

# NOVAS CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE E DE ESTABILIZAÇÃO PARA SISTEMAS TAKAGI-SUGENO BASEADAS NA FUNÇÃO DE LYAPUNOV FUZZY

LEONARDO A. MOZELLI\*, REINALDO M. PALHARES\*, GUSTAVO S. C. DE AVELLAR\*

\**Departamento de Engenharia Eletrônica - Universidade Federal de Minas Gerais*

Emails: {mozelli, palhares, gustavoavellar}@cpdee.ufmg.br

**Abstract**— This paper addresses the stability analysis and controller design problems for continuous Takagi-Sugeno fuzzy systems via the fuzzy Lyapunov function and Linear Matrix Inequalities (LMIs). The main goal is to reduce the conservatism in earlier approaches by applying a systematic technique which allows to decouple the system matrices from the Lyapunov matrices, introducing new degree of freedom. Besides the improvement for stability conditions, other benefit provided by this approach is to attain a fuzzy controller design entirely based on LMIs.

**Keywords**— fuzzy Lyapunov function, Takagi-Sugeno (TS) fuzzy model, Linear Matrix Inequalities (LMIs), fuzzy control

**Resumo**— Este trabalho aborda questões de análise de estabilidade e de síntese de controladores em sistemas fuzzy Takagi-Sugeno contínuos segundo a função de Lyapunov fuzzy e desigualdades matriciais lineares (LMIs). O objetivo é reduzir o conservadorismo presente em abordagens anteriores por meio de uma técnica sistemática que permite o desacoplamento das matrizes do sistema com relação às matrizes de Lyapunov, introduzindo novos graus de liberdade. Além da melhoria nas condições de estabilidade, outra contribuição promovida por essa abordagem é a formulação de um procedimento de síntese de controladores fuzzy completamente baseado em LMIs.

**Palavras-chave**— função de Lyapunov fuzzy, modelagem fuzzy Takagi-Sugeno (TS), desigualdades matriciais lineares (LMIs), controle fuzzy

## 1 Introdução

O grande interesse pela abordagem fuzzy Takagi-Sugeno (TS) (Takagi e Sugeno, 1985) para modelagem e controle de sistemas dinâmicos não-lineares, justifica-se pela conciliação da flexibilidade da lógica fuzzy com o formalismo matemático presente na teoria de sistemas lineares e não-lineares. Segundo esse método de inferência, um conjunto de regras fuzzy aproxima uma dinâmica não-linear global como uma combinação de modelos lineares, tomados localmente e interpolados através de funções de pertinência.

A abordagem padrão para análise de estabilidade e síntese de controladores para sistemas TS consiste em escolher uma função de Lyapunov quadrática (FLQ) que verifica certas condições suficientes, apresentadas originalmente em (Tanaka e Sugeno, 1992). Todavia, em (Tanaka e Sugeno, 1992) não há um procedimento construtivo para síntese de controladores, mas uma estratégia que consiste em projetar ganhos para os modelos locais e verificar, segundo algum critério, a estabilidade do sistema global em malha fechada. Com o advento de técnicas eficientes de otimização convexa e a possibilidade de reescrever algumas condições de estabilidade como desigualdades matriciais lineares ou LMIs (acrônimo para *Linear Matrix Inequalities*), o panorama foi modificado, permitindo o desenvolvimento de procedimentos sistemáticos, como em (Wang et al., 1996).

A exigência de uma única função quadrática para garantir condições suficientes mostra-se

