_i - B_i F_j) + M_1^T, \\ \lambda_{22}^{ij} &\triangleq (M_2 + M_2^T). \end{aligned} \quad (21)$$

Considere agora o caso particular em que $M_1 = M$ e $M_2 = \mu M$, μ sendo um escalar. Pré

e pós-multiplicando (19) pelas matrizes não singulares $\text{diag}(M^{-1}, M^{-1})$ e $\text{diag}(M^{-T}, M^{-T})$, respectivamente, tem-se:

$$\dot{V}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^r \bar{\beta}_i^2 \xi^T \Gamma_{ii} \xi + \sum_{i < j} \bar{\beta}_i \bar{\beta}_j \xi^T (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) \xi, \quad (22)$$

onde

$$\Gamma_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} \gamma_{11}^{ij} & * \\ \gamma_{21}^{ij} & \gamma_{22}^{ij} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^{ij} &\triangleq -(A_i - B_i F_i) M^{-T} - M^{-1} (A_i - B_i F_i)^T, \\ \gamma_{21}^{ij} &\triangleq M^{-1} T_i M^{-T} - \mu (A_i - B_i F_i) M^{-T} + M^{-1}, \\ \gamma_{22}^{ij} &\triangleq \mu (M^{-T} + M^{-1}). \end{aligned} \quad (24)$$

A imposição $M_2 + M_2^T \prec 0$ na diagonal de (8) garante que M_2 não é singular, por isso é possível obter (22). Para garantir a estabilidade de (11) é necessário que $\Gamma_{ii} \prec 0$ e $(\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) \prec 0$. Para converter essas inequações em LMIs, as mudanças de variável linearizantes a seguir são empregadas:

$$R \triangleq M^{-1}, \quad T_i \triangleq R P_i R^T, \quad S_j \triangleq R F_j^T. \quad (25)$$

Uma transformação de congruência também deve ser aplicada à desigualdade (12), pré e pós-multiplicando-a por M^{-1} e M^{-T} , respectivamente, e aplicando em seguida (25). Dessa forma, as LMIs (12) a (14) serão obtidas. Por fim, caso as LMIs (13) e (14) sejam satisfeitas, garante-se que o sistema TS em malha fechada (11) será assintoticamente estável e os ganhos estabilizantes serão dados por $F_i = S_i^T R^{-T}$. \square

Nota 3 Introduzir o escalar μ na demonstração do Teorema 2 se faz necessário para que (12)-(14) se tornem LMIs. Este escalar pode ser considerado como um parâmetro de ajuste, cuja escolha determina se o conjunto de LMIs será factível. Este escalar pode ser dado a priori ou obtido de forma sistemática utilizando algum método de busca unidimensional.

Referências

- Cao, S. G., Rees, N. W. e Feng, G. (1997). Analysis and design for a class of complex control systems part II: Fuzzy controller design, *Automatica* **33**(6): 1017–1028.
- Fang, C.-H., Liu, Y.-S., Kau, S.-W., Hong, L. e Lee, C.-H. (2006). A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **14**(3): 386–397.

- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. e Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox User's Guide*, 1 edn, The MathWorks Inc.
- Johansson, M., Rantzer, A. e Årzén, K.-E. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **7**(8): 713–722.
- Löfberg, J. (2004). Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan.
- Mozelli, L. A., Campos, C. D., Palhares, R. M., Tôrres, L. A. B. e Mendes, E. M. A. M. (2007). Chaotic synchronization and information transmission experiments: A fuzzy relaxed \mathcal{H}_∞ control approach, *Circ. Syst. Signal Process.* **26**(4): 427–449.
- Mozelli, L. A., Palhares, R. M. e de Avellar, G. S. C. (2008). Novas condições de estabilidade e de estabilização para sistemas Takagi-Sugeno baseadas na função de Lyapunov fuzzy, *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA'2008*, Juiz de Fora, MG, Brasil.
- Rhee, B.-J. e Won, S. (2006). A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design, *Fuzzy Set. Syst.* **157**(9): 1211–1228.
- Souza, F. O., Palhares, R. M. e Ekel, P. Y. (2007). Asymptotic stability analysis in uncertain multi-delayed state neural networks via Lyapunov-Krasovskii theory, *Math. Comput. Model.* **45**(11-12): 1350–1362.
- Souza, F. O., Palhares, R. M., Mendes, E. M. A. M. e Tôrres, L. A. B. (2008a). Further results on master-slave synchronization of general Lur'e systems with time-varying delay, *Int. J. Bifurcat. Chaos Appl. Sci. Eng.* **18**(1): 187–202.
- Souza, F. O., Palhares, R. M., Mendes, E. M. A. M. e Tôrres, L. A. B. (2008b). Robust \mathcal{H}_∞ control for master-slave synchronization of Lur'e systems with time-delay feedback control, *Int. J. Bifurcat. Chaos Appl. Sci. Eng.* **18**(4): 1161–1173.
- Takagi, T. e Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* **15**(1): 116–132.
- Tanaka, K., Hori, T. e Wang, H. O. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(4): 528–529.
- Tanaka, K., Ikeda, T. e Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **6**(2): 250–264.
- Tanaka, K. e Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems, *Fuzzy Set. Syst.* **45**(2): 135–156.
- Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Avellar, R. G. (2003). On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(5): 613–623.
- Wang, H. O., Tanaka, K. e Griffin, M. F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **4**(1): 14–23.
- Wang, W.-J. e Sun, C.-H. (2005). Relaxed stability and stabilization conditions for a T-S fuzzy discrete system, *Fuzzy Sets and Systems* **156**: 208–225.