Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica

Notas de Aula de Otimização

Jaime A. Ramírez
Felipe Campelo
Frederico G. Guimarães
Lucas S. Batista
Ricardo H. C. Takahashi

Sumário

Sumário i

Lista de Figuras i

4 Métodos Numéricos para Otimização Restrita 1

4.1 Introdução . . . 1
4.2 Revisão . . . 1
4.3 Métodos de Penalidade . . . 2
4.3.1 Algoritmo . . . 2
4.3.2 Exemplo – Método de Penalidade . . . 3
4.4 Métodos de Barreira . . . 3
4.4.1 Exemplo – Método de Barreiras . . . 5
4.5 Método de Multiplicadores de Lagrange . . . 5
4.5.1 Exemplo – Método de Multiplicadores de Lagrange . . . 5
4.6 Exercícios . . . 7

Lista de Figuras

4.1 Solução gráfica usando o Método de Penalidade. 4
4.2 Solução gráfica ilustrando as curvas de nível da função objetivo "modificada" em quatro iterações do método de multiplicadores de Lagrange. 6

Capítulo 4

Métodos Numéricos para Otimização Restrita

4.1 Introdução

No capítulo anterior, vimos alguns métodos numéricos que são utilizados para a otimização de problemas sem restrições e que se baseiam na informação do gradiente da função objetivo.

O objetivo deste capítulo é o estudo de métodos numéricos para otimização de problemas com restrições, i.e., além da função objetivo serão consideradas também na formulação do problema de otimização as funções de restrição de igualdade e desigualdade. Em sua forma geral o problema de otimização é definido por:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize } f(\boldsymbol{x}) \\
&\text{sujeito a: } \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 \ ; \quad i = 1, \ldots, l \\ \\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0 \ ; \quad j = 1, \ldots, m \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

sendo que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$, $h(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, e $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^l$.

A estratégia que será utilizada aborda o seguinte enfoque:

- Converter o problema restrito em um irrestrito, tal que se possa utilizar qualquer método apresentado no capítulo anterior.

O capítulo é dividido em três seções. Inicialmente, é apresentada uma revisão dos métodos numéricos utilizados para a solução de problemas de otimização restritos. Posteriormente, são analisados os métodos de penalidade e barreira. Por fim, é estudado o método dos multiplicadores de Lagrange.

Ao final do capítulo é apresentada uma lista de exercícios. Leitura complementar sobre os métodos discutidos neste capítulo pode ser encontrada nas referências [1], [2], [3], [4], [?].

4.2 Revisão

. . . em construção!

4.3 Métodos de Penalidade

Os métodos de penalidade transformam o problema restrito em um irrestrito adicionando uma função de penalidade à função objetivo. Assim, o problema de otimização definido em (4.1) passa a ser expresso por:

$$\text{minimize } f(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{x}) \tag{4.2}$$

em que $p(\boldsymbol{x})$ é uma função penalidade que incorpora as restrições de igualdade e desigualdade.

Para o caso de restrições de igualdade, tem-se:

$$p(\boldsymbol{x}) = r^h[h_j(\boldsymbol{x})]^2 \tag{4.3}$$

em que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $h_j(\boldsymbol{x}^*) = 0$ e $r^h \geq 0$. Qualquer violação da restrição de igualdade $h(\boldsymbol{x})$ implicará em um termo de alta penalidade $r^h[h_j(\boldsymbol{x})]^2$.

Para o caso de restrições de desigualdade, tem-se:

$$p(\boldsymbol{x}) = r^g[\max\ \{0, g_i(\boldsymbol{x})\}]^2 \tag{4.4}$$

em que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $g_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0$ e $r^g \geq 0$. Se $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$, o ponto $\boldsymbol{x}$ encontra-se na região factível e a restrição de desigualdade é satisfeita; então, o máximo $\{0, g_i(\boldsymbol{x})\}$ é nulo, e portanto a penalidade não ocorre. Caso contrário, se $g_i(\boldsymbol{x}) > 0$ tem-se a penalidade $r^g[g_i(\boldsymbol{x})]^2$.

Este método permite que o processo de otimização se inicie a partir de um ponto $\boldsymbol{x}_k$ tanto na região factível quanto na região não factível. No caso do processo se iniciar a partir de um ponto $\boldsymbol{x}_k$ na região não factível, as penalidade $r^h[h_j(\boldsymbol{x})]^2$ e $r^g[g_i(\boldsymbol{x})]^2$ tornam-se grandes fazendo com que os novos pontos gerados aproximem-se da região factível, minimizando a função objetivo. Portanto, à medida que $r \to \infty$ a solução do problema penalizado converge para a solução do problema original.