conservadora, principalmente na presença de muitas regras (Tanaka et al., 1998). Em (Tanaka et al., 1998) e também em trabalhos subsequentes (veja mais recentemente Teixeira et al., 2003; Fang et al., 2006; Mozelli et al., 2007), buscou-se reduzir o conservadorismo existente no uso da FLQ. Contudo, mostra-se em (Johansson et al., 1999) que para certos sistemas com não-linearidades de alto grau uma função de Lyapunov única pode não existir. Tendo em vista essa desvantagem, uma alternativa disponível consiste nas chamadas funções de Lyapunov múltiplas (FLM). Em (Cao et al., 1997; Johansson et al., 1999; Wang e Sun, 2005) o enfoque é voltado para a chamada função de Lyapunov por partes (FLP), composta por um conjunto de funções de Lyapunov quadráticas válidas em domínios compactos (ou partições) do espaço de estados e cuja quantidade pode ou não ser igual ao número de regras do modelo. Um dos problemas com FLPs (Cao et al., 1997) é a possibilidade de haver descontinuidades da função nas fronteiras das partições, sendo necessário o uso de condições de fronteira. Em (Johansson et al., 1999) apresenta-se uma solução diferente, onde garante-se a continuidade por meio de restrições adicionais nas LMIs, usando as chamadas matrizes de continuidade (Tognetti e Oliveira, 2006).

Outro tipo de FLM é apresentada para sistemas contínuos em (Tanaka et al., 2003), identificada como função de Lyapunov fuzzy (FLF), e também em (Guerra e Vermeiren, 2004), porém para sistemas discretos e com a denominação de função de Lyapunov não-quadrática. Tal função

consiste em uma combinação fuzzy de funções de Lyapunov quadráticas, da mesma maneira realizada na obtenção do modelo TS. Ao contrário da FLP, na qual em cada partição apenas uma função é válida, a FLF é composta pela interpolação suave (as funções de pertinência devem ser ao menos  $\mathcal{C}^1$ ) de uma quantidade de funções de Lyapunov igual ao número de regras do modelo TS. Da forma pela qual são concebidas, tanto a FLF quanto sua derivada temporal são contínuas. Devido a redução do conservadorismo promovido pela FLF muitos resultados foram obtidos, principalmente para sistemas discretos (veja mais recentemente Zhou et al., 2007; Wu e Zhang, 2007).

Neste trabalho, um dos objetivos principais é reduzir o conservadorismo existente na abordagem proposta em (Tanaka et al., 2003), através da adaptação, ao contexto de sistemas TS, de uma abordagem sistemática aplicada com sucesso a sistemas com retardo no tempo (Souza et al., 2007; Souza et al., 2008). O procedimento conduz a novas condições de estabilidade nas quais as matrizes de Lyapunov estão desacopladas das matrizes do sistema, agregando novas variáveis matriciais. Outra contribuição é um procedimento para síntese de controladores fuzzy baseado em LMIs, que visa ser menos conservador que aquele proposto por Tanaka et al. (2003), baseado em desigualdades matriciais bilineares ou BMIs (*Bilinear Matrix Inequalities*) reescritas como LMIs através do completamento de quadrados. Em (de Avellar et al., 2008) uma solução análoga é proposta para reduzir o conservadorismo presente em outro tipo de função de Lyapunov fuzzy.

*Notação:* O sobre-escrito “ $T$ ” indica a matriz transposta; o sobre-escrito “ $-T$ ” indica a inversa da matriz transposta; a notação “ $*$ ” é usada para substituir termos transpostos em uma matriz simétrica; já  $\text{diag}(\cdot)$  indica uma matriz diagonal. Para maior simplificação as seguintes notações também são adotadas:

$$h_i(z(t)) \Leftrightarrow \bar{h}_i, \quad x(t) \Leftrightarrow \bar{x}, \quad \sum_{i < j}^3 h_{ij} \Leftrightarrow h_{12} + h_{13} + h_{23}$$

## 2 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno

Serão considerados sistemas dinâmicos não-lineares contínuos que admitem o modelo fuzzy Takagi-Sugeno (TS) (Tanaka et al., 1998; Teixeira et al., 2003; Tanaka et al., 2003; Fang et al., 2006; Tognetti e Oliveira, 2006):

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \quad (1)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados;  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle;  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são matrizes dos sistemas locais.  $i = 1, 2, \dots, r$  é a quantidade de regras;  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  são as variáveis

premissas;  $h_i(z(t))$  é a ponderação normalizada para cada regra, representando o grau de pertinência, tal que:

$$h_i(z(t)) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1. \quad (2)$$

A função de Lyapunov candidata adotada neste trabalho, conhecida como função de Lyapunov fuzzy (FLF) (Tanaka et al., 2003), é dada por:

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) x^T(t) P_i x(t) \quad (3)$$

Tal função compartilha as mesmas funções de pertinência e regras utilizadas na síntese do modelo TS em (1). Outra restrição necessária é que as funções de pertinência  $h_i(z(t))$  sejam suaves, i.e., sejam ao menos  $\mathcal{C}_1$ , para garantir que a derivada temporal de (3) seja contínua.

