Prof. Lucas de Souza Batista - DEE/EE/UFMG

Otimização de Redes

Problema do Caixeiro Viajante

Problema do Caixeiro Chinês

Problema do Caixeiro Viajante

- Considerando um conjunto de cidades, um caixeiro viajante deve visitar cada uma delas uma única vez e retornar ao ponto de partida, otimizando um ou mais objetivos;
- Pertence a classe de problemas de *roteamento em nós*;

Problema do Caixeiro Viajante

- Elementos básicos:
  - $G = (N, A)$ representa um grafo completo;
  - S representa um subgrafo de G;
  - n representa o número de nós de G;
  - c_{ij} é o custo do arco (i,j) entre os nós i e j;
  - x_{ij} vale 1 se o arco (i,j) é utilizado, e 0 caso contrário;

Problema do Caixeiro Viajante

- Formulação de *Dantzig-Fulkerson-Johnson (1954)*:

$$Minimizar\, f(x_{11}, ..., x_{nn}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

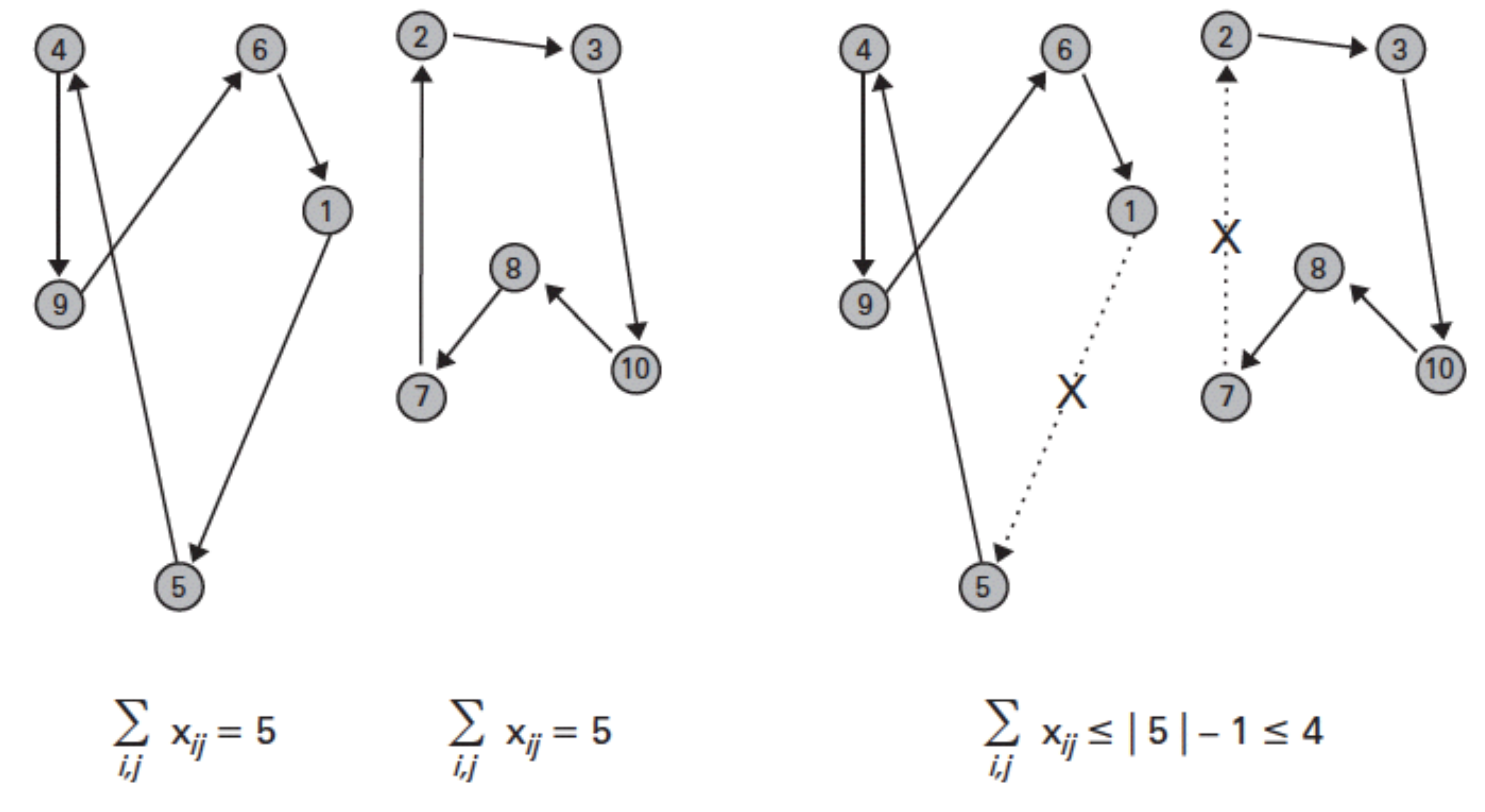
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset N$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i, j \in N$$

