Prof. Lucas de Souza Batista - DEE/EE/UFMG

Otimização de Redes

Caminhos Mínimos

Problema do Caminho Mínimo

- Problema do caminho mais curto
  - O objetivo é determinar o *caminho mínimo* entre dois nós arbitrários no grafo.
  - Representa um dos problemas mais simples e comuns em grafos.
  - Frequente em aplicações práticas, tanto diretamente quanto como subproblemas de outros mais difíceis.

Problema do Caminho Mínimo

- Problema do caminho mais curto
  - É um caso especial do *problema de transbordo*, em que se quer transportar, ao menor custo, *uma única unidade de produto* do nó *1* ao nó *n*;
  - Os demais nós do grafo são todos de transbordo;
  - Cada arco do grafo representa o custo c_{ij} do problema de transbordo.

Formulação

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in S(i)} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in S(1)} x_{1j} = 1$$

$$\sum_{i \in P(n)} x_{in} = 1$$

$$\sum_{i \in P(j)} x_{ij} = \sum_{k \in S(j)} x_{jk} \quad \forall j = 2, \ldots, n-1$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \ , \ j = 1, \ldots, n$$

Algoritmo de Dijkstra

Entradas:

- *G(N,E)*
- *1*: nó inicial
- *n*: nó final
- *c(i,j)*: custo do arco *(i,j)* ***(PREMISSA: c(i,j) ≥ 0)***

Saídas:

- *d(n)*: menor custo/distância entre *1* e *n*
- *C*: caminho mínimo entre *1* e *n*

Passo 1: Início

1. $R \leftarrow \{1\}$. % *nós rotulados*
2. $NR \leftarrow \{2,\ldots,n\}$. % *nós não rotulados*
3. $d(1) \leftarrow 0$.
4. $p(1) \leftarrow 0$. % *indica o nó predecessor do nó argumento*
5. **Para todo** $i \in NR$:
   - A. $d(i) \leftarrow \infty$.
   - B. $p(i) \leftarrow n+1$.
6. $a \leftarrow 1$. % *último nó rotulado*

Passo 2:

1. **Para todo** $i \in NR$:
   - A. $d(i) \leftarrow \min\{d(i), d(a)+c(a,i)\}$.
   - B. **Se** $d(i)$ foi atualizada: *(i.e.* $d(i) = d(a)+c(a,i)$*)*
     - I. $p(i) \leftarrow a$.
2. **Se** $d(i) = \infty \ \forall i \in NR$:
   - **A. Pare!** *% não existe caminho de 1 a qualquer nó em NR*
3. **Se não**:
   - A. Determine $k \in NR \mid d(k) = \min\{d(i)\}$.
   - *B.* $NR \leftarrow NR - \{k\}$.
   - *C.* $R \leftarrow R + \{k\}$.
   - *D.* $a \leftarrow k$.

Passo 3:

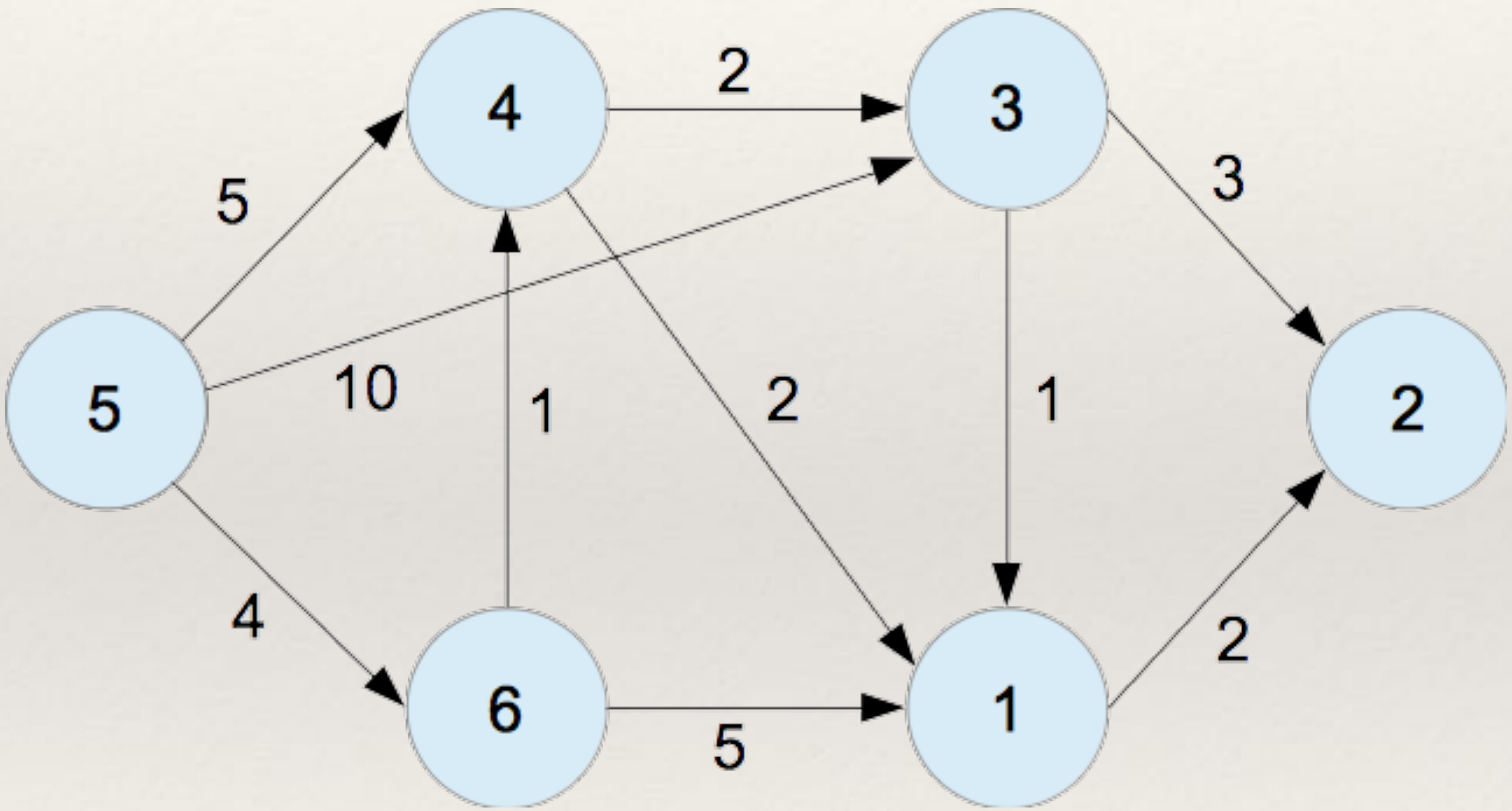
1. **Se** $a = n$:

   A. Recupere o caminho mínimo *C*, a partir de $p(.)$, iniciando por $p(n)$.

2. **Se não**:

   A. Retorne ao passo 2.

Exemplo



Passo 1:

- $R=\{5\}$
- $NR=\{1,2,3,4,6\}$
- $d(5)=0$, $p(5)=0$
- $d(i)=\infty$, $p(i)=7$ $(i=1,2,3,4,6)$
- $a=5$

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1),d(5)+c(5,1)\} = \min\{\infty,0+\infty\}=\infty$
- $d(2) = \min\{d(2),d(5)+c(5,2)\} = \min\{\infty,0+\infty\}=\infty$
- $d(3) = \min\{d(3),d(5)+c(5,3)\} = \min\{\infty,0+10\}=10$ e $p(3) = 5$
- $d(4) = \min\{d(4),d(5)+c(5,4)\} = \min\{\infty,0+5\}=5$ e $p(4) = 5$
- $d(6) = \min\{d(6),d(5)+c(5,6)\} = \min\{\infty,0+4\}=4$ e $p(6) = 5$
- $k=6$
- $R=\{5,6\}$
- $NR=\{1,2,3,4\}$
- $a=6$

Passo 3:

- O nó 2 não foi rotulado:
    - voltar ao Passo 2.

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1),d(6)+c(6,1)\} = \min\{\infty,4+5\}=9$ e $p(1)=6$
- $d(2) = \min\{d(2),d(6)+c(6,2)\} = \min\{\infty,4+\infty\}=\infty$
- $d(3) = \min\{d(3),d(6)+c(6,3)\} = \min\{10,4+\infty\}=10$
- $d(4) = \min\{d(4),d(6)+c(6,4)\} = \min\{5,4+1\}=5$
- $k=4$
- $R=\{5,6,4\}$
- $NR=\{1,2,3\}$
- $a=4$

Passo 3:

- O nó 2 não foi rotulado:
  - voltar ao Passo 2.

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1), d(4)+c(4,1)\} = \min\{9, 5+2\} = 7$ e $p(1) = 4$
- $d(2) = \min\{d(2), d(4)+c(4,2)\} = \min\{\infty, 5+\infty\} = \infty$
- $d(3) = \min\{d(3), d(4)+c(4,3)\} = \min\{10, 5+2\} = 7$ e $p(3) = 4$
- $k=3$
- $R=\{5,6,4,3\}$
- $NR=\{1,2\}$
- $a=3$

Passo 3:

- O nó 2 não foi rotulado:
  - voltar ao Passo 2.

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1), d(3)+c(3,1)\} = \min\{7, 7+1\}=7$
- $d(2) = \min\{d(2), d(3)+c(3,2)\} = \min\{\infty, 7+3\}=10$ *e* $p(2) = 3$
- $k=1$
- $R=\{5,6,4,3,1\}$
- $NR=\{2\}$
- $a=1$

Passo 3:

- O nó 2 não foi rotulado:
  - voltar ao Passo 2.

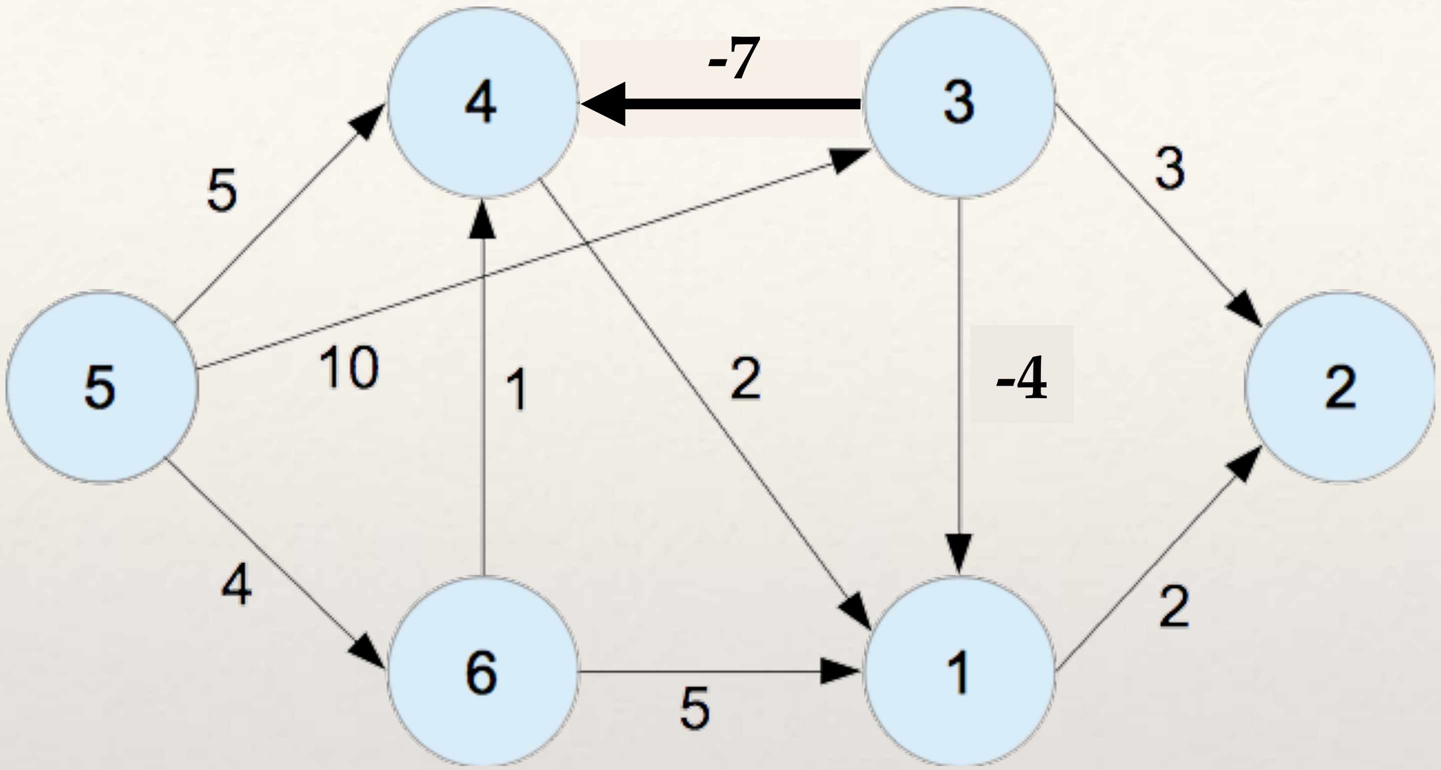
Passo 2:

- $d(2) = \min\{d(2),d(1)+c(1,2)\} = \min\{10,7+2\}=9$ *e* $p(2)=1$
- $k=2$
- $R=\{5,6,4,3,1,2\}$
- $NR=\{\}$
- $a=2$

Passo 3:

- O nó 2 foi rotulado:
  - $p(2)=1, p(1)=4, p(4)=5, p(5)=0$
  - $C = \{(5,4),(4,1),(1,2)\}$
  - $D = d(2) = 9$

Limitação do Alg. de Dijkstra



- Qual o menor caminho entre os nós 5 e 2?
  - d(4) = 5 (via Dijkstra),
  - entretanto, o menor caminho passa pelos nós 5, 3 e 4, com comprimento 3.
  - Dijkstra falha quando existem arcos negativos!

Algoritmo de Ford

Dados:

- *G(N,E)*
- *1*: nó inicial
- *n*: nó final
- *c(i,j)*: custo do arco *(i,j)* ***(c(i,j) pode ser negativo)***

Saída:

- *d(n)*: menor custo/distância entre *1* e *n*
- C: caminho mínimo entre *1* e *n*

Passo 1: Início

1. $R \leftarrow \{1\}$.
2. $NR \leftarrow \{2,\ldots,n\}$.
3. $d(1) \leftarrow 0$.
4. $p(1) \leftarrow 0$.
5. $r(1) \leftarrow 1$. *(número de vezes que um nó já foi rotulado)*
6. **Para todo** $i \in NR$:
   A. $d(i) \leftarrow \infty$.
   B. $p(i) \leftarrow n+1$.
   C. $r(i) \leftarrow 0$.
7. $a \leftarrow 1$.
8. $sinal \leftarrow 1$. *(assume 0 quando todos os nós são rotulados e não se observa nenhuma redução de d(i), ou 1 caso contrário)*

Passo 2:

1. **Para todo** $v \in N$:
   A. $d(v) \leftarrow min\{d(v),d(a)+c(a,v)\}$.
   B. **Se** $d(v) = d(a)+c(a,v)$:
      I. $p(v) \leftarrow a$.
2. **Se** $d(v) = \infty\ \forall v \in NR$:
   A. Pare!
3. **Se** $\exists v \in R \mid d(v)$ decresceu de valor:
   A. $R \leftarrow R - \{v\}$.
   B. $NR \leftarrow NR + \{v\}$.

Passo 3:

1. **<u>Se</u>** $NR \neq \emptyset$:

    A. Determine $k \in NR \mid d(k) = \min\{d(k)\}$.

    B. $NR \leftarrow NR - \{k\}$.

    C. $R \leftarrow R + \{k\}$.

    D. $a \leftarrow k$.

    E. $r(a) \leftarrow r(a)+1$.

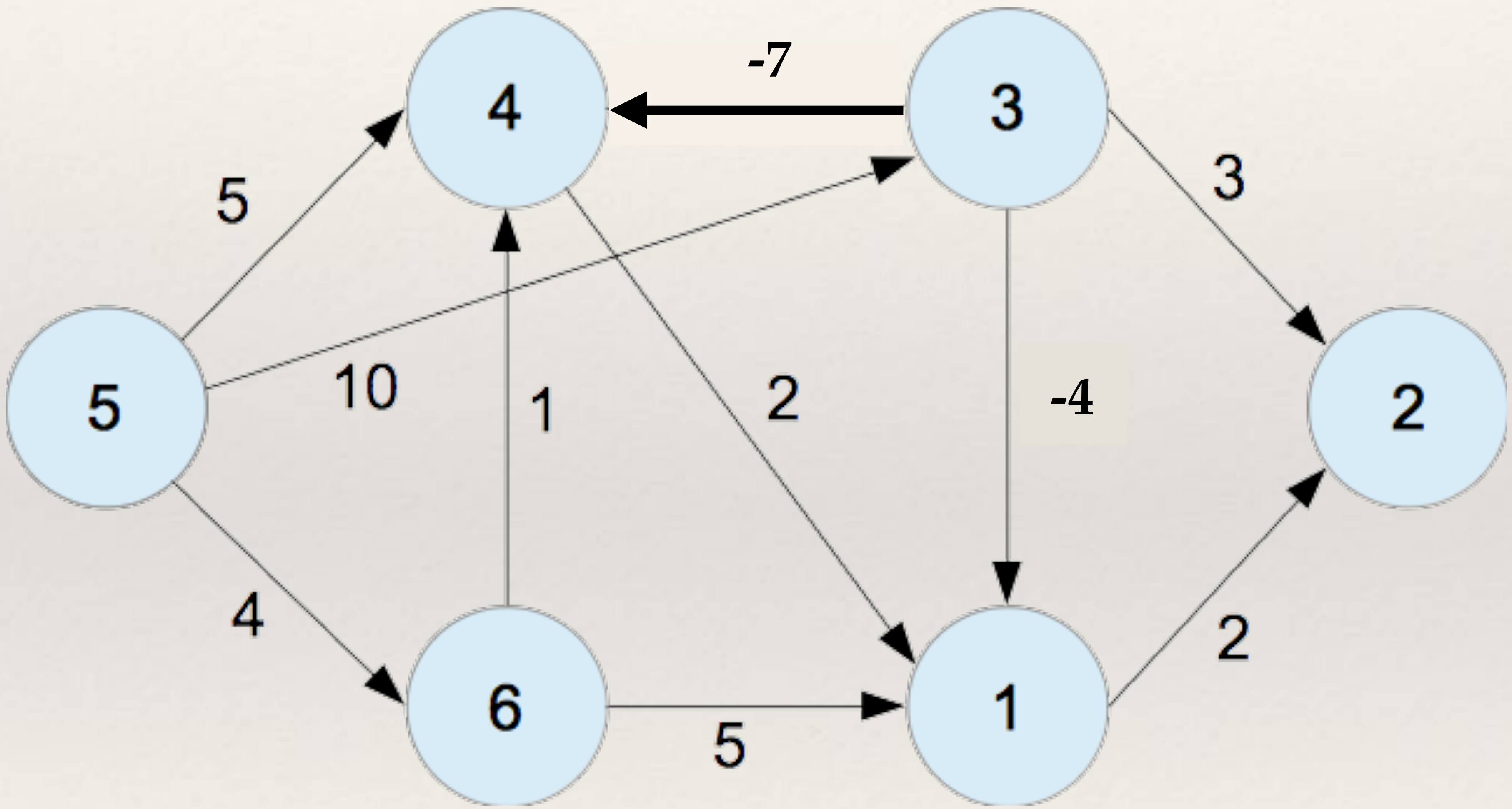
2. **<u>Se não</u>** (i.e., $NR = \emptyset$):

    A. $sinal \leftarrow 0$.

Passo 4:

1. **Se** $sinal = 0$:
   A. Recupere o caminho mínimo C, a partir de $p(.)$, iniciando por $p(n)$.
2. **Se não**:
   A. **Se** $\exists\, r(i) \geq n$:
      I. Pare! *(existe um ciclo com comprimento total negativo)*
   B. **Se não**:
      I. Retorne ao passo 2.