## 3 Novas Condições de Estabilidade

Novas condições de estabilidade para sistemas TS contínuos serão enunciadas através de um Teorema. Tais condições buscam reduzir o conservadorismo presente em (Tanaka et al., 2003).

**Teorema 1** *Considere que  $h_i(z(t)) \in \mathcal{C}^1$  e:*

$$|\dot{h}_\rho(z(t))| \leq \phi_\rho, \quad (4)$$

sendo  $\phi_\rho \geq 0$  ( $\rho = 1, 2, \dots, r-1$ ). O sistema TS contínuo (1) é estável se existirem matrizes simétricas  $P_i$  e matrizes quaisquer  $M_1$  e  $M_2$  que satisfaçam as LMIs a seguir:

$$P_i \succ 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (5)$$

$$\Xi_i \prec 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (6)$$

$$P_\rho \succ P_r \quad (\rho = 1, 2, \dots, r-1), \quad (7)$$

onde

$$\Xi_i \triangleq \begin{bmatrix} P_\phi - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & * \\ P_i - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{bmatrix}, \quad (8)$$

e ainda

$$P_\phi \triangleq \sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_\rho (P_\rho - P_r). \quad (9)$$

**Prova:** Encontra-se no Apêndice.  $\square$

**Nota 1** *As desigualdades (5)-(7) serão de fato LMIs caso os escalares  $\phi_\rho$  sejam dados. Tais parâmetros estão associados com o limite máximo para a derivada temporal das funções de pertinência e devem ser estabelecidos a priori (Tanaka et al., 2003).*

## 4 Exemplo de Análise de Estabilidade

Por meio de um exemplo numérico ilustra-se como as novas condições propostas reduzem o conservadorismo presente em abordagens via FLQ (Tanaka e Sugeno, 1992; Tanaka et al., 1998; Teixeira

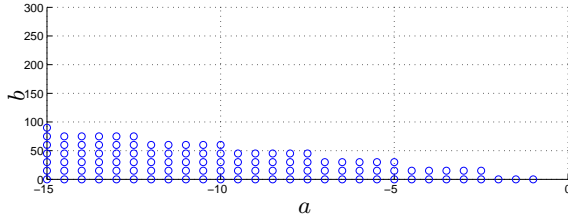


Figura 1: Abordagens com FLQ.

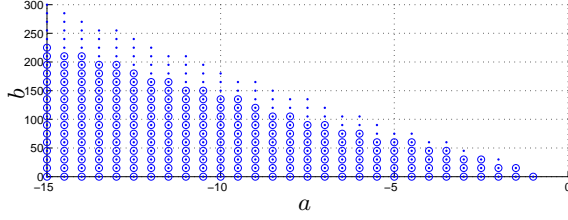


Figura 2: Abordagens com FLF:  $|h_i(z(t))| \leq 0,85$ .

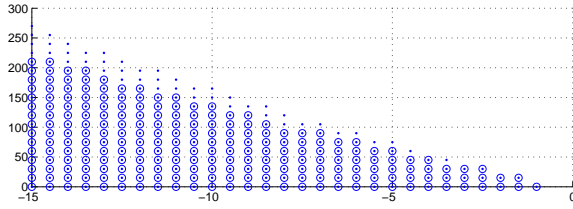


Figura 3: Abordagens com FLF:  $|h_i(z(t))| \leq 1,50$ .

et al., 2003; Fang et al., 2006) e também via FLF (Tanaka et al., 2003). O sistema TS analisado possui 4 regras e as matrizes locais são dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}.$$

A estabilidade desse sistema foi investigada em um espaço paramétrico que abrangeu  $a \in [-15, 0]$  e  $b \in [0, 300]$ . Neste exemplo considera-se dois valores para o limite da derivada temporal da função de pertinência: 0,85 e 1,50.

