Prof. Lucas de Souza Batista - DEE/EE/UFMG

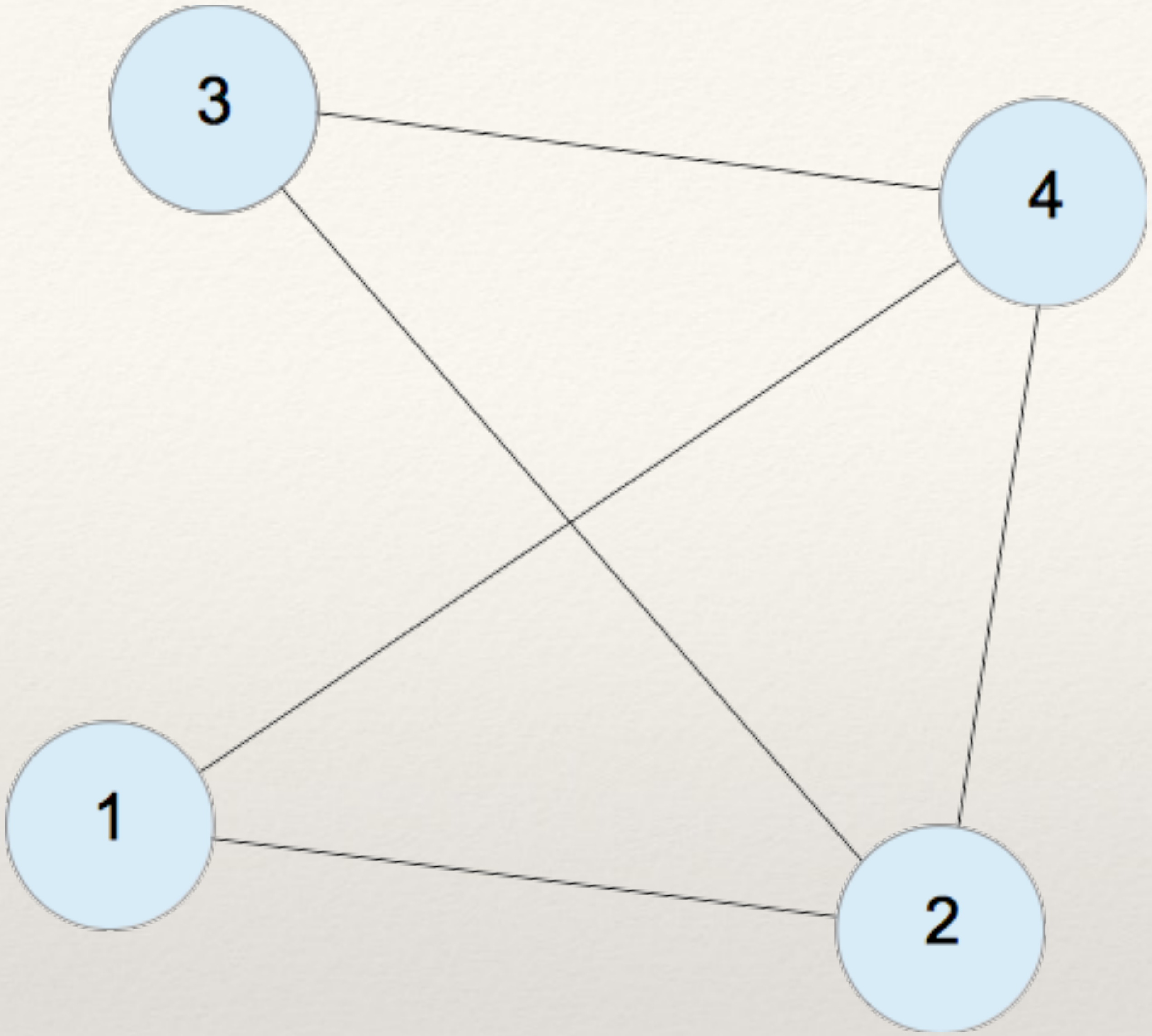
Otimização de Redes

Grafos:
Conceitos básicos e
Representações

Conceitos Básicos

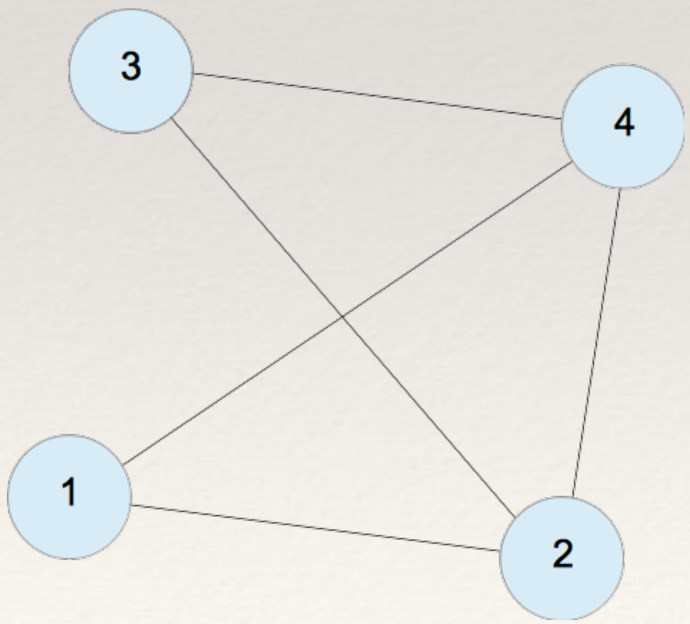
Grafo / Rede

- Definição:
  - Seja N um conjunto finito, cujos elementos são chamados nós (ou vértices) e E um conjunto de pares de nós, cujos elementos (i,j) são chamados arestas (ou arcos). O par G(N,E) é chamado grafo.
    - $|N| = n$ nós ou vértices.
    - $|E| = m$ arestas ou arcos.



