UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Graduação em Engenharia Elétrica / Controle e Automação

Lista de Exercícios de Otimização

Professor:
Lucas de Souza Batista

Exercício 1
Conceitue função, funcional, continuidade e diferenciabilidade.

Exercício 2
Conceitue gradiente e subgradiente.

Exercício 3
Supondo um problema de minimização, conceitue direção minimizante de $f(\cdot)$.

Exercício 4
Conceitue curva de nível, superfície de nível, região subnível e bacia de atração.

Exercício 5
Conceitue função convexa, função quasi-convexa e função não-convexa.

Exercício 6
Conceitue função unimodal e função multimodal.

Exercício 7
Conceitue mínimo local e mínimo global.

Exercício 8
Caracterize condições necessárias de 2a ordem e condições suficientes.

Exercício 9
Mostre que a função $f(\mathbf{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + x_1^5$ possui apenas um ponto estacionário que não é máximo local ou mínimo local. Justifique sua resposta.

Exercício 10
Seja o problema de maximização da função $f(x) = x^2$, $-1 \leq x \leq 2$. Mostre que as condições de Karush-Kuhn-Tucker são satisfeitas em $x = -1$, $x = 0$, e $x = 2$, embora o ótimo global seja $x = 2$. Discuta.

Exercício 11
Seja $f(\mathbf{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ sujeito a $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \leq 2$. Verifique se as condições necessárias para um mínimo local são satisfeitas em $(1,\ 1)^T$.

Exercício 12

Considere o problema de minimização restrita a seguir:

$$\min f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2$$
$$\text{sujeito a } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

i. Esboce a região factível e algumas curvas de nível da função-objetivo.
ii. Marque a solução do problema.
iii. Mostre graficamente que as condições de Karush-Kuhn-Tucker são satisfeitas no ponto solução.
iv. Mostre graficamente que as condições de Karush-Kuhn-Tucker também são satisfeitas no ponto $(2,\ 1)^T$ e explique porquê, já que esse ponto não é solução.

Exercício 13

Seja o problema definido por:

$$\text{maximize } f(\mathbf{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$$
$$\text{sujeito a: } \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) : x_1 + x_2 \leq 7 \\ h_1(\mathbf{x}) : 2x_1 + x_2 = 8 \\ h_2(\mathbf{x}) : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 4)^2 = 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 10; \quad 0 \leq x_2 \leq 10 \end{cases} \tag{1}$$

(a) esboçar a região factível;
(b) determinar, por inspeção, o ponto solução do problema irrestrito e do problema restrito;
(c) verificar matematicamente se as condições de 1a e 2a ordem são satisfeitas para o problema irrestrito;
(d) determinar gráfica e matematicamente a condição de Karush-Kuhn-Tucker no ponto ótimo do problema restrito;
(e) verificar se a condição de Karush-Kuhn-Tucker é verdadeira em outro ponto da região factível; justifique sua resposta.

Exercício 14

Resolva o problema de minimização restrita a seguir de forma analítica usando as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker.

$$\min f(\mathbf{x}) = -x_1 x_2$$
$$\text{sujeito a } \begin{cases} g(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 \leq 3 \\ h(\mathbf{x}) = x_1 + 3x_2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Exercício 15

Resolver graficamente os seguintes problemas:

(i)

$$\text{minimize } f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2$$
$$\text{sujeito a: } \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) : x_1 + x_2 \geq 0 \\ g_2(\mathbf{x}) : 2x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

(ii)

$$\text{minimize } f(\mathbf{x}) = -x_1 x_2$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} h_1(\mathbf{x}) : 20x_1 + 15x_2 - 30 = 0 \\ g_1(\mathbf{x}) : x_1^2/4 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ 0 \leq x_1 \leq 3; \quad 0 \leq x_2 \leq 3 \end{cases} \tag{3}$$

Para cada um dos gráficos, desenhe as direções dos vetores gradiente da função objetivo e das restrições ativas no ponto ótimo. Verifique se as condições de Karush-Kuhn-Tucker são satisfeitas no ponto solução.

Exercício 16

O problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f(\mathbf{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \\ &\text{sujeito a: } g(\mathbf{x}) : (x_1^2 + x_2^2) \leq 2 \end{aligned} \tag{4}$$

possui um ponto de mínimo local em $\mathbf{x}^* = (1,1)^T$. Verifique se as condições necessárias para um mínimo local são satisfeitas nesse ponto. Mostre que $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ é singular se, e somente se, $\mathbf{x}$ satisfizer a condição: $x_2 - x_1^2 = 0.005$.