Em geral, a função de penalidade é definida da seguinte maneira:

$$p(\boldsymbol{x}) = r^h \sum_{j=1}^{m} h_j(\boldsymbol{x})^2 + r^g \sum_{i=1}^{l} (\max\ \{0, g_i(\boldsymbol{x})\})^2 \tag{4.5}$$

onde r^h e r^g são multiplicadores de penalidade das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. Esses multiplicadores são atualizados usando-se um escalar, ou seja, $r^h_{k+1} = r^h_k C^h$ e $r^g_{k+1} = r^g_k C^g$ onde, por exemplo, $r^h_{k=1} = r^g_{k=1} = 0.1$ e $C^h = C^g = 5$; de maneira que tanto $r^h \to \infty$ quanto $r^g \to \infty$ no processo iterativo. Outras maneiras de se determinar r^h e r^g são discutidas em [**?**].

4.3.1 Algoritmo

O algoritmo básico do método de penalidade é mostrado a seguir.

Algorithm 1: Algoritmo do Método da Penalidade

Entrada: função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
função penalidade $p(\cdot)$ dada em (4.5)
precisão desejada ϵ

início
- escolha $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$;
- escolha $r^h > 0$ e $r^g > 0$;
- escolha $C^h > 0$ e $C^g > 0$;
- $k \leftarrow 0$;
- **se** $k = 0$ **então**
  - determine a solução ótima $\boldsymbol{x}_1$ de min $f(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{x})$ a partir de $\boldsymbol{x}_0$;
  - **enquanto** $p(\boldsymbol{x}_{k+1}) \geq \epsilon$ **faça**
    - $r^h_{k+1} \leftarrow r^h_k C^h$;
    - $r^g_{k+1} \leftarrow r^g_k C^g$;
    - $k \leftarrow k + 1$;
    - determine a solução ótima $\boldsymbol{x}_{k+1}$ de min $f(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{x})$ a partir de $\boldsymbol{x}_k$;
  - **fim**
- **fim**

fim

4.3.2 Exemplo – Método de Penalidade

Seja o problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ &\text{sujeito a: } h(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

O problema irrestrito, obtido a partir da formulação do método da penalidade, pode ser escrito como:

$$\text{minimize } \hat{f}(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 + r^h(x_1^2 - x_2)^2 \tag{4.7}$$

Utilizando o algoritmo do método da penalidade, a partir de $\boldsymbol{x}_0 = (2, 1)^T$; $r^h_0 = 0.1$ e $C^h = 10$, obtém-se o gráfico da Fig. 4.1 a seguir.

4.4 Métodos de Barreira

De maneira similar aos métodos de penalidade, os métodos de barreira, ou de penalidade interna, transformam o problema restrito em um problema irrestrito. Para tal, as restrições são adicionadas à função objetivo como penalidades que funcionam como "barreiras", as quais limitam a solução à região factível. Assim, o problema de otimização definido em (4.1) passa a ser expresso por:

$$\text{minimize } f(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x}) \tag{4.8}$$

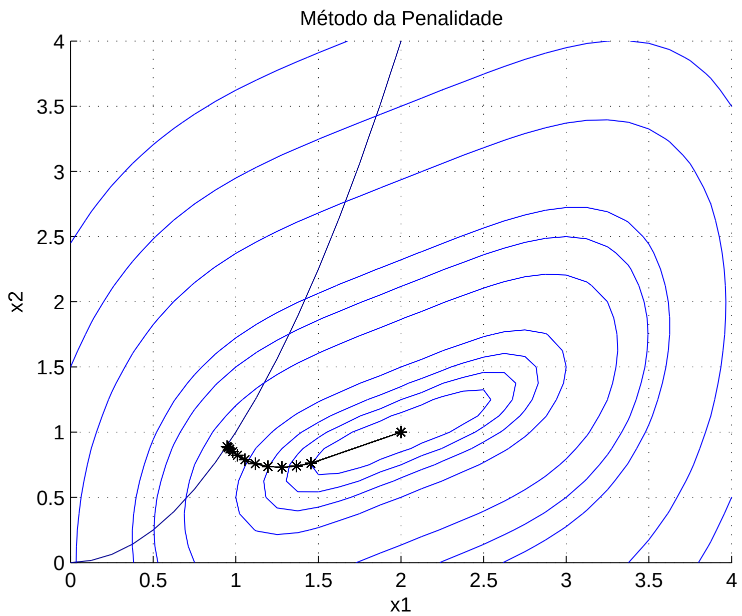

Figura 4.1: Solução gráfica usando o Método de Penalidade.

em que $b(\boldsymbol{x})$ é uma função barreira que incorpora exclusivamente as restrições de desigualdade, a qual pode ser definida como:

$$b(\boldsymbol{x}) = -r^g \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{g_i(\boldsymbol{x})} \tag{4.9}$$

em que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $b(\boldsymbol{x})$ é uma barreira não negativa e contínua na região $\{\boldsymbol{x} \mid g(\boldsymbol{x}) < 0\}$, a qual tende a infinito a medida que se aproxima do limite da região $\{\boldsymbol{x} \mid g(\boldsymbol{x}) \leq 0\}$ a partir de um ponto *interior* à região factível.