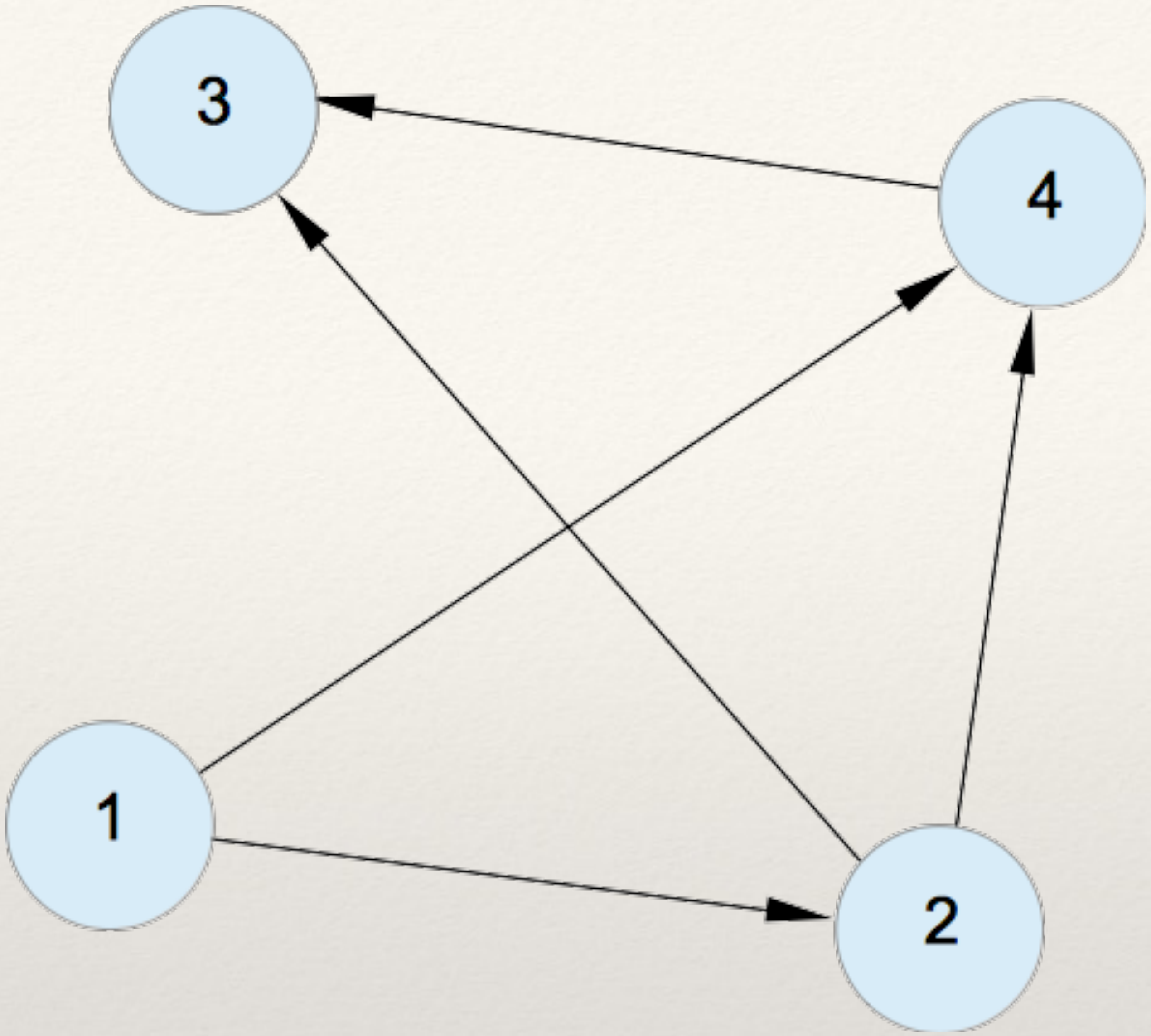
- $N = \{1,2,3,4\}$
- $E = \{(1,2),(1,4),(4,3),(2,3),(2,4)\}$

- Se $(i,j) \in E$:
  - (i,j) é incidente nos vértices i e j.
  - i e j são vértices adjacentes.
- No exemplo:
  - $(1,4) \in E$, logo 1 e 4 são vértices adjacentes.



Grafo Orientado

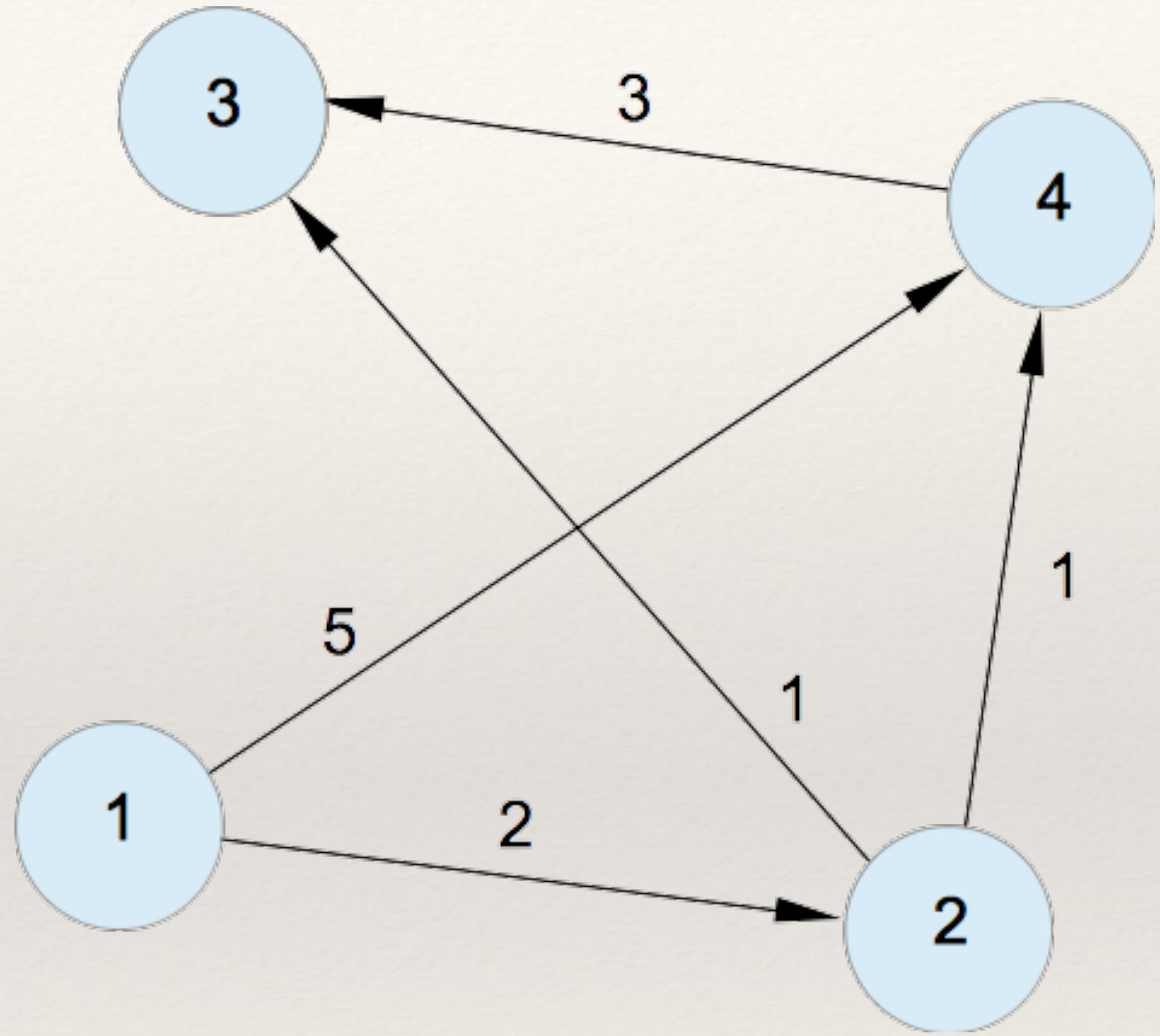
- Definição:
  - Um grafo G = (*N*,*E*) no qual as arestas são pares ordenados (subconjunto de *N* x *N*) é chamado grafo orientado ou dígrafo.
  - O par ordenado (*i*,*j*) é chamado <u>arco</u>, sendo *i* o nó inicial e *j* o nó final.



