Prof. Lucas de Souza Batista - DEE/EE/UFMG

Otimização de Redes

Problemas de Logística:

Roteamento de Veículos
Localização de Facilidades

Problema de Roteamento de Veículos

- PRVs envolvem o projeto de rotas de entrega e/ou coleta de custo mínimo, partindo de um ou mais depósitos para um número de clientes, sujeito a restrições adicionais;

Problema de Roteamento de Veículos

- Um PRV clássico é representado em um grafo orientado completo $G = (N, E)$, em que:
  - $N = C \cup \{0, n+1\}$ é o conjunto de nós;
  - $C = \{1, \ldots, n\}$ é o conjunto de clientes;
  - 0 e $n+1$ são os nós que representam o depósito;
  - $E = \{(i, j): i, j \in N, i \neq j, i \neq n+1, j \neq 0\}$ é o conj. de arcos;
  - Todas as rotas começam em 0 e terminam em $n+1$;

Problema de Roteamento de Veículos

- Um custo c_{ij} e um tempo de viagem t_{ij} estão associados a cada arco $(i, j) \in E$;
- O tempo t_{ij} inclui o tempo de serviço do cliente i;
- Cada cliente i tem uma demanda d_i;
- Existe no depósito um conjunto K de veículos idênticos, cada um $k \in K$ com capacidade Q;
- $x_{ijk} = 1$ se o veículo k percorre o arco (i,j), $\forall k \in K$, $\forall (i,j) \in E$, e $x_{ijk} = 0$ caso contrário.

Problema de Roteamento de Veículos

- O objetivo é minimizar o custo total de viagens, sujeito às seguintes restrições:
  - cada rota inicia e termina no depósito;
  - cada cliente pertence somente a uma rota;
  - a demanda total de uma rota não pode exceder a capacidade Q do veículo;
  - o tempo de viagem de uma rota não pode exceder o limite D;

Problema de Roteamento de Veículos

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ijk} \qquad (RV1)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1, \qquad \forall i \in C \qquad (RV2)$$

$$\sum_{i \in C} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq Q, \qquad \forall k \in K \qquad (RV3)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} t_{ij} x_{ijk} \leq D, \qquad \forall k \in K \qquad (RV4)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = 1, \qquad \forall k \in K \qquad (RV5)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ihk} - \sum_{j \in N} x_{hjk} = 0, \qquad \forall h \in C, \ \forall k \in K \qquad (RV6)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,n+1,k} = 1, \qquad \forall k \in K \qquad (RV7)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \ S \subset C, 2 \leq |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \qquad \forall k \in K \qquad (RV8)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{B}^{K|E|} \qquad (RV9)$$

Problema de Roteamento de Veículos

- (RV1): minimização do custo total das rotas;
- (RV2): cada cliente i é designado a um único veículo;
- (RV3): a demanda total de cada rota do veículo k não excede sua capacidade Q;
- (RV4): a duração de cada rota do veículo k não excede o limite D;
- (RV5), (RV6) e (RV7): restrições de fluxo em redes;
- (RV8): garante não existência de sub-rotas;
- (RV9): indica o tipo de variável;

Problema de Roteamento de Veículos

- Problemas correlatos:
  - PRV com janelas de tempo;
  - PRV periódico;
  - PRV com múltiplos depósitos;
  - dentre outros.

Problema de Localização de Facilidades

- Envolvem localização de facilidades e/ou designação de clientes a facilidades;
- Exemplos típicos envolvem decisões de localização de:
  - centros de saúde, escolas, estações de bombeiros;
  - fábricas, armazéns, centros de distribuição;

Problema de Localização de Facilidades

- Parâmetros básicos:
  - J: conjunto de nós $j = 1,\ldots,n$ que representam os clientes;
  - I: conjunto de locais $i = 1,\ldots,m$ candidatos à localização de facilidades;
  - q_j: demanda do cliente j;
  - d_{ij}: distância do cliente j à facilidade localizada em i;
  - c_{ij}: custo de atender a demanda q_j a partir de uma facilidade em i;
  - f_i: custo fixo de instalação de uma facilidade no local i;
  - Q_i: capacidade da facilidade instalada no local i;
  - $y_i = 1$ se a facilidade é aberta no local i, e $y_i = 0$ caso contrário;

Problema de Localização de Facilidades

- *P*-medianas:
    - envolve a localização de p facilidades e a designação de clientes a facilidades, de modo a minimizar a soma das distâncias de clientes a facilidades;

Problema de Localização de Facilidades

- P-medianas:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \qquad (LF1)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \in J \qquad (LF2)$$

$$x_{ij} \leq y_i, \qquad \forall i \in I, \ \forall j \in J \qquad (LF3)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p, \qquad (LF4)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{B}^{|I||J|}, \ \mathbf{y} \in \mathbf{B}^{|I|} \qquad (LF5)$$

Problema de Localização de Facilidades

- *P*-medianas:
  - (LF1): minimiza o custo total de designação de clientes a facilidade;
  - (LF2): cada cliente j é atendido por uma única facilidade;
  - (LF3): cada cliente j só pode ser designado a uma facilidade aberta no local i;
  - (LF4): exatamente p facilidades são abertas;
  - (LF5): indica o tipo de variável;

Problema de Localização de Facilidades

- *P*-centros:
  - envolve a localização de p facilidades e a designação de clientes a facilidades, de modo a minimizar a distância máxima de clientes a facilidades;

Problema de Localização de Facilidades

- *P*-centros:

$$\min r \qquad (LF6)$$

$$\sum_{i \in I} d_{ij} x_{ij} \leq r, \qquad \forall j \in J \qquad (LF7)$$

$$(LF2) - (LF5)$$

- *r*: distância máxima de um cliente quando designado a uma facilidade;

Problema de Localização de Facilidades

- *P*-centros:
    - (LF6): minimiza a distância máxima de um cliente a uma facilidade;
    - (LF7): expressa r como um limitante superior da distância de cada cliente j a uma facilidade;
    - (LF2 - LF5): idênticas as do problema das p-medianas;

Problema de Localização de Facilidades

- *P*-medianas e *p*-centros com capacidade limitada:
  - nestes problemas, associa-se uma capacidade Q_i à facilidade no local i;
  - as restrições (LF3) são alteradas para:

$$\sum_{j \in J} q_j x_{ij} \leq Q_i y_i, \qquad \forall i \in I \qquad\qquad (LF8)$$

Problema de Localização de Facilidades

- Outras variações:
  - localização de facilidades com capacidade ilimitada;
  - localização de instalações com capacidade limitada;
  - localização de facilidades com capacidade limitada e fonte única;
  - dentre outros;

Referências

- [Arenales et al, 2007] M. Arenales; V. Armentano; R. Morabito; H. Yanasse. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**, Editora Campus / Elsevier, 2007.
- [Goldbarg et al, 2005] M. C. Goldbarg; H. P. Luna. **Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos**, 2a ed., Editora Campus / Elsevier, 2005.
- [Hillier et al, 2013] F. S. Hillier; G. J. Lieberman. **Introdução à Pesquisa Operacional**, 9a ed., Editora Mc Graw Hill, 2013.