Exemplo



Passo 1:

- $R=\{5\}$
- $NR=\{1,2,3,4,6\}$
- $d(5)=0,\ p(5)=0,\ r(5)=1$
- $d(i)=\infty,\ p(i)=7,\ r(i)=0,\ i=1,2,3,4,6$
- $a=5$
- $sinal=1$

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1),d(5)+c(5,1)\} = \min\{\infty,0+\infty\}=\infty$
- $d(2) = \min\{d(2),d(5)+c(5,2)\} = \min\{\infty,0+\infty\}=\infty$
- $d(3) = \min\{d(3),d(5)+c(5,3)\} = \min\{\infty,0+10\}=10$ e $p(3) = 5$
- $d(4) = \min\{d(4),d(5)+c(5,4)\} = \min\{\infty,0+5\}=5$ e $p(4) = 5$
- $d(5) = \min\{d(5),d(5)+c(5,5)\} = \min\{0,0+0\}=0$
- $d(6) = \min\{d(6),d(5)+c(5,6)\} = \min\{\infty,0+4\}=4$ e $p(6) = 5$
- $k=6$
- $NR=\{1,2,3,4\}$
- $R=\{5,6\}$
- $r(6)=1$
- $a=6$

Passo 3:

- Como *sinal* $= 1$ e $r(i) < 6$ para todo i:
  - Voltar ao Passo 2.

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1),d(6)+c(6,1)\} = \min\{\infty,4+5\}=9$ *e* $p(1)=6$
- $d(2) = \min\{d(2),d(6)+c(6,2)\} = \min\{\infty,4+\infty\}=\infty$
- $d(3) = \min\{d(3),d(6)+c(6,3)\} = \min\{10,4+\infty\}=10$
- $d(4) = \min\{d(4),d(6)+c(6,4)\} = \min\{5,4+1\}=5$
- $d(5) = \min\{d(5),d(6)+c(6,5)\} = \min\{0,4+\infty\}=0$ *(manteve valor)*
- $d(6) = \min\{d(6),d(6)+c(6,6)\} = \min\{4,4+0\}=4$ *(manteve valor)*
- $k=4$
- $NR=\{1,2,3\}$
- $R=\{5,6,4\}$
- $r(4)=1$
- $a=4$

Passo 3:

- Como *sinal* $= 1$ e $r(i) < 6$ para todo i:
  - Voltar ao Passo 2.

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1),d(4)+c(4,1)\} = \min\{9,5+2\}=7$ e $p(1)=4$
- $d(2) = \min\{d(2),d(4)+c(4,2)\} = \min\{\infty,5+\infty\}=\infty$
- $d(3) = \min\{d(3),d(4)+c(4,3)\} = \min\{10,5+\infty\}=10$
- $d(4) = \min\{d(4),d(4)+c(4,4)\} = \min\{5,5+0\}=5$ *(manteve valor)*
- $d(5) = \min\{d(5),d(4)+c(4,5)\} = \min\{0,5+\infty\}=0$ *(manteve valor)*
- $d(6) = \min\{d(6),d(4)+c(4,6)\} = \min\{4,5+\infty\}=4$ *(manteve valor)*
- $k=1$
- $NR=\{2,3\}$
- $R=\{5,6,4,1\}$
- $r(1)=1$
- $a=1$

Passo 3:

- Como *sinal* = 1 e $r(i) < 6$ para todo i:
    - Voltar ao Passo 2.

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1),d(1)+c(1,1)\} = \min\{7,7+0\}=7$ *(manteve valor)*
- $d(2) = \min\{d(2),d(1)+c(1,2)\} = \min\{\infty,7+2\}=9$ *e* $p(2)=1$
- $d(3) = \min\{d(3),d(1)+c(1,3)\} = \min\{10,7+\infty\}=10$
- $d(4) = \min\{d(4),d(1)+c(1,4)\} = \min\{5,7+\infty\}=5$ *(manteve valor)*
- $d(5) = \min\{d(5),d(1)+c(1,5)\} = \min\{0,7+\infty\}=0$ *(manteve valor)*
- $d(6) = \min\{d(6),d(1)+c(1,6)\} = \min\{4,7+\infty\}=4$ *(manteve valor)*
- $k = 2$
- $NR=\{3\}$
- $R=\{5,6,4,1,2\}$
- $r(2)=1$
- $a = 2$

Passo 3:

- Como *sinal* $= 1$ e $r(i) < 6$ para todo i:
  - Voltar ao Passo 2.

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1),d(2)+c(2,1)\} = \min\{7,9+\infty\}=7$ *(manteve valor)*
- $d(2) = \min\{d(2),d(2)+c(2,2)\} = \min\{9,9+0\}=9$ *(manteve valor)*
- $d(3) = \min\{d(3),d(2)+c(2,3)\} = \min\{10,9+\infty\}=10$
- $d(4) = \min\{d(4),d(2)+c(2,4)\} = \min\{5,9+\infty\}=5$ *(manteve valor)*
- $d(5) = \min\{d(5),d(2)+c(2,5)\} = \min\{0,9+\infty\}=0$ *(manteve valor)*
- $d(6) = \min\{d(6),d(2)+c(2,6)\} = \min\{4,9+\infty\}=4$ *(manteve valor)*
- $k = 3$
- $NR=\{\}$
- $R=\{5,6,4,1,2,3\}$
- $r(3)=1$
- $a = 3$

Passo 3:

- Como *sinal* $= 1$ e $r(i) < 6$ para todo i:
    - Voltar ao Passo 2.