- $N = \{1,2,3,4\}$
- $E = \{(1,2),(1,4),(4,3),(2,3),(2,4)\}$

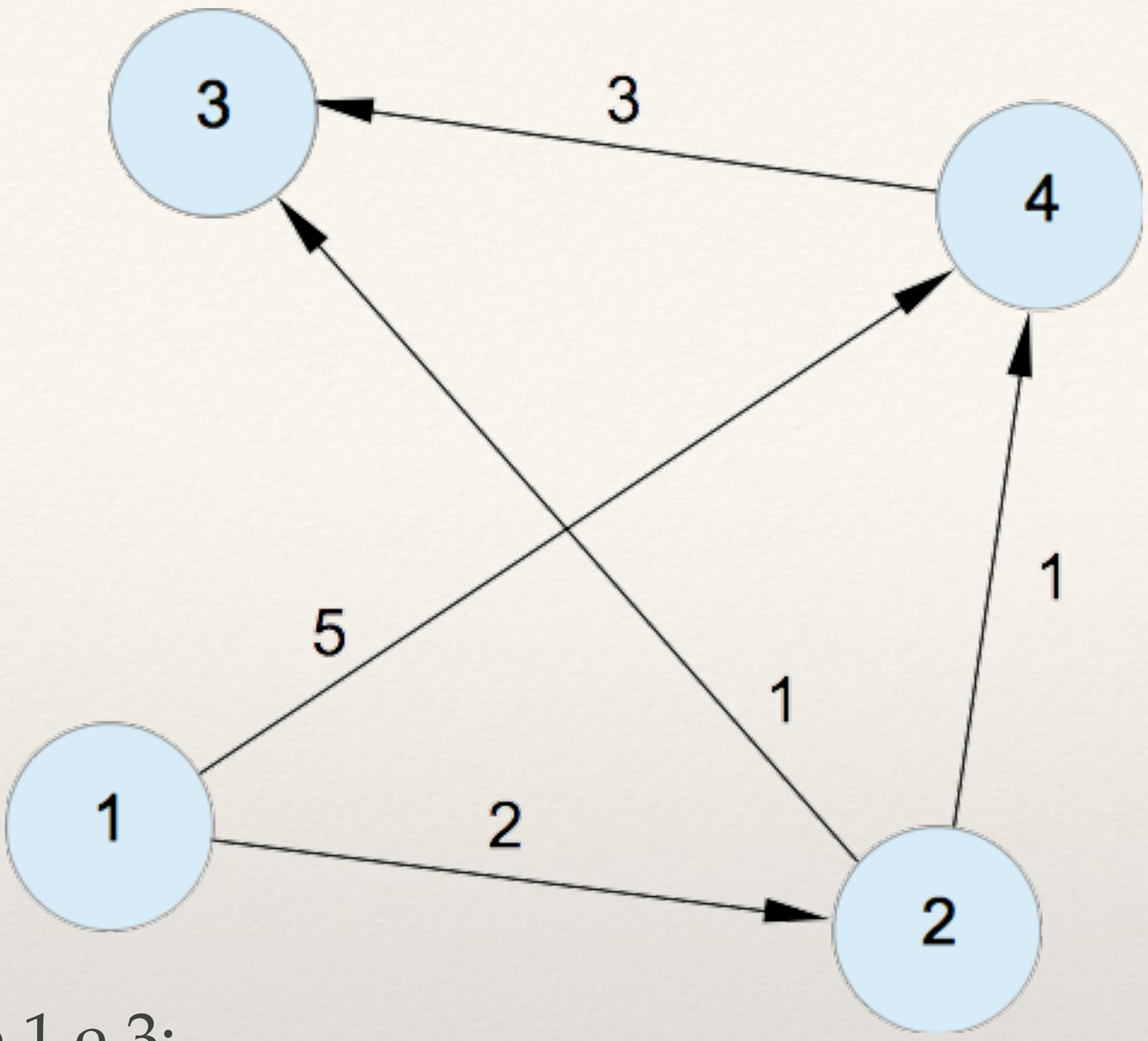
- Podem existir pesos associados às arestas/arcos e/ou vértices:
  - custo ou comprimento;
  - tempo para percorrer;
  - gasto de combustível;
  - limites inferior e/ou superior de fluxo;
  - demanda ou suprimento, capacidade do nó, etc.

- c_1,2 = 2
- c_1,4 = 5
- c_2,3 = 1
- c_2,4 = 1
- c_4,3 = 3



Caminho

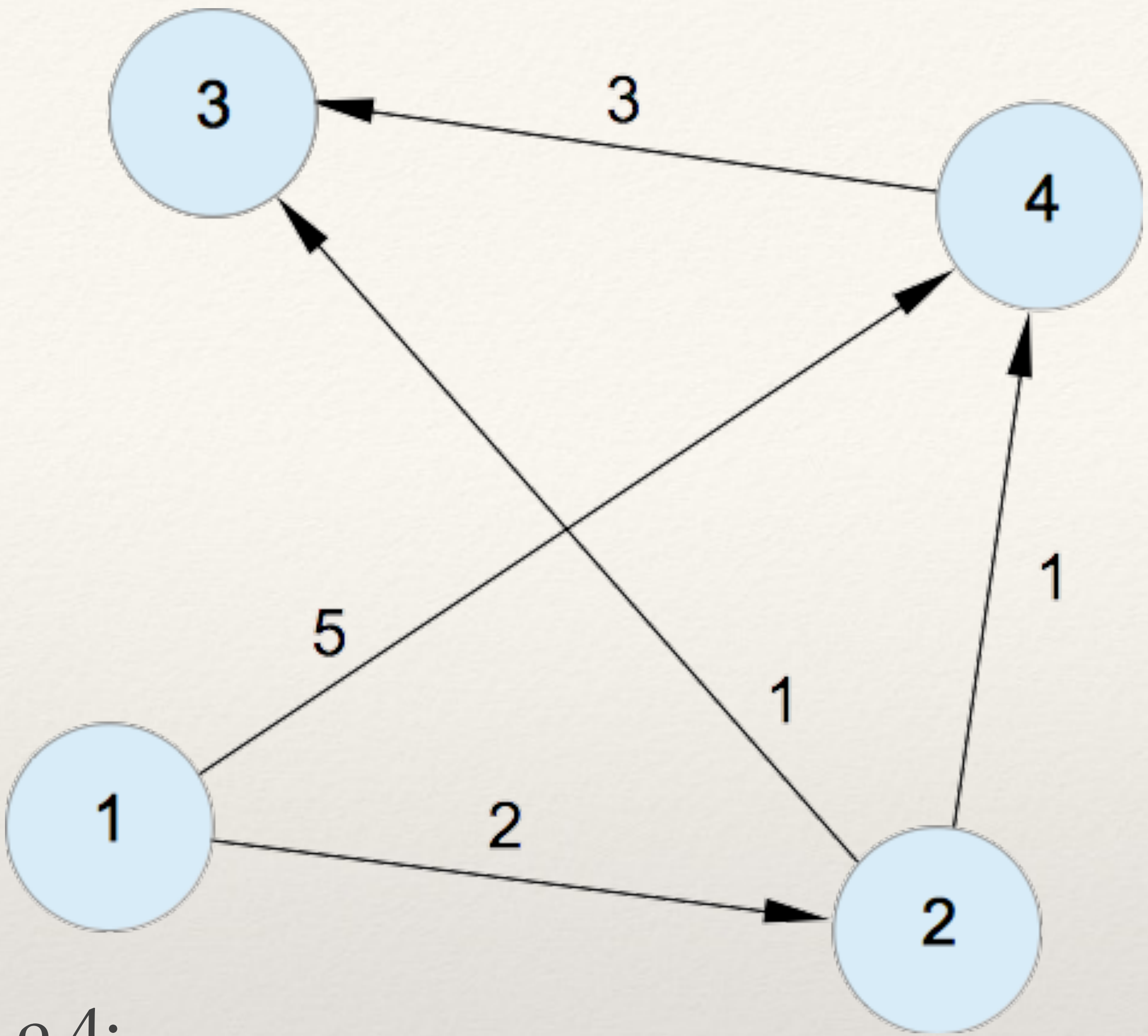
- Um caminho de um nó i_0 a um nó i_k é uma sequência de arcos C = $\{(i_0,i_1),(i_1,i_2),(i_2,i_3),\ldots,(i_{k-1},i_k)\}$, no qual o nó inicial de cada arco é o nó final do arco imediatamente anterior, sendo $i_0,i_1,i_2,i_3,\ldots,i_{k-1},i_k$ todos nós distintos.



