

Otimização de Redes

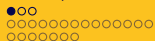
Técnicas para Tratamento de Restrições

Prof. Lucas S. Batista

lusoba@ufmg.br

www.ppgee.ufmg.br/~lusoba

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia



Sumário

- 1 **Técnicas para Tratamento de Restrições**
 - Problema de Otimização Restrita
 - Métodos Baseados em Penalidade
 - Outras Abordagens Propostas na Literatura



Problema de Otimização Restrita

- Formulação geral de problemas de otimização restrita:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \leq 0; & i = 1, \dots, p \\ h_j(\mathbf{x}) = 0; & j = 1, \dots, q \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{cases}$$



Problema de Otimização Restrita

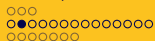
Duas considerações razoáveis:

- Estratégias rudimentares usualmente eliminam as soluções infactíveis. Embora muito simples, estão longe de assegurar eficácia e/ou eficiência. Muitas vezes, determinar uma solução factível representa um grande desafio. Por isso, essas técnicas devem ser evitadas!
- Na maioria dos casos, a solução ótima está na fronteira da região viável. A evolução de soluções em ambos os lados dessa fronteira favorece a convergência para o ótimo. Operadores inteligentes podem ser elaborados considerando-se essa premissa.



Sumário

- 1 **Técnicas para Tratamento de Restrições**
 - Problema de Otimização Restrita
 - **Métodos Baseados em Penalidade**
 - Outras Abordagens Propostas na Literatura



Introdução

- A abordagem dos Métodos de Penalidade consiste na transformação do problema restrito original em um problema irrestrito equivalente.

- Dois problemas são ditos equivalentes se possuem a mesma solução.



Introdução

Nos Métodos de Penalidade, penalidades são adicionadas à função-objetivo:

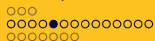
- 1 **Métodos de penalidade interior ou métodos Barreira:** pontos gerados devem ser sempre viáveis e qualquer tentativa de sair da região factível é penalizada (não será visto!).
- 2 **Métodos de penalidade exterior ou métodos de Penalidade:** qualquer violação de alguma restrição é penalizada no valor da função-objetivo.



Métodos de Penalidade

Considerando que a solução ótima reside na fronteira da região factível:

- Nos métodos de penalidade exterior, a solução ótima é aproximada **externamente** por uma sequência de soluções do problema irrestrito transformado.



Método de Penalidade Exterior

Função de penalidade

Uma função de penalidade deve atender as seguintes condições:

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}) > 0, & \text{se } \mathbf{x} \notin \mathcal{F} \\ p(\mathbf{x}) = 0, & \text{se } \mathbf{x} \in \mathcal{F} \end{cases}$$



Método de Penalidade Exterior

Função de penalidade

No caso de um problema com uma restrição de igualdade:

$$\begin{array}{l} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a } h(\mathbf{x}) = 0 \end{array} \Rightarrow \min f(\mathbf{x}) + \underbrace{u [h(\mathbf{x})]^2}_{p(\mathbf{x}, u)}$$

No caso de um problema com uma restrição de desigualdade:

$$\begin{array}{l} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a } g(\mathbf{x}) \leq 0 \end{array} \Rightarrow \min f(\mathbf{x}) + \underbrace{u \max [0, g(\mathbf{x})]^2}_{p(\mathbf{x}, u)}$$



Método de Penalidade Exterior

Função de penalidade

De forma geral temos:

$$p(\mathbf{x}, u) = u \left\{ \sum_{i=1}^p \max [0, g_i(\mathbf{x})]^2 + \sum_{j=1}^q [h_j(\mathbf{x})]^2 \right\}$$



Método de Penalidade Exterior

Exemplo

Seja o problema $\min f(x)$, com $f(x) = x$, sujeito a $g(x) = -x + 3 \leq 0$.



Método de Penalidade Exterior

Exemplo

Seja o problema $\min f(x)$, com $f(x) = x$, sujeito a $g(x) = -x + 3 \leq 0$.

Solução

Usando $p(x) = \max[0, g(x)]^2$, tem-se:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 3 \\ (3 - x)^2, & x < 3 \end{cases}$$

Para $x < 3$, $f(x) + p(x, u) = x + u(3 - x)^2$. Assim:

$$\frac{df}{dx} = 1 - 2u(3 - x) = 0 \rightarrow x^* = 3 - \frac{1}{2u}$$

Com $u \rightarrow \infty$, temos $x^* \rightarrow 3^-$.



Método de Penalidade Exterior

Exemplo

Seja o problema

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) &= (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 \\ \text{s.a } h(\mathbf{x}) &= x_1 - 2 = 0 \end{aligned}$$



Método de Penalidade Exterior

Algoritmo 1: Método de Penalidade Exterior

Input: $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$, $u_0 > 0$, função-objetivo $f(\cdot)$ e restrições $\mathbf{g}(\cdot)$ e $\mathbf{h}(\cdot)$

- 1 $k \leftarrow 0$;
 - 2 **while** \neg critério de parada **do**
 - 3 Começando de \mathbf{x}_k , encontre $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}, u_k)$;
 - 4 $u_{k+1} \leftarrow \alpha u_k$, com $\alpha > 1$;
 - 5 $k \leftarrow k + 1$;
 - 6 **end**
-



Considerações finais

A teoria prevê que a solução converge para a solução ótima quando $u_k \rightarrow \infty$, porém:

- A Hessiana da função-objetivo penalizada depende de u_k e pode apresentar mal-condicionamento numérico para u_k extremo.