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1),d(3)+c(3,1)\} = \min\{7,10-4\}=6$ e $p(1)=3$ (reduziu valor)
- $d(2) = \min\{d(2),d(3)+c(3,2)\} = \min\{9,10+3\}=9$ (manteve valor)
- $d(3) = \min\{d(3),d(3)+c(3,3)\} = \min\{10,10+0\}=10$ (manteve valor)
- $d(4) = \min\{d(4),d(3)+c(3,4)\} = \min\{5,10-7\}=3$ e $p(4)=3$ (reduziu valor)
- $d(5) = \min\{d(5),d(3)+c(3,5)\} = \min\{0,10+\infty\}=0$ (manteve valor)
- $d(6) = \min\{d(6),d(3)+c(3,6)\} = \min\{4,10+\infty\}=4$ (manteve valor)
- $R=\{5,6,2,3\}$
- $NR=\{1,4\}$
- $k = 4$
- $NR=\{1\}$
- $R=\{5,6,2,3,4\}$
- $r(4)=2$
- $a = 4$

Passo 3:

- Como *sinal* $= 1$ e $r(i) < 6$ para todo i:
    - Voltar ao Passo 2.

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1),d(4)+c(4,1)\} = \min\{6,3+2\}=5$ e $p(1)=4$
- $d(2) = \min\{d(2),d(4)+c(4,2)\} = \min\{9,3+\infty\}=9$ *(manteve valor)*
- $d(3) = \min\{d(3),d(4)+c(4,3)\} = \min\{10,3+\infty\}=10$ *(manteve valor)*
- $d(4) = \min\{d(4),d(4)+c(4,4)\} = min\{3,3+0\}=3$ *(manteve valor)*
- $d(5) = \min\{d(5),d(4)+c(4,5)\} = min\{0,3+\infty\}=0$ *(manteve valor)*
- $d(6) = \min\{d(6),d(4)+c(4,6)\} = min\{4,3+\infty\}=4$ *(manteve valor)*
- $k = 1$
- $NR=\{\}$
- $R=\{5,6,2,3,4,1\}$
- $r(1)=2$
- $a = 1$

Passo 3:

- Como *sinal* $= 1$ e $r(i) < 6$ para todo i:
  - Voltar ao Passo 2.

Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1),d(1)+c(1,1)\} = \min\{5,5+0\}=5$ *(manteve valor)*
- $d(2) = \min\{d(2),d(1)+c(1,2)\} = \min\{9,5+2\}=7$ *e* $p(2)=1$ *(reduziu valor)*
- $d(3) = \min\{d(3),d(1)+c(1,3)\} = \min\{10,5+\infty\}=10$ *(manteve valor)*
- $d(4) = \min\{d(4),d(1)+c(1,4)\} = \min\{3,5+\infty\}=3$ *(manteve valor)*
- $d(5) = \min\{d(5),d(1)+c(1,5)\} = \min\{0,5+\infty\}=0$ *(manteve valor)*
- $d(6) = \min\{d(6),d(1)+c(1,6)\} = \min\{4,5+\infty\}=4$ *(manteve valor)*
- $R=\{5,6,3,4,1\}$
- $NR=\{2\}$
- $k = 2$
- $NR=\{\}$
- $R=\{5,6,3,4,1,2\}$
- $r(2)=2$
- $a = 2$

Passo 3:

- Como *sinal* $= 1$ e $r(i) < 6$ para todo i:
  - Voltar ao Passo 2.

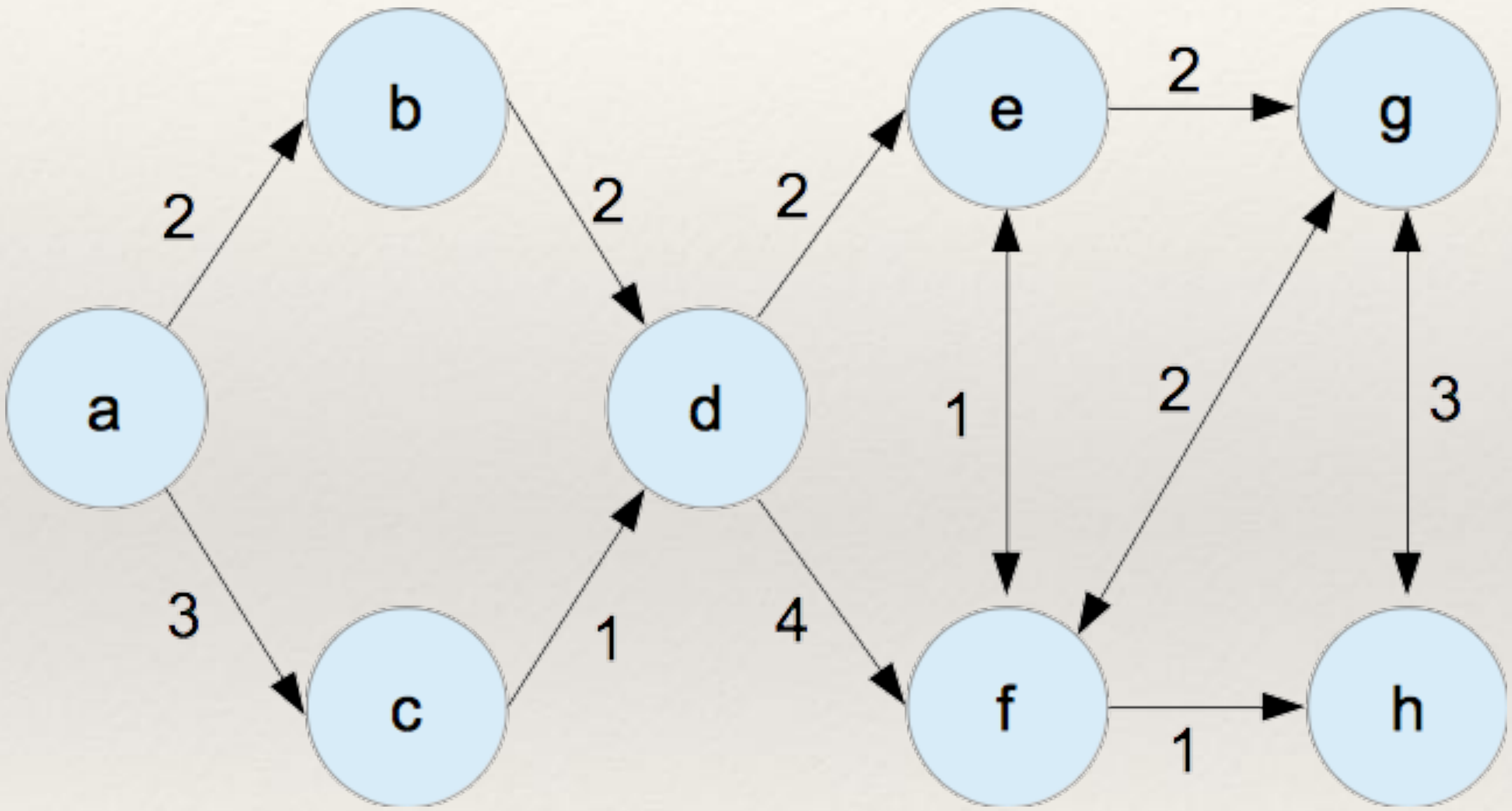
Passo 2:

- $d(1) = \min\{d(1),d(2)+c(2,1)\} = \min\{5,7+\infty\}=5$ *(manteve valor)*
- $d(2) = \min\{d(2),d(2)+c(2,2)\} = \min\{7,7+0\}=7$ *(manteve valor)*
- $d(3) = \min\{d(3),d(2)+c(2,3)\} = \min\{10,7+\infty\}=10$ *(manteve valor)*
- $d(4) = \min\{d(4),d(2)+c(2,4)\} = \min\{3,7+\infty\}=3$ *(manteve valor)*
- $d(5) = \min\{d(5),d(2)+c(2,5)\} = \min\{0,7+\infty\}=0$ *(manteve valor)*
- $d(6) = \min\{d(6),d(2)+c(2,6)\} = \min\{4,7+\infty\}=4$ *(manteve valor)*
- $sinal = 0$

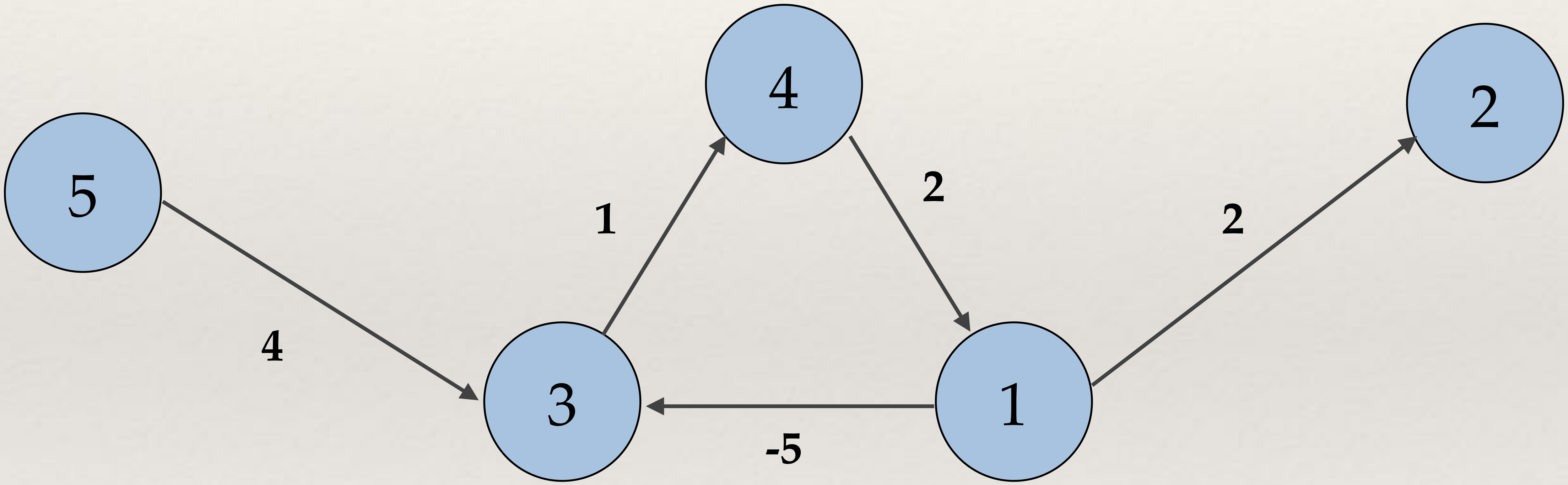
Passo 3:

- Como *sinal* $= 0$:
  - $p(2)=1$, $p(1)=4$, $p(4)=3$, $p(3)=5$, $p(5)=0$.
  - $C=\{(5,3),(3,4),(4,1),(1,2)\}$
  - $D=d(2)=7$

Exercício



Exercício



Considerações Adicionais

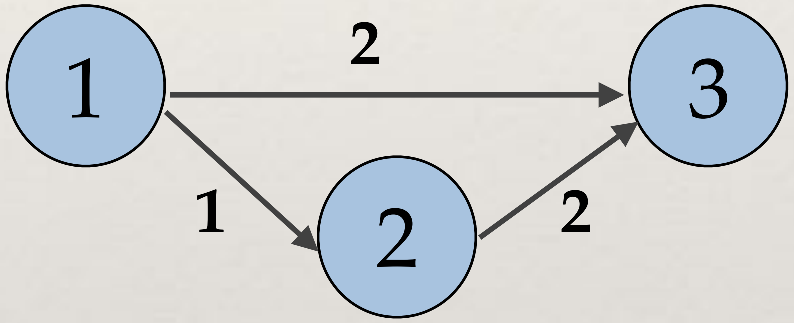
- Como determinar as distâncias mínimas entre todos os pares de nós do grafo?
  - aplicar Dijkstra ou Ford repetidas vezes; ou
  - aplicar o algoritmo de Floyd:
    - emprega programação dinâmica (recursiva);
    - obtém distâncias mínimas e caminhos mínimos;
    - aceita arcos negativos, mas não podem existir circuitos negativos.

Algoritmo de Floyd

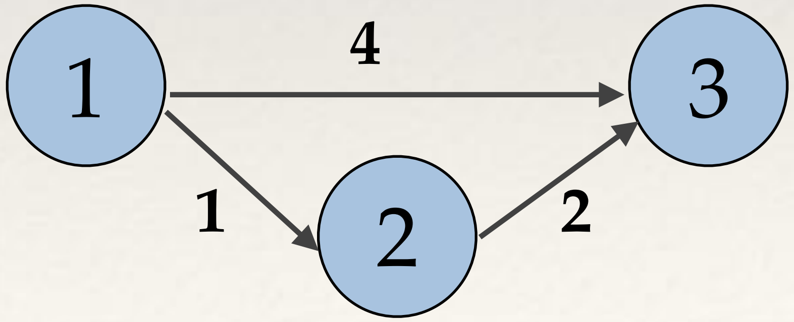
- Na k-ésima iteração, determina-se o caminho mínimo entre os nós i e j utilizando somente os k primeiros nós.
- Considerando n nós em um grafo, então $d^{n}(i,j)$ fornece a menor distância entre os nós i e j.
- $d^{k}(i,j)$ é a menor distância entre os nós i e j, dentre todos os caminhos que <u>podem passar</u> pelos k primeiros nós.
- O menor caminho de i a j que <u>pode passar</u> apenas pelos k primeiros nós PASSA ou NÃO pelo k-ésimo nó:
  - se não passa, então $d^{k}(i,j) = d^{k-1}(i,j)$
  - se passa, então $d^{k}(i,j) = d^{k-1}(i,k) + d^{k-1}(k,j)$
- Logo, tem-se a fórmula recursiva: $d^{k}(i,j) \leftarrow min\{d^{k-1}(i,j), d^{k-1}(i,k) + d^{k-1}(k,j)\}$.