- Caminhos entre 1 e 3:
  - C = {(1,2),(2,3)}
  - C = {(1,4),(4,3)}
  - C = {(1,2),(2,4),(4,3)}

Cadeia

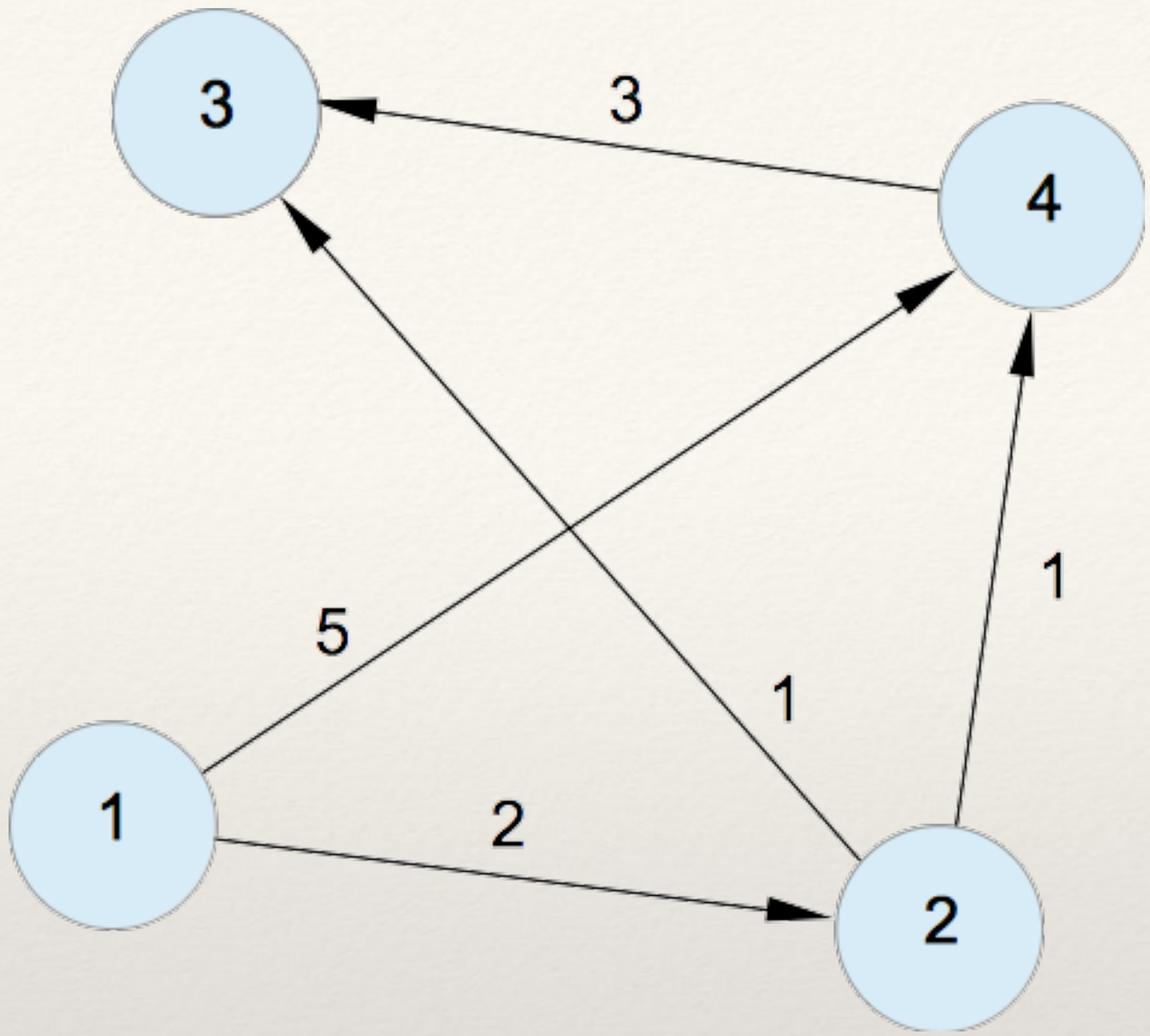
- Uma cadeia é uma estrutura similar à um caminho, exceto que os arcos não precisam estar coerentemente orientados.
- Todo caminho é uma cadeia, mas nem toda cadeia é um caminho.



- Cadeias entre 1 e 4:
  - C = {(1,4)}
  - C = {(1,2),(2,4)}
  - C = {(1,2),(2,3),(4,3)}

Circuito

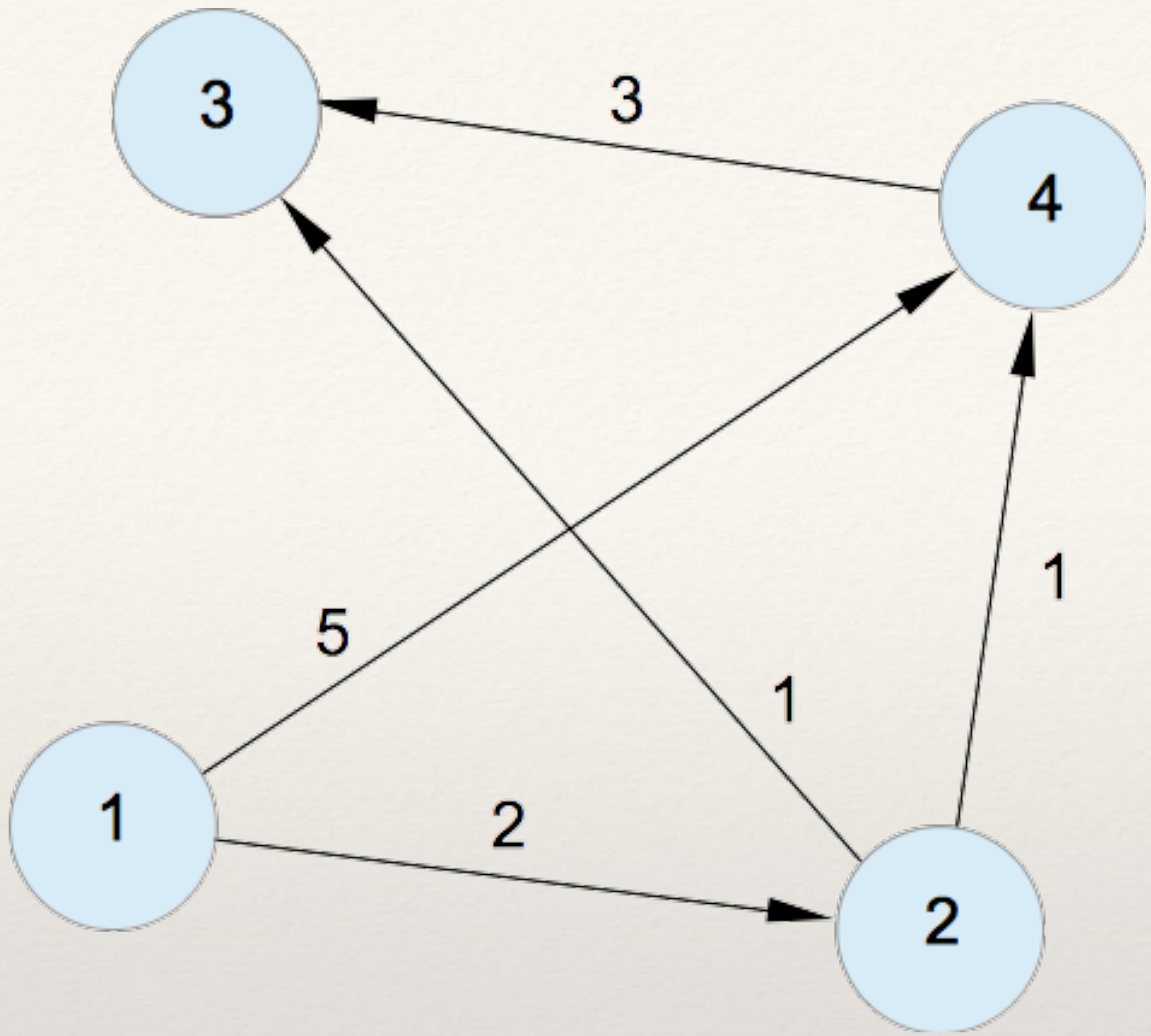
- Um circuito é um <u>caminho</u> fechado, ou seja, é um caminho de um nó i_0 a um nó i_k, em que $i_0 = i_k$.