A Figura 1 exibe o resultado obtido pelas abordagens baseadas em FLQ, na qual os pares de parâmetros assinalados com círculos correspondem a sistemas estáveis. Já as Figuras 2 e 3 mostram os resultados obtidos com as abordagens via FLF. Os círculos denotam o resultado obtido segundo (Tanaka et al., 2003) enquanto os pontos representam o resultado do Teorema 1.

A análise das Figuras 1 a 3 revela que as abordagens baseadas em FLF são bem menos conservadoras que as abordagens FLQ. Nota-se também que a região de estabilidade obtida pela FLF depende do valor atribuído como limitante para a derivada temporal das funções de pertinência. A medida que se admite um limite maior, a região paramétrica diminui, seja usando (Tanaka et al., 2003)

ou usando o Teorema 1. Todavia, os resultados menos conservadores foram alcançados via o Teorema 1, pois nota-se (Figuras 2 e 3) que a margem de estabilidade via (Tanaka et al., 2003) está sempre inclusa no resultado do Teorema 1.

## 5 Novas Condições para Síntese de Controladores Fuzzy

Com base nos resultados apresentados para análise de sistemas TS é possível obter novas condições suficientes para a síntese de controladores fuzzy. O princípio da Compensação Paralela Distribuída (CPD) (Tanaka e Sugeno, 1992; Tanaka et al., 1998; Teixeira et al., 2003; Fang et al., 2006) será adotado, no qual a ação de controle baseia-se no mesmo conjunto de regras que o modelo TS

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t), \quad (10)$$

onde  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  são os ganhos locais.

Considerando a realimentação de estados (10), o sistema TS (1) em malha fechada será

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} x(t). \quad (11)$$

O Teorema a seguir apresenta condições suficientes para obtenção dos ganhos  $F_i$  do controlador fuzzy que garante a estabilização do sistema TS (11) via CPD.

**Teorema 2** Considere (4) e  $h_i(z(t)) \in \mathcal{C}^1$ . O sistema TS (11) é estabilizável pelo controlador fuzzy (10), com os ganhos dados por  $F_i = S_i^T R^{-T}$ , se existirem matrizes simétricas  $T_i$ , matrizes quaisquer  $R$ ,  $S_i$  e um escalar  $\mu > 0$  que satisfaçam as LMIs a seguir:

$$T_i \succ 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (12)$$

$$\tilde{\Theta}_{ii} \prec 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (13)$$

$$\bar{\Theta}_{ij} \prec 0 \quad (i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, r), \quad (14)$$

$$T_\rho \succ T_r \quad (\rho = 1, 2, \dots, r-1), \quad (15)$$

com

$$\tilde{\Theta}_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{11}^{ij} & * \\ \tilde{\theta}_{21}^{ij} & \tilde{\theta}_{22}^{ij} \end{bmatrix}, \quad \bar{\Theta}_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{11}^{ij} & * \\ \bar{\theta}_{21}^{ij} & \bar{\theta}_{22}^{ij} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\tilde{\theta}_{11}^{ij} \triangleq T_\phi - A_i R^T - R A_i^T + B_i S_j^T + S_j B_i^T,$$

$$\tilde{\theta}_{21}^{ij} \triangleq T_i - \mu (A_i R^T - B_i S_j^T) + R,$$

$$\tilde{\theta}_{22}^{ij} \triangleq \mu (R + R^T),$$

$$\bar{\theta}_{11}^{ij} \triangleq \tilde{\theta}_{11}^{ij} + \tilde{\theta}_{11}^{ji},$$

$$\bar{\theta}_{21}^{ij} \triangleq \tilde{\theta}_{21}^{ij} + \tilde{\theta}_{21}^{ji},$$

$$\bar{\theta}_{22}^{ij} \triangleq \tilde{\theta}_{22}^{ij} + \tilde{\theta}_{22}^{ji}, \quad (17)$$

$$T_\phi \triangleq \sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_\rho (T_\rho - T_r). \quad (18)$$

**Prova:** Encontra-se no Apêndice.  $\square$

**Nota 2** Também se faz necessário que o escalar  $\mu$  em (17) seja dado para que (12)-(15) sejam de fato LMIs. Esse escalar torna-se um parâmetro de ajuste cuja escolha apropriada torna as LMIs factíveis. Sua seleção pode ser realizada através de um algoritmo de minimização escalar.