Exercício 17

Conhecido o intervalo inicial $[a, b]$ é possível calcular o número de iterações necessárias, pelo método da Seção Áurea, para que $(b - a) \leq \xi$. Mostre como calcular o número de iterações.

Exercício 18

Dado $f : \Re^2 \mapsto \Re$, $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2$ e $\mathbf{x}_0 = (2, 2)^T$, efetuar uma busca direcional pelo Método da Seção Áurea na direção $-\nabla f(\cdot)$ a partir de $\mathbf{x}_0$. Considere $\delta = 0.0001$ para a estimação do gradiente; $s = 0.1$ para determinar o intervalo $[a, b]$; e $\epsilon = 0.1$ como critério de parada do Algoritmo da Seção Áurea.

Exercício 19

Dada a função $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2$, pergunta-se:

(i) Qual a direção de máximo declive no ponto $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^T$?

(ii) Qual a direção inicial de busca $\mathbf{d}$ determinada pelo método de Newton a partir de $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^T$?

(iii) Qual o comprimento de α, para o caso (b), tal que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{d}$?

(iv) Usando o método de Newton, quantos passos são necessários para minimizar $f(\mathbf{x})$ partindo de $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^T$? Por quê?

Exercício 20

Seja $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 25x_2^2$ e $\mathbf{x}_0 = (2,\ 2)^T$.

i. Aplique uma iteração do método do Gradiente para minimizar $f(\mathbf{x})$.

ii. Aplique uma iteração do método de Newton para minimizar $f(\mathbf{x})$.

Exercício 21

Seja $f(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_1 x_2 - x_1^2 x_2^2$ e $\mathbf{x}_0 = (1,\ 1)^T$. Um programa computacional cuidadosamente programado para executar o método de Newton não foi bem sucedido. Discuta as prováveis razões para o não sucesso.

Exercício 22

Quais as vantagens dos métodos de minimização quasi-Newton em relação aos demais métodos de Direção de Busca?

Exercício 23

Considere o problema a seguir:

$$\min f(\mathbf{x}) = 5x_1$$
$$\text{sujeito a } \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \leq 0 \\ g_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

i. Esboce a região factível e determine a solução graficamente.
ii. Construa uma função barreira que poderia ser usada para resolver o problema.
iii. Construa uma função penalidade que poderia ser usada para resolver o problema.
iv. Verifique as condições de Karush-Kuhn-Tucker no ponto solução.
v. Verifique que as condições de Karush-Kuhn-Tucker não são satisfeitas em outro ponto factível.

Exercício 24

Contraste os Métodos de Penalidades e o Método do Lagrangeano Aumentado, destacando vantagens e desvantagens de cada técnica.

Exercício 25

Nos Métodos de Penalidades utilizamos um único parâmetro u para todas as restrições. Qual(is) a(s) vantagem(ns) de usar um parâmetro para cada restrição? Sugira um esquema de atualização desses parâmetros.

Exercício 26

Seja o problema: $\min f(x) = x^3$, sujeito a $h(x) = x - 1 = 0$; cuja solução ótima é dada por $x^* = 1$. Pede-se:

i. Escreva a função de penalidade que transforma o problema restrito original num problema irrestrito.
ii. Calcule a solução do problema com $u = 1, 10, 100$.
iii. Faça $u \to \infty$ e mostre que a solução converge para $x^* = 1$.

Exercício 27

Seja a função-objetivo $f(\mathbf{x}) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ a ser minimizada, sujeito à restrição $h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 = 5$.

i. Escreva a função Lagrangeana aumentada do problema.
ii. Fazendo $u_0 = 2$ e $\lambda_0 = 0$, faça 3 iterações do método da Langrangeana Aumentada, encontrando o mínimo da função Lagrangeana aumentada a partir da condição de 1a ordem.
iii. Fazendo $u_0 = 20$ e $\lambda_0 = 0$, faça 3 iterações do método da Langrangeana Aumentada, encontrando o mínimo da função Lagrangeana aumentada a partir da condição de 1a ordem.

Exercício 28

Seja o problema:

$$\text{minimize } f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$
$$\text{sujeito a: } \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \\ g_2(\mathbf{x}) = -x_2 + 1 \leq 0 \end{cases}$$

(i) Determine a solução ótima para o problema.
(ii) Escolha uma função penalidade, faça $r_0^g = 1$ e iniciando em $\mathbf{x}_0 = [2 \quad 6]$, determine $\mathbf{x}_1$ pelo método do Gradiente. Repita o procedimento usando o método de Newton Modificado. Compare as soluções.