- O grafo acima não contém circuitos.

Ciclo

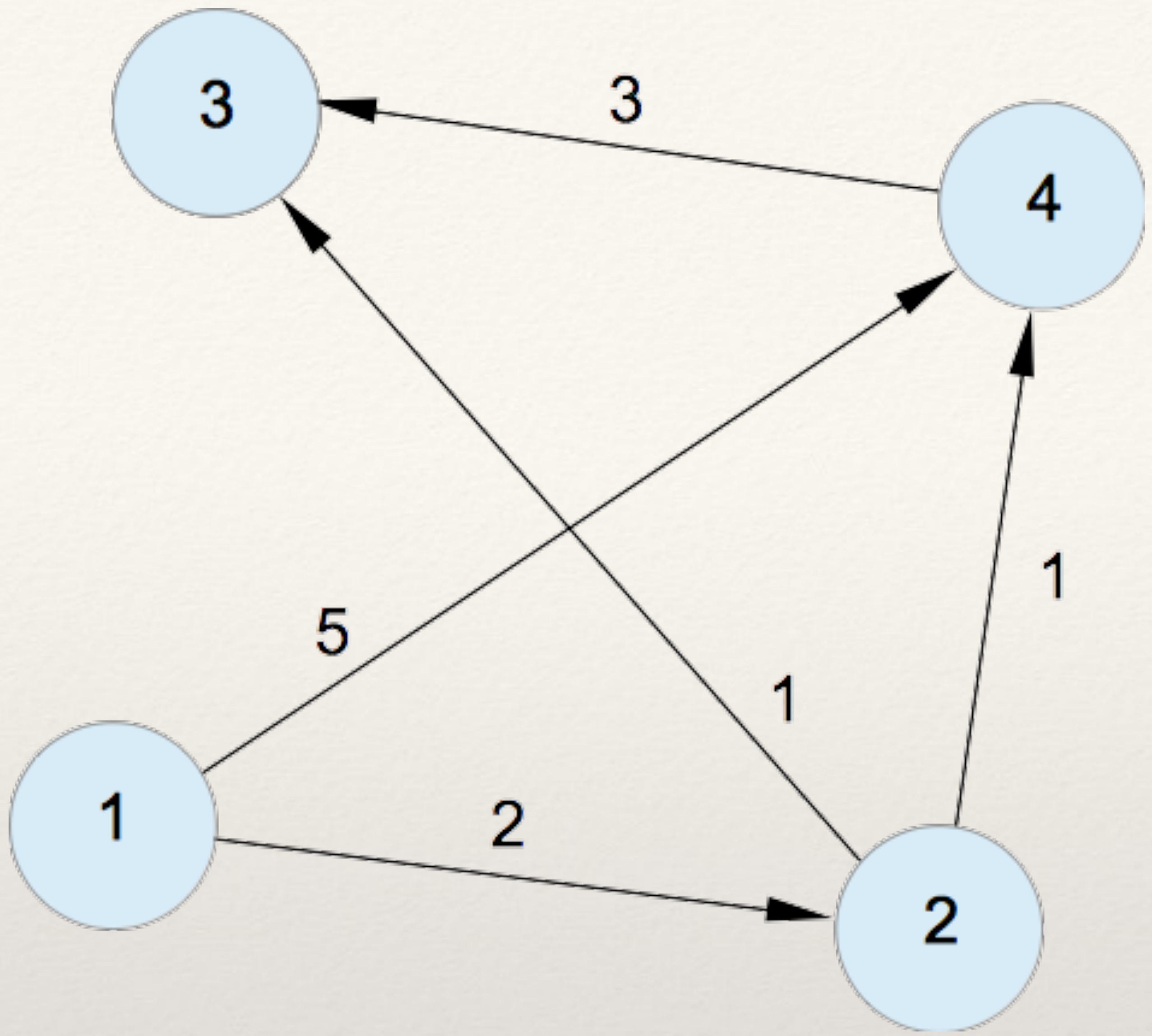
- Um ciclo é uma <u>cadeia</u> fechada, ou seja, um circuito onde não é necessário respeitar a orientação dos arcos.
- Todo circuito é um ciclo, mas nem todo ciclo é um circuito.



- Ciclos:
  - {(2,3),(4,3),(2,4)}
  - {(1,4),(2,4),(1,2)}
  - {(1,2),(2,3),(4,3),(1,4)}

Conectividade do Grafo

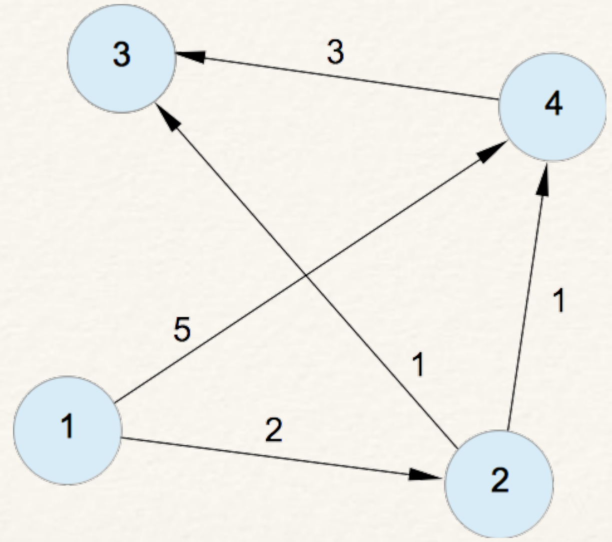
- Grafo fracamente conectado: um grafo é fracamente conectado (ou simplesmente conectado) se existe ao menos uma cadeia entre quaisquer dois de seus nós.
- Grafo fortemente conectado: um grafo é fortemente conectado se existe ao menos um caminho entre quaisquer dois de seus nós.