Algoritmo de Floyd

- Fórmula recursiva: $d^k(i,j) \leftarrow min\{d^{k-1}(i,j), d^{k-1}(i,k) + d^{k-1}(k,j)\}$.
  - Se o menor caminho NÃO passa pelo *k*-ésimo nó:
    - $d^1(1,3) \leftarrow min\{d^0(1,3), d^0(1,2) + d^0(2,3)\} = min\{2,1+2\} = 2.$



  - Se o menor caminho PASSA pelo *k*-ésimo nó:
    - $d^1(1,3) \leftarrow min\{d^0(1,3), d^0(1,2) + d^0(2,3)\} = min\{4,1+2\} = 3.$



Algoritmo de Floyd

Dados:

- *G(N,E)*
- *c(i,j)*: custo do arco *(i,j)* ***(c(i,j) pode ser negativo, mas não pode existir circuito negativo)***

Saída:

- *d(i,j)*: menor custo do nó *i* ao nó *j*
- *p(i,j)*: penúltimo nó intermediário no caminho mínimo do nó *i* ao nó *j*

Passo 1:

1. $d^0(i,j) \leftarrow c(i,j)$ *se* $(i,j) \in E$.
2. $d^0(i,j) \leftarrow \infty$ *se* $(i,j) \notin E,\ i \neq j$.
3. $d^0(i,i) \leftarrow 0$ *para* $i = 1, \ldots, n$.
4. $p(i,j) \leftarrow i$ *para* $i, j = 1, \ldots, n$.

Passo 2:

5. **Para** $k = 1, \ldots, n$:
   A. $d^k(i,j) \leftarrow min\{d^{k-1}(i,j),\ d^{k-1}(i,k) + d^{k-1}(k,j)\}$.
   B. **Se** $d^k(i,j) = d^{k-1}(i,k) + d^{k-1}(k,j)$,
      I. $p(i,j) \leftarrow p(k,j)$.

Problema do Caminho Máximo

- Problema do caminho mais longo:
  - O objetivo é determinar o *caminho máximo* entre dois nós arbitrários no grafo.
  - Possui a mesma formulação do *problema do caminho mínimo*, mas o objetivo é uma *maximização*.
  - Podem ser empregados os mesmos algoritmos.
  - A maximização de uma função é equivalente a minimizar o negativo desta função.

Formulação

$$\max \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in S(i)} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in S(1)} x_{1j} = 1$$

$$\sum_{i \in P(n)} x_{in} = 1$$

$$\sum_{i \in P(j)} x_{ij} = \sum_{k \in S(j)} x_{jk} \quad \forall j = 2, \ldots, n-1$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \;,\; j = 1, \ldots, n$$

Um Algoritmo Recursivo

Dados:

- $G(N,E)$ ***(grafo sem circuitos)***
- *1*: nó inicial
- *n*: nó final
- $c(i,j)$: comprimento do arco (i,j)

Saída:

- t(*n*): maior comprimento entre *1* e *n*
- C: caminho máximo entre *1* e *n*

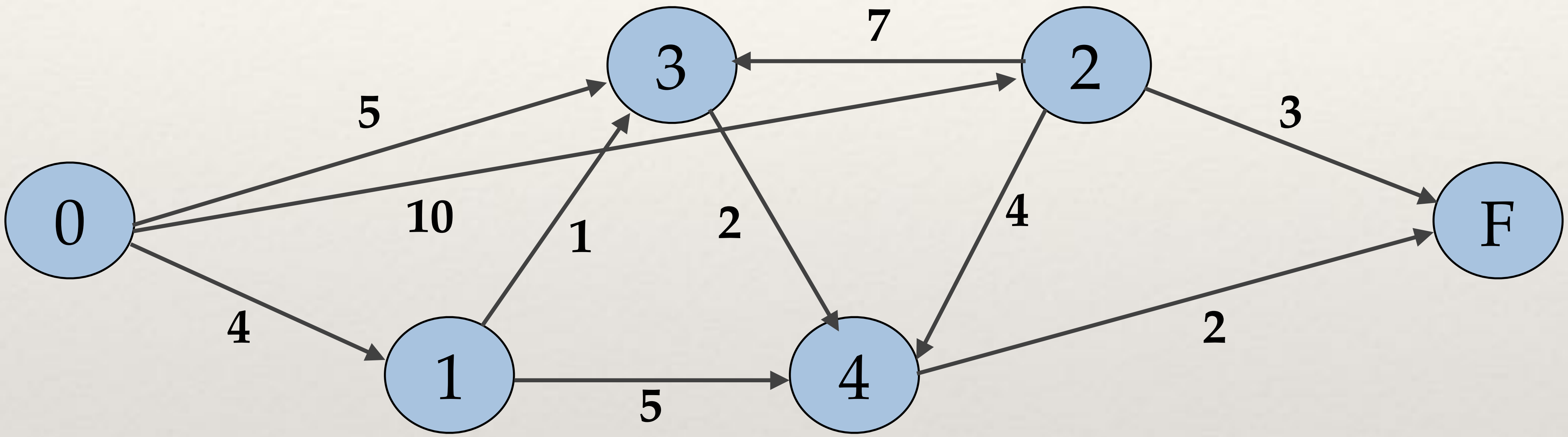
Início:

1. $R \leftarrow \{1\}$.
2. $NR \leftarrow \{2,\ldots,n\}$.
3. $t(1) \leftarrow 0$.
4. $p(1) \leftarrow \varnothing$.