## 6 Exemplo de Controle

Seja um sistema TS formado por duas regras:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 2 \end{bmatrix}.$$

cujas funções de pertinência são:

$$h_1(x_1(t)) = \begin{cases} [1 - \sin(x_1(t))]/2 & \text{se } |x_1(t)| \leq \pi/2, \\ 0 & \text{se } x_1(t) > \pi/2, \\ 1 & \text{se } x_1(t) < -\pi/2 \end{cases}$$

$$h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t)).$$

O vetor de estados é dado por  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$  e a variável premissa é apenas  $x_1(t)$ . Busca-se projetar um controlador fuzzy via CPD que torne o sistema TS estável quando os parâmetros são:  $a = 2$  e  $b = 1$ . Resolvendo o Teorema 2 através do pacote *LMI Control Toolbox* do Matlab<sup>®</sup> obteve-se os ganhos mostrados a seguir:

$$F_1 = [-3,0345 \quad 13,6994]^T, \\ F_2 = [-1,5573 \quad 6,6300]^T.$$

Na Tabela 1, estão os parâmetros usados no Teorema 2 para a obtenção dos ganhos. Já as matrizes de Lyapunov obtidas foram:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 44,5379 & -111,3024 \\ -111,3024 & 33,2695 \end{bmatrix}, \\ P_2 = \begin{bmatrix} 37,8725 & -90,9838 \\ -90,9838 & 274,0665 \end{bmatrix}.$$

As Figuras 4 e 5 mostram a evolução temporal dos estados  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , respectivamente, a partir de três condições iniciais distintas: (1,3) em linha cheia (azul); (-1,-3) em tracejado (vermelho); (-2,2) em pontilhado-tracejado (preto). Na Fig. 6 mostra-se o retrato de fases (setas) do sistema em malha fechada, e as trajetórias (linha cheia) para as mesma condições iniciais das Fig. 4 e 5. Nota-se que as trajetórias convergem para a origem (foco estável) demonstrando que o controlador obtido torna o sistema estável. Ressalta-se que, para esse sistema, o método de (Tanaka et al., 2003) não é factível para quaisquer valores de  $\phi_{(1,2)}$ .

Parâmetro	Valor
$\mu$	1
$\phi_{(1,2)}$	5

Tabela 1: Parâmetros usados no Teorema 2.

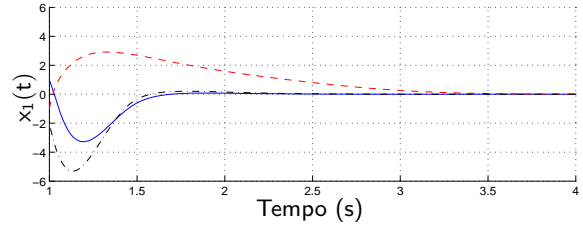


Figura 4: Evolução temporal do estado  $x_1(t)$ .

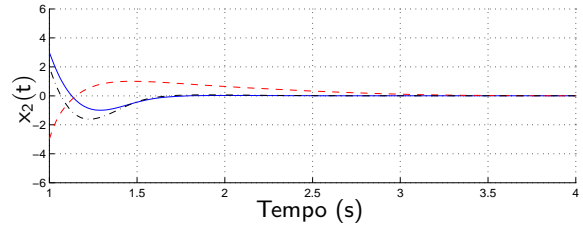


Figura 5: Evolução temporal do estado  $x_2(t)$ .