Problema do Caixeiro Viajante



(a) solução ilegal

(b) restrições associadas

Problema do Caixeiro Viajante

- Existem várias outras formulações (*Goldbarg et al, 2005*);
- As mais canônicas são:
  - Formulação de *Miller-Tucker-Zemlin (1960)*;
  - Formulação de *Fox-Gavish-Graves (1980)*;
  - Formulação de *Claus (1988)*;

Problema do Caixeiro Viajante

- Inúmeras aplicações relacionadas:
  - Problemas de roteamento de veículos;
  - Programação de transporte entre células de manufatura;
  - Roteamento de entrega postal;
  - Planejamento da produção;
  - Manipulação de itens em estoque;
  - dentre outras.

Problema do Caixeiro Viajante

- Problemas correlatos:
  - TSP simétrico;
  - TSP generalizado;
  - TSP com *backhauls*;
  - TSP com janelas de tempo;
  - TSP múltiplo;
  - dentre outros.

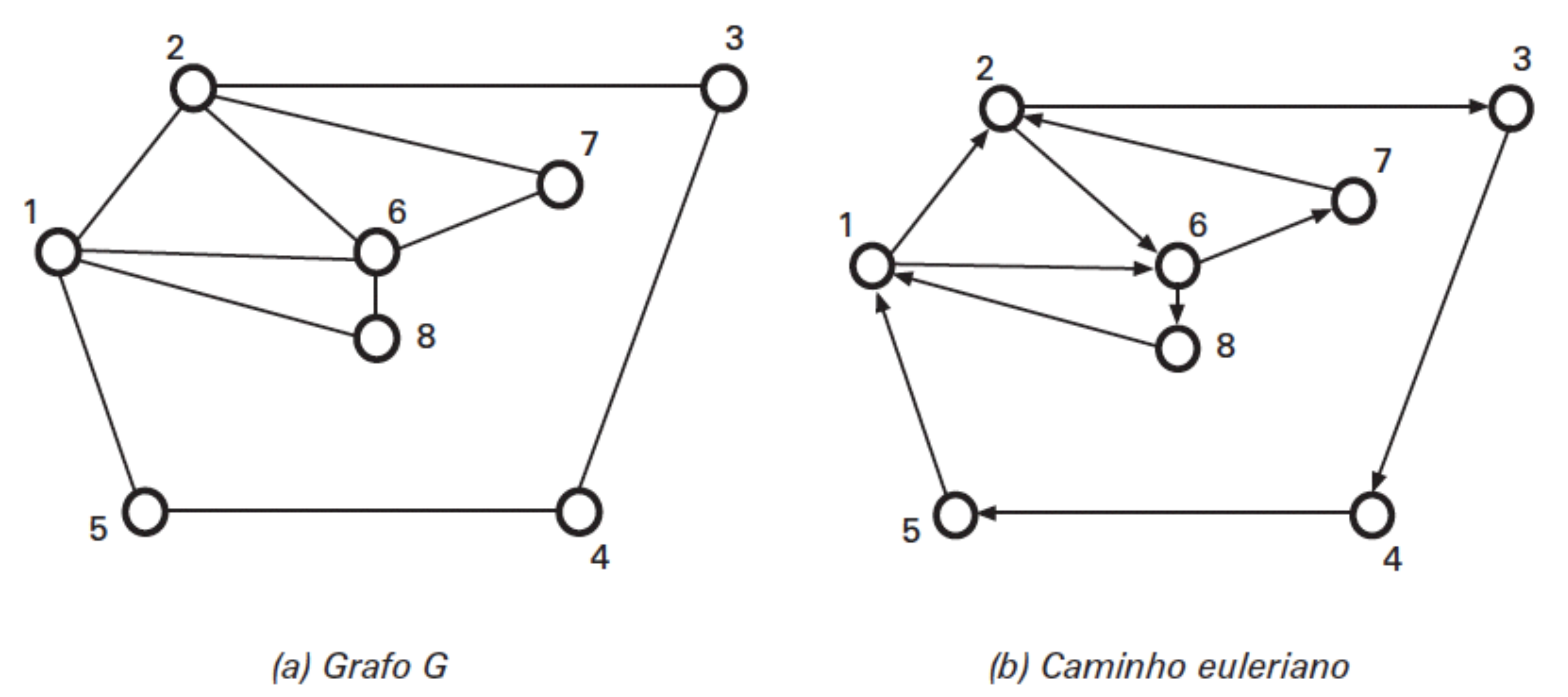
Problema do Caixeiro Chinês

- Objetiva-se cobrir com um *passeio* todos os arcos de um grafo G, minimizando a distância total percorrida;
- O *passeio* do carteiro se distingue do *circuito* Euleriano pois no primeiro é permitido a repetição de arestas;
- Um *circuito* Euleriano é representado por um *passeio* sobre um grafo G que contenha toda aresta de G uma única vez;

Problema do Caixeiro Chinês

- Um grafo conexo G é Euleriano quando possui um número par de arestas incidentes em cada nó;
- Caso o grafo não seja Euleriano, eventualmente será necessário percorrer algumas arestas mais de uma vez;
- O objetivo do problema é determinar quais arestas devem ser duplicadas de forma a obter um ciclo Euleriano de custo mínimo.