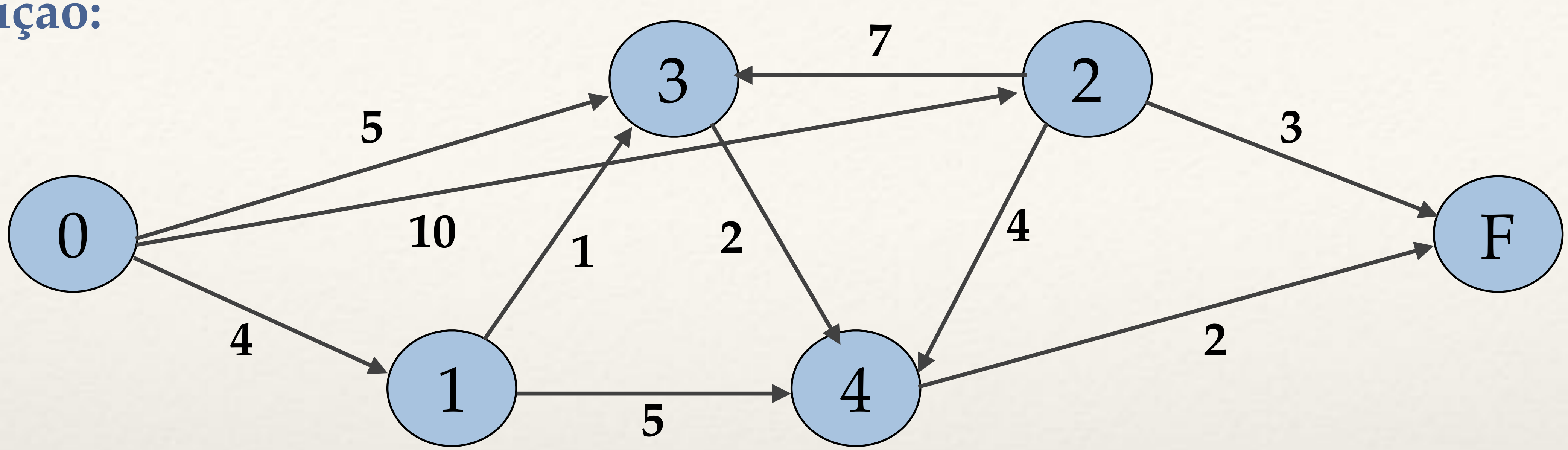
Fórmula Recursiva:

5. $t(k) = \max_{i \in p(k)} \{t(i) + c(i,k)\}$
6. $R \leftarrow R + \{k\}$.
7. $NR \leftarrow NR - \{k\}$.
8. O procedimento continua até $NR = \varnothing$.

Exemplo



Resolução:



5. $t(1) = \{t(0) + 4\} = 4$, $R = \{0, 1\}$ e $NR = \{2, 3, 4, F\}$;

6. $t(2) = \{t(0) + 10\} = 10$, $R = \{0, 1, 2\}$ e $NR = \{3, 4, F\}$;

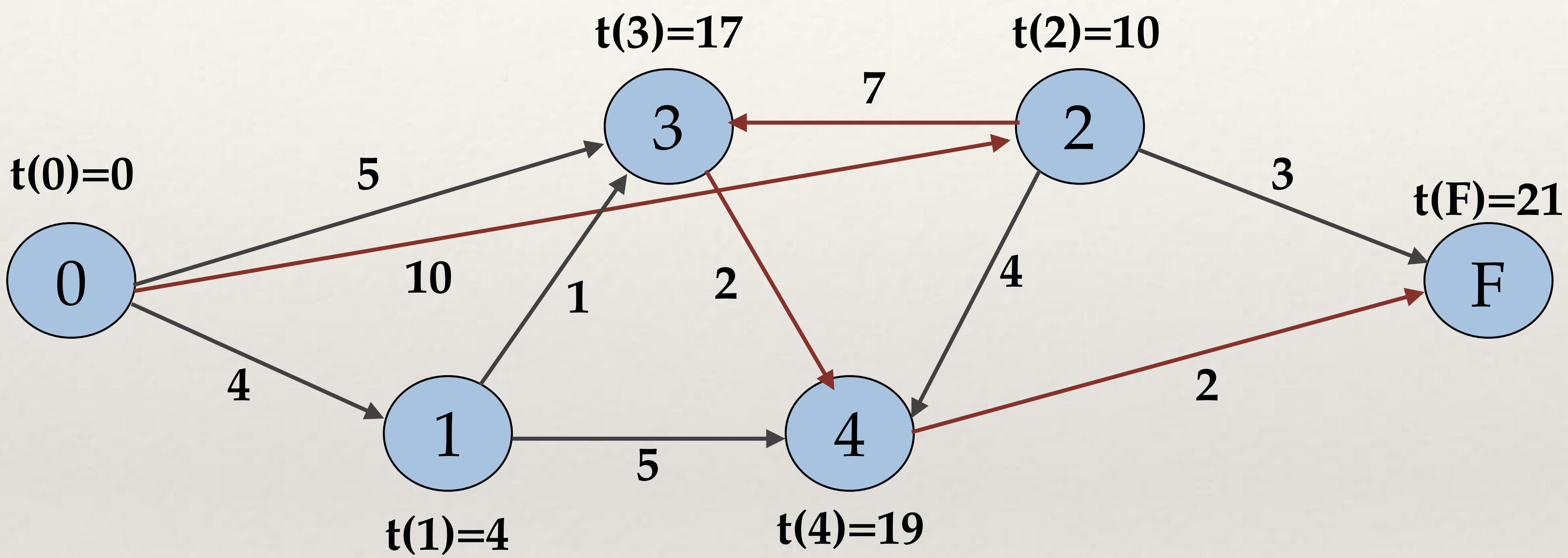
7. $t(3) = max\ \{t(0) + 5, t(1) + 1, t(2) + 7\} = 17$, $R = \{0, 1, 2, 3\}$ e $NR = \{4, F\}$;

8. $t(4) = max\ \{t(1) + 5, t(2) + 4, t(3) + 2\} = 19$, $R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $NR = \{F\}$;

9. $t(F) = max\ \{t(2) + 3, t(4) + 2\} = 21$, $R = \{0, 1, 2, 3, 4, F\}$ e $NR = \varnothing$;

10. Portanto, $C = \{(0, 2), (2, 3), (3, 4), (4, F)\}$.

Resolução:



Referências

- [Arenales et al, 2007] M. Arenales; V. Armentano; R. Morabito; H. Yanasse. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**, Editora Campus / Elsevier, 2007.
- [Goldbarg et al, 2005] M. C. Goldbarg; H. P. Luna. **Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos**, 2a ed., Editora Campus / Elsevier, 2005.
- [Hillier et al, 2013] F. S. Hillier; G. J. Lieberman. **Introdução à Pesquisa Operacional**, 9a ed., Editora Mc Graw Hill, 2013.