Considerações finais

Algumas modificações pertinentes:

- Usar termos de penalidade distintos para cada restrição, evitando problemas de escala.

$p(\mathbf{x})$ ponderada

$$p(\mathbf{x}) = K^\beta \left\{ \sum_{i=1}^p u_i \max[0, g_i(\mathbf{x})]^2 + \sum_{j=1}^q u_j [h_j(\mathbf{x})]^2 \right\}$$

em que K é uma função crescente e β usualmente igual a 1 ou 2.



Considerações finais

Algumas modificações pertinentes:

- Penalizar apenas as restrições mais violadas.

$p(\mathbf{x})$ máxima

$$p(\mathbf{x}) = K^\beta \left\{ u^{(g)} \max \left[0, \max_i g_i(\mathbf{x}) \right]^2 + u^{(h)} \left[\max_j |h_j(\mathbf{x})| \right]^2 \right\}$$

em que K é uma função crescente e β usualmente igual a 1 ou 2.



Considerações finais

Algumas modificações pertinentes:

- Usar termos de penalidade adaptativos para cada restrição.

$p(\mathbf{x})$ adaptativa

$$p(\mathbf{x}) = K^\beta \left\{ \sum_{i=1}^p u_i(k) \max[0, g_i(\mathbf{x})]^2 + \sum_{j=1}^q u_j(k) [h_j(\mathbf{x})]^2 \right\}$$

em que

$$u_i(k+1) = \begin{cases} u_i(k)\gamma_1 & \text{se } \mathbf{x}^* \text{ foi inviável nas últimas } G \text{ iterações} \\ u_i(k)/\gamma_2 & \text{se } \mathbf{x}^* \text{ foi factível nas últimas } G \text{ iterações} \\ u_i(k) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\gamma_1, \gamma_2 > 1$, e u_i e u_j são atualizados a cada G iterações.



Sumário

- 1 Técnicas para Tratamento de Restrições**
 - Problema de Otimização Restrita
 - Métodos Baseados em Penalidade
 - Outras Abordagens Propostas na Literatura



Métodos de Reparo

- Métodos de Reparo transformam uma solução inviável em uma factível.

métodos de reparo

- essas estratégias são fortemente dependentes do problema e da representação do mesmo;
- as estratégias devem ser cuidadosamente elaboradas para evitar a perda de diversidade e/ou a capacidade de exploração do espaço de busca;
- podem ser caras computacionalmente.



Operadores de Variação Inteligentes

- Operadores de variação inteligentes sempre geram soluções factíveis a partir de alternativas viáveis.

operadores inteligentes

- necessariamente dependem do problema e da representação do mesmo;
- em geral, são difíceis de projetar, mas melhoram significativamente a eficiência do algoritmo de otimização;
- operadores especializados na geração de soluções nas proximidades da “fronteira” são usualmente elaborados.



Transformação de Restrições em Objetivos Adicionais

- Ao invés de considerar as funções de restrição, as mesmas podem ser convertidas em um ou vários objetivos adicionais.

geração de objetivos adicionais

- um problema de otimização mono-objetivo com p restrições $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ pode ser transformado em um problema irrestrito composto de $1 + 1$ funções objetivo:

$$f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \max[0, g_i(\mathbf{x})]$$

ou $p + 1$ funções objetivo:

$$f_i(\mathbf{x}) = \max[0, g_i(\mathbf{x})], \forall i \in [1, \dots, p].$$

- entretanto, problemas com “muitos objetivos” trazem inúmeras outras dificuldades; atualmente é um problema em aberto na literatura.



Seleção por Torneio Binário

- A estratégia de Seleção por Torneio Binário compara a solução atual com a nova alternativa gerada, priorizando a factibilidade:

seleção por torneio binário

- se ambas as soluções são viáveis, escolhe-se a melhor;
- se apenas uma é viável, esta vence a competição;
- se ambas são inviáveis, vence a alternativa com menor violação.

A medida de violação das restrições pode ser obtida via $p(\mathbf{x})$.



Seleção por Torneio Binário Modificado

- A estratégia de Seleção por Torneio Binário compara a solução atual com a nova alternativa gerada, priorizando a factibilidade:

seleção por torneio binário

- se ambas as soluções são viáveis, escolhe-se uma aleatoriamente;
- se apenas uma é viável, esta vence a competição;
- se ambas são inviáveis, vence a alternativa com menor violação.

A medida de violação das restrições pode ser obtida via $p(\mathbf{x})$.



Stochastic Ranking

- A estratégia SR estabelece uma relação de compromisso entre função objetivo e factibilidade:

stochastic ranking

- se $g_i(\mathbf{x}_1), g_i(\mathbf{x}_2) \leq 0 \forall i \parallel rand() \leq p_f$,
 - $\mathbf{x}_{new} = best(f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2))$;
- caso contrário,
 - $\mathbf{x}_{new} = best(p(\mathbf{x}_1), p(\mathbf{x}_2))$;

Geralmente emprega-se $0.4 < p_f < 0.9$.



Literatura Especializada



Singiresu S. Rao, Engineering Optimization: Theory and Practice, Wiley, 4th ed., 2009.



J. Dréo, P. Siarry, A. Pétrowski, E. Taillard, Metaheuristics for Hard Optimization: Methods and Case Studies, Springer, 2006.