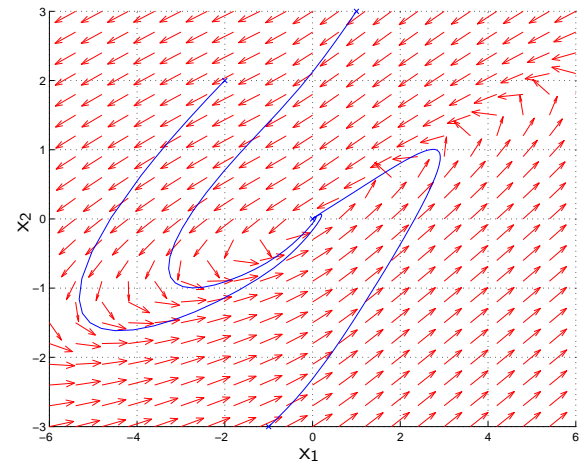


Figura 6: Plano de fases do sistema em malha fechada e trajetória para algumas condições iniciais.

## 7 Conclusões

Uma estratégia sistemática para reduzir o conservadorismo em abordagens baseadas em FLF foi proposta. Novas condições de estabilidade e estabilização foram obtidas e, através de exemplos numéricos, foi demonstrado que são mais relaxadas que condições anteriores. Outra contribuição consiste em um novo procedimento para síntese de controladores fuzzy, totalmente baseado em LMIs, que também se mostra menos conservador.

## 8 Agradecimentos

Os autores agradecem ao suporte financeiro do CNPq e da FAPEMIG.

## Apêndice

A ferramenta central para a obtenção de todas as novas condições apresentadas, sejam de análise ou de síntese, consiste na aplicação do termo nulo apresentado a seguir, originalmente proposto para sistemas com retardo no tempo (Souza et al., 2007; Souza et al., 2008) e adaptado ao contexto de sistemas TS:

$$2 \left[ \bar{x}^T M_1 + \dot{\bar{x}}^T M_2 \right] \times \left[ \dot{\bar{x}} - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \bar{h}_i \bar{h}_j \Omega_{ij} \bar{x} \right] = 0 \quad (19)$$

Para fins de análise de estabilidade, ou seja, sistemas TS autônomos na forma (1), o termo  $\Omega_{ij}$  deverá ser substituído por  $A_i$ . Para síntese de controlador, sistemas na forma (11) são considerados e o termo  $\Omega_{ij}$  representa o sistema em malha fechada:  $A_i - B_i F_j$ .

Segundo as propriedades em (2), nota-se que o somatório das funções de pertinência não varia, de tal forma que a derivada desse somatório é nula:

$$\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho(z(t)) = 0 \quad \forall z(t). \quad (20)$$

Logo, a partir de (20), é possível afirmar que

$$\dot{h}_r(z(t)) = -\sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_\rho(z(t)). \quad (21)$$

**Prova:** [Demonstração do Teorema 1] Escolha (3) como uma FLF candidata e considere  $P_i$  matrizes definidas positivas, satisfazendo assim (5). Tomando sua derivada temporal e em seguida aplicando (21) obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho \bar{x}^T P_\rho \bar{x} + 2 \sum_{i=1}^r \bar{h}_i \bar{x}^T P_i \dot{\bar{x}} \\ &= \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_\rho \bar{x}^T P_\rho \bar{x} + \dot{h}_r \bar{x}^T P_r \bar{x} + 2 \sum_{i=1}^r \bar{h}_i \bar{x}^T P_i \dot{\bar{x}} \\ &= \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_\rho \bar{x}^T (P_\rho - P_r) \bar{x} + 2 \sum_{i=1}^r \bar{h}_i \bar{x}^T P_i \dot{\bar{x}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Considere que as LMIs (7) sejam satisfeitas. Utilizando (4) e tomando a notação (9) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &\leq \sum_{\rho=1}^{r-1} \bar{x}^T \phi_\rho (P_\rho - P_r) \bar{x} + 2 \sum_{i=1}^r \bar{h}_i \bar{x}^T P_i \dot{\bar{x}} \\ &= \sum_{i=1}^r \bar{h}_i \{ \bar{x}^T P_\phi \bar{x} + 2 \bar{x}^T P_i \dot{\bar{x}} \}. \end{aligned} \quad (23)$$