Problema do Caixeiro Chinês



Problema do Caixeiro Chinês

- Considerações básicas:
  - $G = (N, A)$: grafo com $|N| = n$ nós e $|A| = m$ arestas;
  - c_{ij}: comprimento ou custo da aresta (i,j);
  - x_{ij}: número de vezes em que a aresta (i,j) é percorrida de i para j;

Problema do Caixeiro Chinês

$$Minimizar\, f(x_{11}, ..., x_{nn}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ji} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0, \;\; i = 1, 2, ..., n$$

$$x_{ij} + x_{ji} \geq 1, \qquad \forall (i, j) \in A$$

$$x_{ij} \geq 0 \;\; e \;\; inteiro$$

Problema do Caixeiro Chinês

- Inúmeras aplicações relacionadas:
  - Distribuição de produtos diversos (jornais, bebidas);
  - Transportes coletivos urbanos;
  - Recolhimento de lixo;
  - Entrega de correspondência;
  - Patrulhamento policial e de segurança;
  - dentre outras.

Problema do Caixeiro Chinês

- Problemas correlatos:
  - PCC direcionado;
  - PCC com arestas mistas;
  - Problema do carteiro chinês capacitado;
  - Problema do *k*-carteiro chinês;
  - Problema do carteiro rural;
  - dentre outros.

Referências

- [Arenales et al, 2007] M. Arenales; V. Armentano; R. Morabito; H. Yanasse. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**, Editora Campus / Elsevier, 2007.
- [Goldbarg et al, 2005] M. C. Goldbarg; H. P. Luna. **Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos**, 2a ed., Editora Campus / Elsevier, 2005.
- [Hillier et al, 2013] F. S. Hillier; G. J. Lieberman. **Introdução à Pesquisa Operacional**, 9a ed., Editora Mc Graw Hill, 2013.