Otimização de Redes

Técnicas para Tratamento de Restrições

Prof. Lucas S. Batista

lusoba@ufmg.br

www.ppgee.ufmg.br/∼lusoba

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia

Sumário

Problema de Otimização Restrita

- Formulação geral de problemas de otimização restrita:

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}, \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0; & i = 1, \ldots, p \\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0; & j = 1, \ldots, q \\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Problema de Otimização Restrita

Duas considerações razoáveis:

- Estratégias rudimentares usualmente eliminam as soluções infactíveis. Embora muito simples, estão longe de assegurar eficácia e/ou eficiência. Muitas vezes, determinar uma solução factível representa um grande desafio. Por isso, essas técnicas devem ser evitadas!

- Na maioria dos casos, a solução ótima está na fronteira da região viável. A evolução de soluções em ambos os lados dessa fronteira favorece a convergência para o ótimo. Operadores inteligentes podem ser elaborados considerando-se essa premissa.

Sumário

Introdução

- A abordagem dos Métodos de Penalidade consiste na transformação do problema restrito original em um problema irrestrito equivalente.

- Dois problemas são ditos equivalentes se possuem a mesma solução.

Introdução

Nos Métodos de Penalidade, penalidades são adicionadas à função-objetivo:

1. **Métodos de penalidade interior ou métodos Barreira:** pontos gerados devem ser sempre viáveis e qualquer tentativa de sair da região factível é penalizada (não será visto!).

2. **Métodos de penalidade exterior ou métodos de Penalidade:** qualquer violação de alguma restrição é penalizada no valor da função-objetivo.

Métodos de Penalidade

Considerando que a solução ótima reside na fronteira da região factível:

- Nos métodos de penalidade exterior, a solução ótima é aproximada externamente por uma sequência de soluções do problema irrestrito transformado.

Método de Penalidade Exterior

Função de penalidade

Uma função de penalidade deve atender as seguintes condições:

$$\begin{cases} p(\boldsymbol{x}) > 0, & \text{se } \boldsymbol{x} \notin \mathcal{F} \\ p(\boldsymbol{x}) = 0, & \text{se } \boldsymbol{x} \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Método de Penalidade Exterior

Função de penalidade

No caso de um problema com uma restrição de igualdade:

$$\begin{array}{l} \min f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.a } h(\boldsymbol{x}) = 0 \end{array} \Rightarrow \min f(\boldsymbol{x}) + \underbrace{u\,[h(\boldsymbol{x})]^2}_{p(\boldsymbol{x},u)}$$

No caso de um problema com uma restrição de desigualdade:

$$\begin{array}{l} \min f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.a } g(\boldsymbol{x}) \leq 0 \end{array} \Rightarrow \min f(\boldsymbol{x}) + \underbrace{u \max\,[0, g(\boldsymbol{x})]^2}_{p(\boldsymbol{x},u)}$$

Método de Penalidade Exterior

Função de penalidade

De forma geral temos:

$$p(\boldsymbol{x}, u) = u\left\{\sum_{i=1}^{p} \max\left[0, g_i(\boldsymbol{x})\right]^2 + \sum_{j=1}^{q} \left[h_j(\boldsymbol{x})\right]^2\right\}$$

Método de Penalidade Exterior

Exemplo

Seja o problema $\min f(x)$, com $f(x) = x$, sujeito a $g(x) = -x + 3 \leq 0$.

Método de Penalidade Exterior

Exemplo

Seja o problema $\min f(x)$, com $f(x) = x$, sujeito a $g(x) = -x + 3 \leq 0$.

Solução

Usando $p(x) = \max[0, g(x)]^2$, tem-se:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 3 \\ (3-x)^2, & x < 3 \end{cases}$$

Para $x < 3$, $f(x) + p(x, u) = x + u(3-x)^2$. Assim:

$$\frac{df}{dx} = 1 - 2u(3-x) = 0 \;\rightarrow\; x^* = 3 - \frac{1}{2u}$$

Com $u \rightarrow \infty$, temos $x^* \rightarrow 3^-$.

Método de Penalidade Exterior

Exemplo

Seja o problema

$$\begin{array}{c} \min f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \\ \text{s.a} \;\; h(\boldsymbol{x}) = x_1 - 2 = 0 \end{array}$$

Método de Penalidade Exterior

Algoritmo 1: Método de Penalidade Exterior

Input: $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{X}$, $u_0 > 0$, função-objetivo $f(\cdot)$ e restrições $\boldsymbol{g}(\cdot)$ e $\boldsymbol{h}(\cdot)$

$k \leftarrow 0$;
while $\neg$ *critério de parada* **do**
  Começando de $\boldsymbol{x}_k$, encontre $\boldsymbol{x}_{k+1} \leftarrow \arg\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{x}, u_k)$;
  $u_{k+1} \leftarrow \alpha u_k$, com $\alpha > 1$;
  $k \leftarrow k + 1$;
end

Considerações finais

A teoria prevê que a solução converge para a solução ótima quando $u_k \to \infty$, porém:

- A Hessiana da função-objetivo penalizada depende de u_k e pode apresentar mal-condicionamento numérico para u_k extremo.