Neste ponto adiciona-se o termo nulo em (19). Por se tratar do Teorema de análise o termo  $\Omega_{ij}$  em (19) representa  $A_i$ . Após algumas manipulações obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &\leq \sum_{i=1}^r \bar{h}_i \left\{ \bar{x}^T P_\phi \bar{x} + 2 \bar{x}^T P_i \dot{\bar{x}} + 2 \bar{x}^T M_1 \dot{\bar{x}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \bar{x}^T M_1 A_i \bar{x} + 2 \dot{\bar{x}}^T M_2 \bar{x} - 2 \dot{\bar{x}}^T M_2 A_i \bar{x} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

Utilizando o vetor

$$\xi \triangleq \begin{bmatrix} x(t)^T & \dot{x}(t)^T \end{bmatrix}^T, \quad (25)$$

é possível reescrever (24) como:

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \xi^T \Xi_i \xi, \quad (26)$$

onde  $\Xi_i$  é definido em (8). Caso (6) sejam satisfeitas, então  $\dot{V}(x(t)) < 0$ , e a estabilidade assintótica do sistema (1) será garantida.  $\square$

**Prova:** [Demonstração do Teorema 2] O resultado do Teorema 1 é tomado como ponto de partida. Logo, as LMIs (5) e (7) devem ser satisfeitas. Seja (26) e substitua de maneira apropriada em (8) os termos  $A_i$  pela forma em malha fechada  $A_i - B_i F_j$ . Isso corresponde a repetir os passos (22) até (26) porém considerando (11) ao invés de (1) e assumindo (19) na forma em malha fechada. Logo, (26) torna-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \bar{h}_i \bar{h}_j \xi^T \Lambda_{ij} \xi \\ &= \sum_{i=1}^r \bar{h}_i^2 \xi^T \Lambda_{ii} \xi + \sum_{i < j} \bar{h}_i \bar{h}_j \xi^T (\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}) \xi, \end{aligned} \quad (27)$$

onde

$$\Lambda_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_{11}^{ij} & * \\ \lambda_{21}^{ij} & \lambda_{22}^{ij} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{ij} &\triangleq P_\phi - M_1 (A_i - B_i F_j) - (A_i - B_i F_j)^T M_1^T, \\ \lambda_{21}^{ij} &\triangleq P_i - M_2 (A_i - B_i F_j) + M_1^T, \\ \lambda_{22}^{ij} &\triangleq (M_2 + M_2^T). \end{aligned} \quad (29)$$

Considere o caso particular no qual  $M_1 = M$  e  $M_2 = \mu M$ , sendo  $\mu$  um escalar. Em seguida, pré e pós-multiplicando (27) pelas matrizes não singulares  $\text{diag}(M^{-1}, M^{-1})$  e  $\text{diag}(M^{-T}, M^{-T})$ , respectivamente, conclui-se que:

$$\dot{V}(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^r \bar{h}_i^2 \xi^T \Gamma_{ii} \xi + \sum_{i < j} \bar{h}_i \bar{h}_j \xi^T (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) \xi, \quad (30)$$

onde

$$\Gamma_{ij} \triangleq \begin{bmatrix} \gamma_{11}^{ij} & * \\ \gamma_{21}^{ij} & \gamma_{22}^{ij} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^{ij} &\triangleq M^{-1} P_\phi M^{-T} \\ &\quad - (A_i - B_i F_i) M^{-T} - M^{-1} (A_i - B_i F_i)^T, \\ \gamma_{21}^{ij} &\triangleq M^{-1} P_i M^{-T} - \mu (A_i - B_i F_i) M^{-T} + M^{-1}, \\ \gamma_{22}^{ij} &\triangleq \mu (M^{-T} + M^{-1}). \end{aligned} \quad (32)$$

Haja vista a exigência que  $M_2 + M_2^T \prec 0$  no bloco (2,2) de (6), garante-se que  $M_2$  é não-singular, por isso é possível obter (30). Para garantir a estabilidade de (11) é suficiente que  $\Gamma_{ii} \prec 0$ ,  $(\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) \prec 0$ . Contudo essas desigualdades ainda não são LMIs, necessitando aplicar as mudanças de variável linearizantes a seguir:

$$R \triangleq M^{-1}, T_\alpha \triangleq RP_\alpha R^T, S_j \triangleq RF_j^T, \quad (33)$$

onde  $\alpha$  representa  $\phi$  ou  $i$ .