Iniciando o processo de otimização em um ponto $\boldsymbol{x}_k$ na região factível, observa-se que uma barreira $b(\cdot)$, como definida em (4.9), gerará pontos intermediários que pertencerão também à região factível, pois (4.8) não está definida na região não factível. Estes pontos se aproximarão iterativamente da restrição de desigualdade, minimizando a função objetivo. Nesse processo, a função barreira tende a infinito, $b(\cdot) \to \infty$, impedindo que os pontos $\boldsymbol{x}_k$ saiam da região factível.

Nos métodos de barreira, inicia-se o processo com um valor de r^g relativamente elevado, e faz-se $r^g \to 0$, diminuindo o seu valor em cada iteração de acordo com $r^g_{k+1} \leftarrow r^g_k C^g$, em que, por exemplo, $r^g_{k=1} = 10$ e $C^g = 0.1$. À medida que $r^g \to 0$, a solução do problema penalizado converge para a solução do problema original. Outras maneiras de se determinar r^g são discutidas em [5] e [**?**].

A função barreira ideal seria aquela que fosse nula para os pontos factíveis (i.e., que não adicionasse nenhum valor a função objetivo original), e infinita nos limites da região factível. Porém, essa função seria descontínua na fronteira da região viável e, assim, dificultaria o desenvolvimento computacional.

4.4.1 Exemplo – Método de Barreiras

... em construção!

4.5 Método de Multiplicadores de Lagrange

O método de multiplicadores de Lagrange (ALM) transforma o problema restrito em um problema irrestrito adicionando as restrições de igualdade e desigualdade à função objetivo. Com o intuito de satisfazer as condições de Karush-Kuhn-Tucker no problema irrestrito, associam-se às restrições de igualdade e desigualdade os multiplicadores de Lagrange.

Em geral, o método ALM é definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) = r^h \sum_{k=1}^{m} \lambda_k [h_k(\boldsymbol{x})]^2 + r^g \sum_{j=1}^{l} [\max \{g_j(\boldsymbol{x}), -\tfrac{\beta_j}{2r^g}\}]^2 + \ldots \\ + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k h_k(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{l} max \{g_j(\boldsymbol{x}), -\tfrac{\beta_j}{2r^g}\} \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde λ_k e β_j são os multiplicadores de Lagrange, e r^h e r^g são os multiplicadores de penalidade definidos de maneira similar ao método de penalidade. Os multiplicadores de Lagrange são atualizados, em cada iteração, com informações a respeito das restrições de acordo com:

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1} &= \lambda_k + 2r^h h(\boldsymbol{x}_k) \\ \beta_{k+1} &= \beta_k + 2r^g (\max[g(\boldsymbol{x}_k), \tfrac{-\beta_k}{2r^g}]) \end{aligned} \tag{4.11}$$

4.5.1 Exemplo – Método de Multiplicadores de Lagrange

Seja o problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ &\text{sujeito a: } h(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

O problema irrestrito, obtido a partir da formulação do método de multiplicadores de Lagrange, pode ser escrito como:

$$\text{minimize } \hat{f}(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 + r^h \lambda (x_1^2 - x_2)^2 + \lambda (x_1^2 - x_2)$$

Utilizando o algoritmo do método ALM, a partir de $\boldsymbol{x}_0 = (3, 3)^T$ e $\lambda_0 = 1$, obtém-se os gráficos ilustrados na Fig. 4.2 a seguir. Observa-se que no decorrer do processo iterativo as curvas de nível da função irrestrita se aproximam da função de restrição, $h(\boldsymbol{x})$.