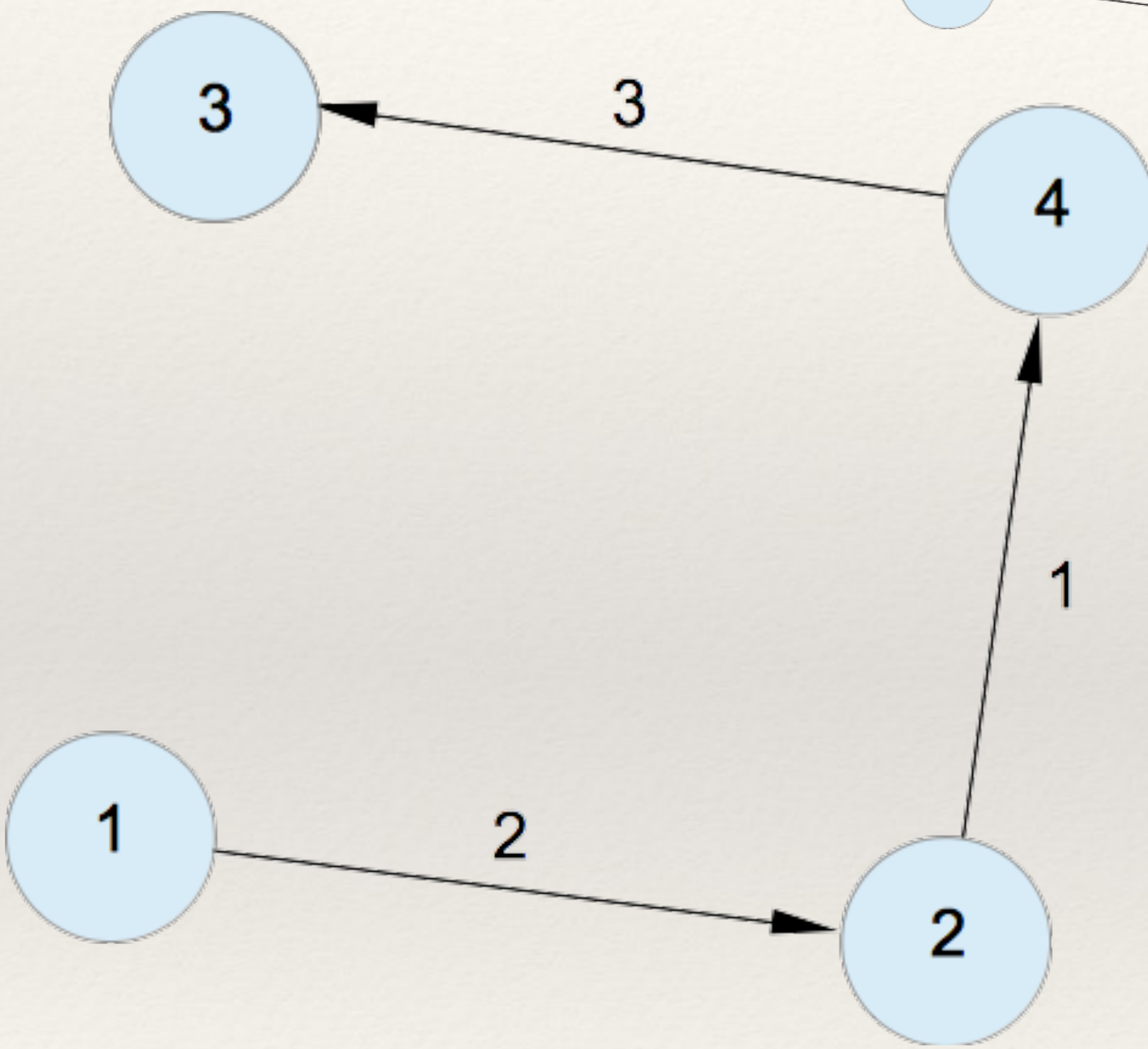


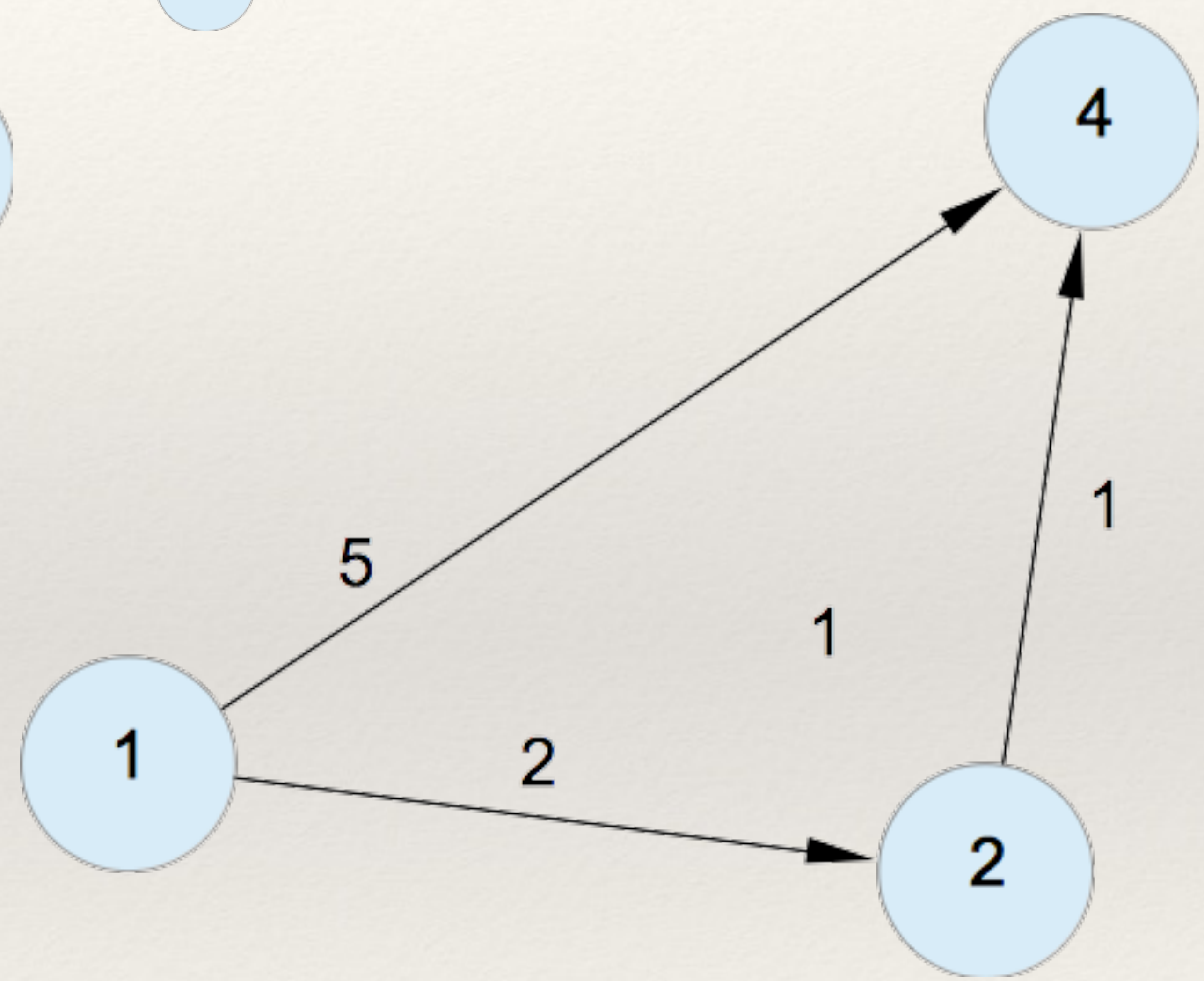
- Fracamente conectado.