A transformação de congruência também deve ser aplicada às desigualdades (5) e (7), porém pré e pós-multiplicando-as por  $M^{-1}$  e  $M^{-T}$ , respectivamente, e aplicando (33), em seguida. Desta forma, as LMIs descritas em (12) a (15) são obtidas. Por hipótese assume-se (5) e (7) são verificadas, logo (12) e (15) também o são.

Resta que as LMIs (13) e (14) sejam satisfeitas. Portanto, o sistema TS em malha fechada (11) é assintoticamente estável e os ganhos do controlador que o estabiliza são dados por  $F_i = S_i^T R^{-T}$ .  $\square$

### Referências

- Cao, S. G., Rees, N. W. e Feng, G. (1997). Analysis and design for a class of complex control systems part II: Fuzzy controller design, *Automatica* **33**(6): 1017–1028.
- de Avellar, G. S. C., Mozelli, L. A. e Palhares, R. M. (2008). Condições LMIs alternativas para sistemas Takagi-Sugeno via função de Lyapunov fuzzy, *Anais do XVII CBA*, Juiz de Fora, MG, Brasil.
- Fang, C.-H., Liu, Y.-S., Kau, S.-W., Hong, L. e Lee, C.-H. (2006). A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **14**(3): 386–397.
- Guerra, T. M. e Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form, *Automatica* **40**(5): 823–829.
- Johansson, M., Rantzer, A. e Årzén, K.-E. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **7**(8): 713–722.
- Mozelli, L. A., Campos, C. D., Palhares, R. M., Tôrres, L. A. B. e Mendes, E. M. A. M. (2007). Chaotic synchronization and information transmission experiments: A fuzzy relaxed  $\mathcal{H}_\infty$  control approach, *Circ. Syst. Signal Process.* **26**(4): 427–449.
- Souza, F. O., Palhares, R. M. e Ekel, P. Y. (2007). Asymptotic stability analysis in uncertain multi-delayed state neural networks via Lyapunov-Krasovskii theory, *Math. Comput. Model.* **45**(11-12): 1350–1362.
- Souza, F. O., Palhares, R. M., Mendes, E. M. A. M. e Tôrres, L. A. B. (2008). Further results on master-slave synchronization of general Lur'e systems with time-varying delay, *Int. J. Bifurcat. Chaos Appl. Sci. Eng.* **18**(1): 187–202.
- Takagi, T. e Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* **15**(1): 116–132.
- Tanaka, K., Hori, T. e Wang, H. O. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(4): 528–529.
- Tanaka, K., Ikeda, T. e Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **6**(2): 250–264.
- Tanaka, K. e Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems, *Fuzzy Set. Syst.* **45**(2): 135–156.
- Teixeira, M. C. M., Assunção, E. e Avellar, R. G. (2003). On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(5): 613–623.
- Tognetti, E. S. e Oliveira, V. A. (2006). Controle fuzzy via alocação de pólos com funções de Lyapunov por partes, *Anais do XVI CBA*, Salvador, BA, Brasil, pp. 1662–1667.
- Wang, H. O., Tanaka, K. e Griffin, M. F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **4**(1): 14–23.
- Wang, W.-J. e Sun, C.-H. (2005). Relaxed stability and stabilization conditions for a T-S fuzzy discrete system, *Fuzzy Set. Syst.* **156**: 208–225.
- Wu, H.-N. e Zhang, H.-Y. (2007). Reliable  $\mathcal{H}_\infty$  fuzzy control for a class of discrete-time nonlinear systems using multiple fuzzy Lyapunov functions, *IEEE Trans. Circuits Syst. II* **54**(4): 357–361.
- Zhou, S., Lam, J. e Zheng, W. X. (2007). Control design for fuzzy systems based on relaxed nonquadratic stability and  $\mathcal{H}_\infty$  performance conditions, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **15**(2): 357–361.