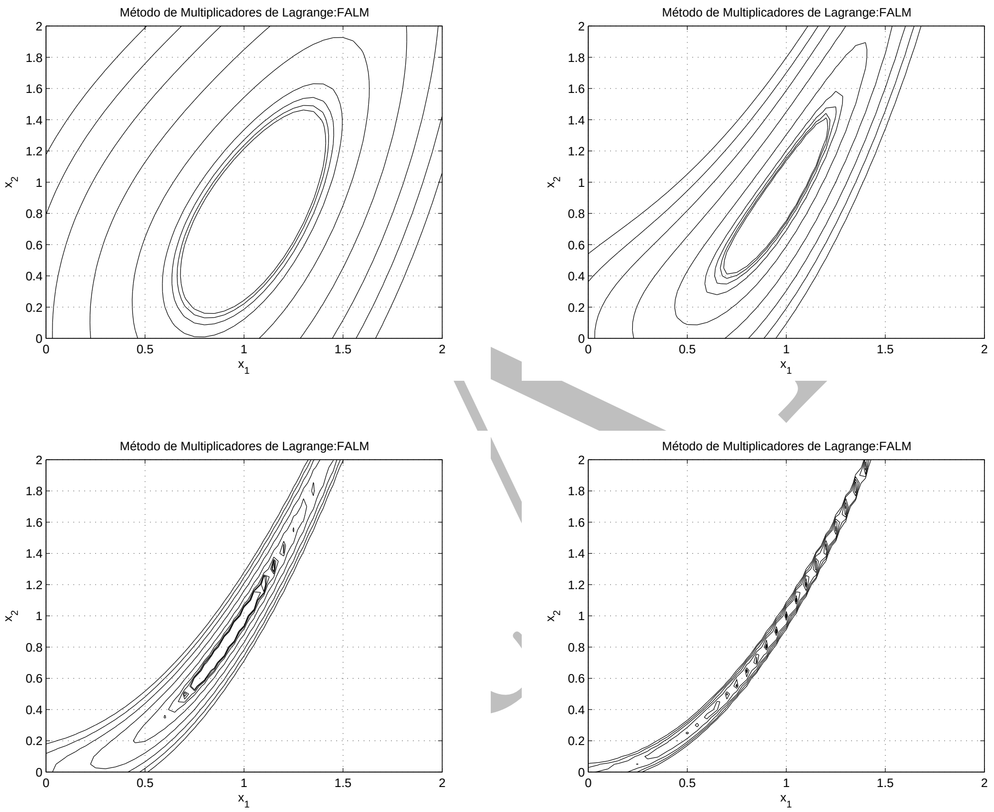

Figura 4.2: Solução gráfica ilustrando as curvas de nível da função objetivo "modificada" em quatro iterações do método de multiplicadores de Lagrange.

4.6 Exercícios

1. Compare os métodos de penalidade, barreira e ALM, indicando as vantagens e desvantagens de cada um.

2. Seja o problema: $\min f(x) = x^3$, sujeito a $h(x) = x - 1 = 0$, cuja solução ótima é dada por $x^* = 1$. Seja o problema irrestrito: $\min x^3 + r^h(x-1)^2$. Pede-se:

   (i) Para $r^h = 1, 10$ e 100, determine os pontos onde a derivada da função do problema irrestrito se anula. Verifique que a solução ótima é ilimitada. Esboce a função irrestrita para cada r^h.

   (ii) Mostre que a solução ótima é ilimitada para qualquer r^h dado.

3. Seja o problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 \\ &\text{sujeito a: } \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = -x_2 + 1 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   (i) Determine a solução ótima para o problema.

   (ii) Escolha uma função penalidade, faça $r_0^g = 1$ e, iniciando em $\boldsymbol{x}_0 = (2, 6)$, determine $\boldsymbol{x}_1$ pelo método do gradiente.

4. Seja o problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ &\text{sujeito a: } \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 \leq 3 \\ g_2(\boldsymbol{x}) = -x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

   (i) Esboce as funções e determine por inspeção a solução ótima para o problema.

   (ii) Escolha uma função barreira, faça $r_0^g = 1$ e, iniciando em $\boldsymbol{x}_0 = (0, 0)$, determine $\boldsymbol{x}_1$ por um método de minimização irrestrita.

5. Seja o problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f(\boldsymbol{x}) = x_1^4 - 2x_1^2x_2 + x_1^2 + x_1x_2^2 - 2x_1 + 4 \\ &\text{sujeito a: } \begin{cases} h(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ g(\boldsymbol{x}) = 0.25x_1^2 + 0.75x_2^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   (i) Esboce as funções e determine por inspeção a solução ótima para o problema.

   (ii) Resolva o problema usando o método ALM.

Referências Bibliográficas

[1] D. G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, 2 edition, 1989.

[2] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, and C.M. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley, 3 edition, 2006.

[3] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization*. John Wiley, 2 edition, 1987.

[4] P. Venkataraman. *Applied Optimization with Matlab Programming*. John Wiley, 1 edition, 2002.

[5] G.R. Mateus e H.P.L. Luna. *Programação Não-Linear*. V Escola de Computação, 1 edition, 1986.