Considerações finais

Algumas modificações pertinentes:

- Usar termos de penalidade distintos para cada restrição, evitando problemas de escala.

$p(\boldsymbol{x})$ ponderada

$$p(\boldsymbol{x}) = K^{\beta} \left\{ \sum_{i=1}^{p} u_i \max[0, g_i(\boldsymbol{x})]^2 + \sum_{j=1}^{q} u_j [h_j(\boldsymbol{x})]^2 \right\}$$

em que K é uma função crescente e β usualmente igual a 1 ou 2.

Considerações finais

Algumas modificações pertinentes:

- Penalizar apenas as restrições mais violadas.

$p(\boldsymbol{x})$ máxima

$$p(\boldsymbol{x}) = K^{\beta}\left\{u^{(g)}\max\left[0, \max_{i}\ g_i(\boldsymbol{x})\right]^2 + u^{(h)}\left[\max_{j}|h_j(\boldsymbol{x})|\right]^2\right\}$$

em que K é uma função crescente e β usualmente igual a 1 ou 2.

Considerações finais

Algumas modificações pertinentes:

- Usar termos de penalidade adaptativos para cada restrição.

$p(\boldsymbol{x})$ adaptativa

$$p(\boldsymbol{x}) = K^{\beta}\left\{\sum_{i=1}^{p} u_i(k)\max[0, g_i(\boldsymbol{x})]^2 + \sum_{j=1}^{q} u_j(k)[h_j(\boldsymbol{x})]^2\right\}$$

em que

$$u_i(k+1) = \begin{cases} u_i(k)\gamma_1 & \text{se } \boldsymbol{x}^* \text{ foi inviável nas últimas } G \text{ iterações} \\ u_i(k)/\gamma_2 & \text{se } \boldsymbol{x}^* \text{ foi factível nas últimas } G \text{ iterações} \\ u_i(k) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\gamma_1, \gamma_2 > 1$, e u_i e u_j são atualizados a cada G iterações.

Sumário

Métodos de Reparo

- Métodos de Reparo transformam uma solução inviável em uma factível.

métodos de reparo

- essas estratégias são fortemente dependente do problema e da representação do mesmo;
- as estratégias devem ser cuidadosamente elaboradas para evitar a perda de diversidade e/ou a capacidade de exploração do espaço de busca;
- podem ser caras computacionalmente.

Operadores de Variação Inteligentes

- Operadores de variação inteligentes sempre geram soluções factíveis a partir de alternativas viáveis.

operadores inteligentes

- necessariamente dependem do problema e da representação do mesmo;
- em geral, são difíceis de projetar, mas melhoram significativamente a eficiência do algoritmo de otimização;
- operadores especializados na geração de soluções nas proximidades da "fronteira" são usualmente elaborados.

Transformação de Restrições em Objetivos Adicionais

- Ao invés de considerar as funções de restrição, as mesmas podem ser convertidas em um ou vários objetivos adicionais.

geração de objetivos adicionais

- um problema de otimização mono-objetivo com p restrições $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ pode ser transformado em um problema irrestrito composto de $1 + 1$ funções objetivo:

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{p} \max[0, g_i(\boldsymbol{x})]$$

  ou $p + 1$ funções objetivo:

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \max[0, g_i(\boldsymbol{x})] \ , \ \forall \ i \in [1, \ldots, q] \ .$$

- entretanto, problemas com “muitos objetivos” trazem inúmeras outras dificuldades; atualmente é um problema em aberto na literatura.

Seleção por Torneio Binário

- A estratégia de Seleção por Torneio Binário compara a solução atual com a nova alternativa gerada, priorizando a factibilidade:

seleção por torneio binário

- se ambas as soluções são viáveis, escolhe-se a melhor;
- se apenas uma é viável, esta vence a competição;
- se ambas são inviáveis, vence a alternativa com menor violação.

A medida de violação das restrições pode ser obtida via $p(\boldsymbol{x})$.

Seleção por Torneio Binário Modificado

- A estratégia de Seleção por Torneio Binário compara a solução atual com a nova alternativa gerada, priorizando a factibilidade:

seleção por torneio binário

- se ambas as soluções são viáveis, escolhe-se uma aleatoriamente;
- se apenas uma é viável, esta vence a competição;
- se ambas são inviáveis, vence a alternativa com menor violação.

A medida de violação das restrições pode ser obtida via $p(\boldsymbol{x})$.

Stochastic Ranking

- A estratégia SR estabelece uma relação de compromisso entre função objetivo e factibilidade:

stochastic ranking

- se $g_i(\boldsymbol{x}_1),\ g_i(\boldsymbol{x}_2) \leq 0\ \forall i\ ||\ rand() \leq p_f$,
  - $\boldsymbol{x}_{new} = best(f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2))$;
- caso contrário,
  - $\boldsymbol{x}_{new} = best(p(\boldsymbol{x}_1), p(\boldsymbol{x}_2))$;

Geralmente emprega-se $0.4 < p_f < 0.9$.

Literatura Especializada

Singiresu S. Rao, Engineering Optimization: Theory and Practice, Wiley, 4th ed., 2009.

J. Dréo, P. Siarry, A. Pétrowski, E. Taillard, Metaheuristics for Hard Optimization: Methods and Case Studies, Springer, 2006.

Início