Subgrafo

- Diz-se que G′ = (N', E') é um subgrafo de G = (N, E) se $N' \subseteq N$ e $E' \subseteq E$;
- Em um subgrafo, se $(i,j) \in E'$ então $i \in$ N′ e $j \in$ N′.


3
3
4
5
1
1
1
2
2

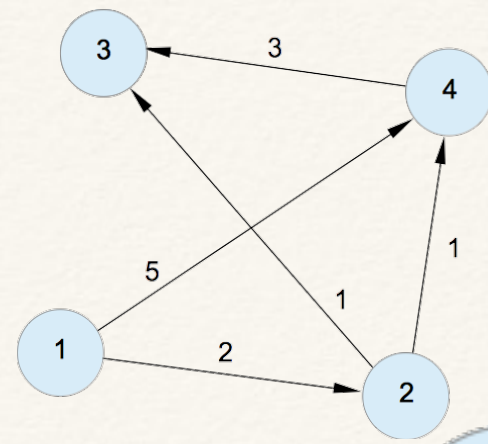

3
3
4
1
1
2
2

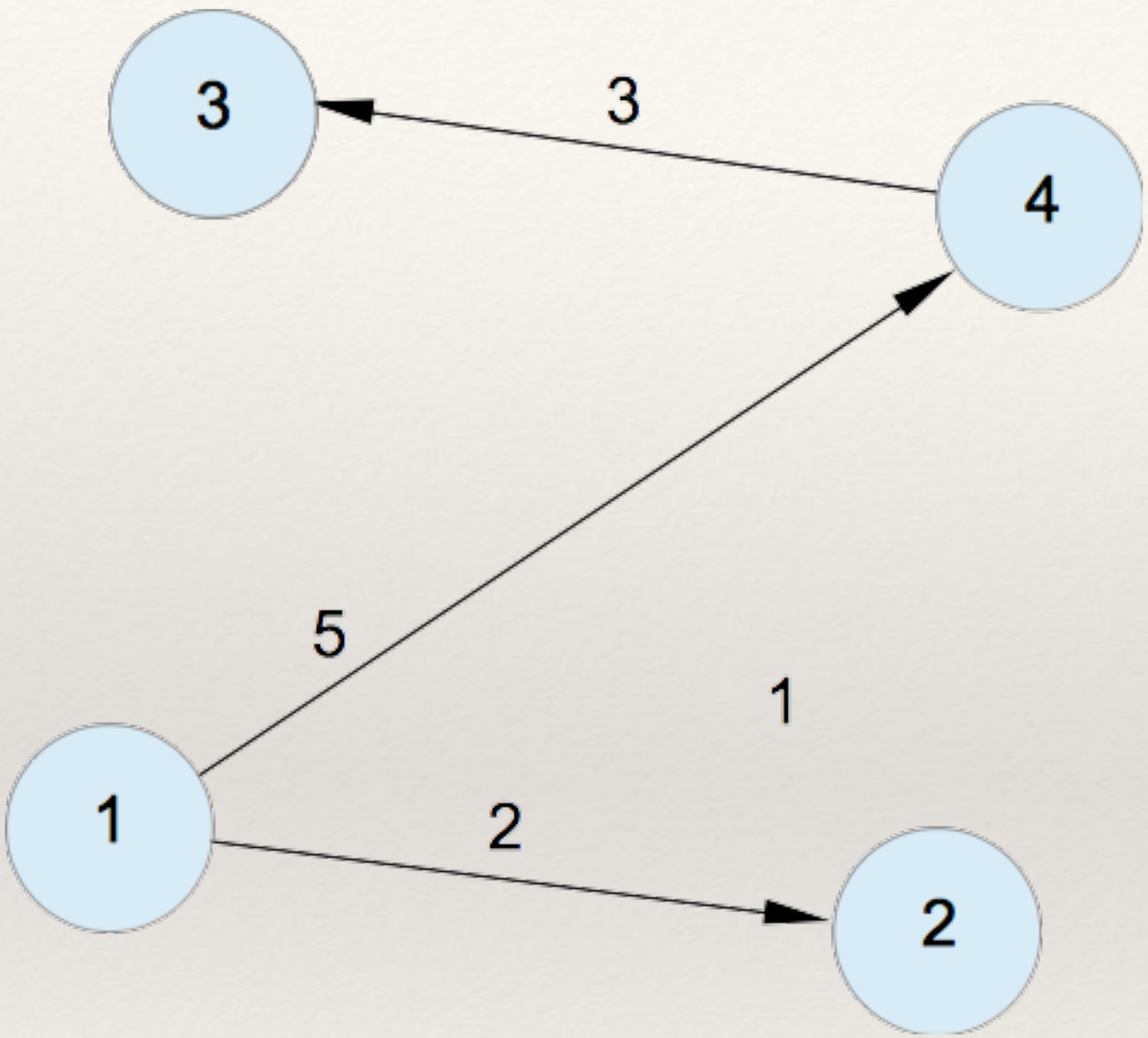

4
5
1
1
1
2
2

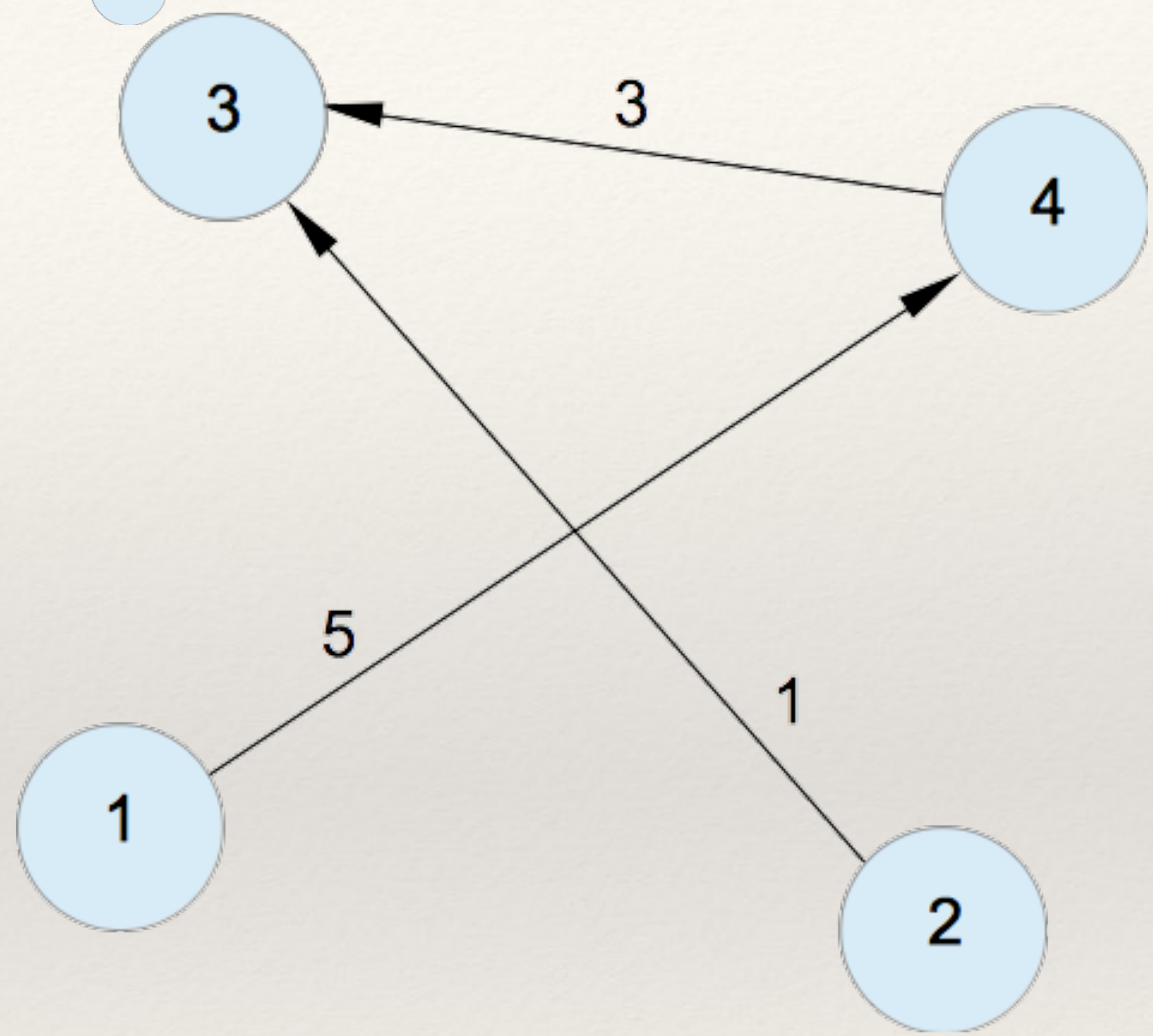
Árvores

- Uma árvore é um grafo conectado sem ciclos.
- Uma árvore geradora de um grafo G é um subgrafo de G que é uma árvore e inclui todos os nós do grafo G.

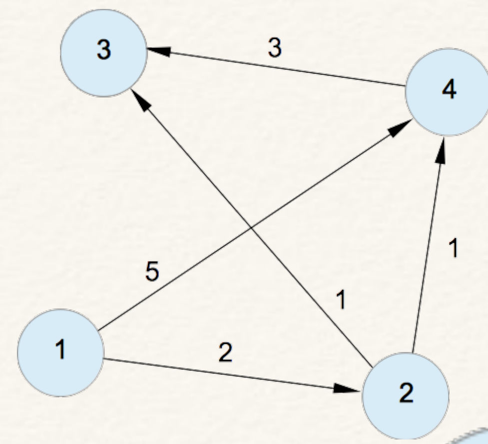
- Propriedades de árvores geradoras:
  - Considere um grafo G = (N,E), com $|N| = n$, e um subgrafo G′ = (N,E') de G. Se G′ é árvore geradora de G, as seguintes afirmações são equivalentes:
    - $|E'| = n - 1$ e G′ é conectado.
    - $|E'| = n - 1$ e G′ não tem ciclos.

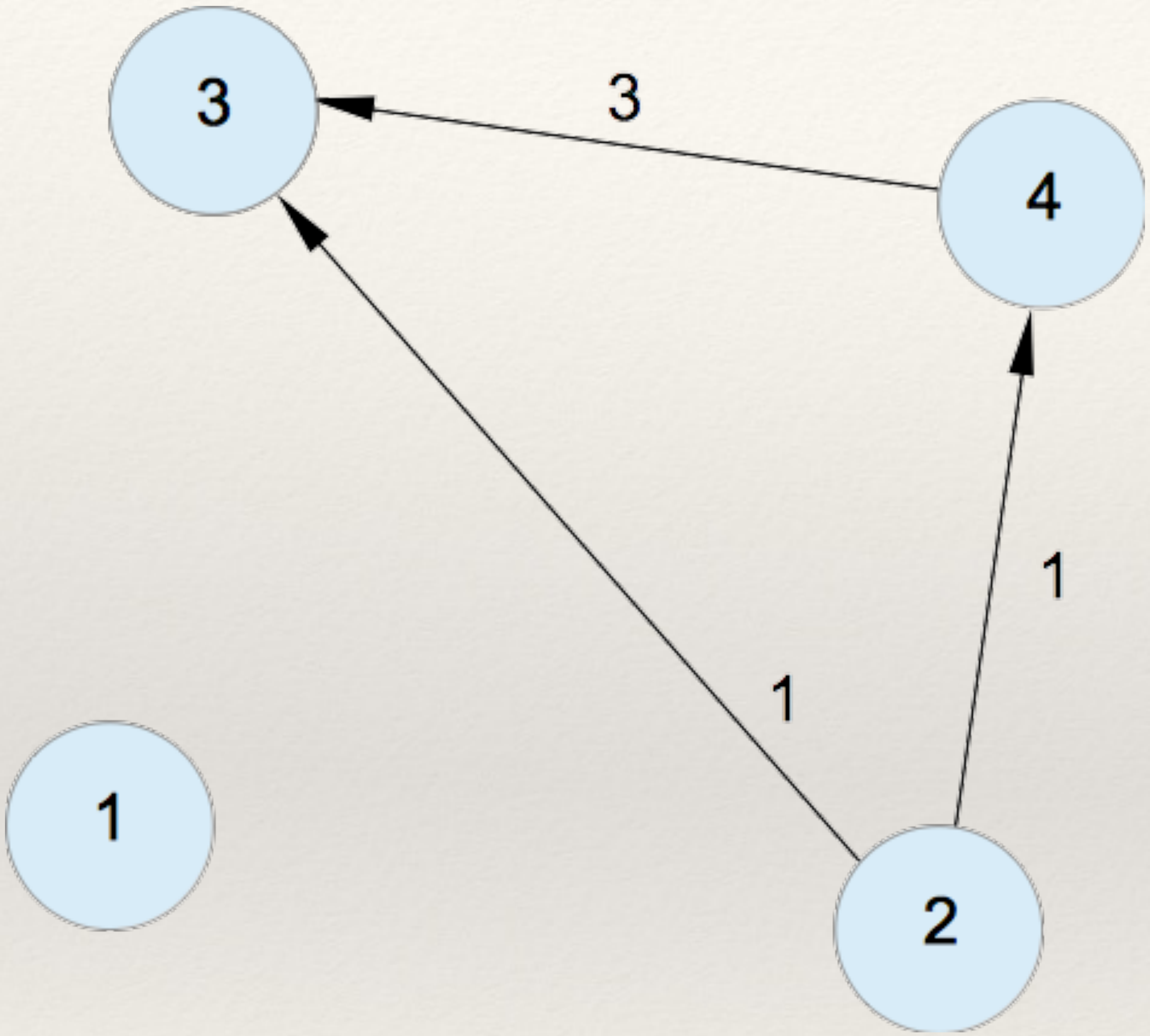


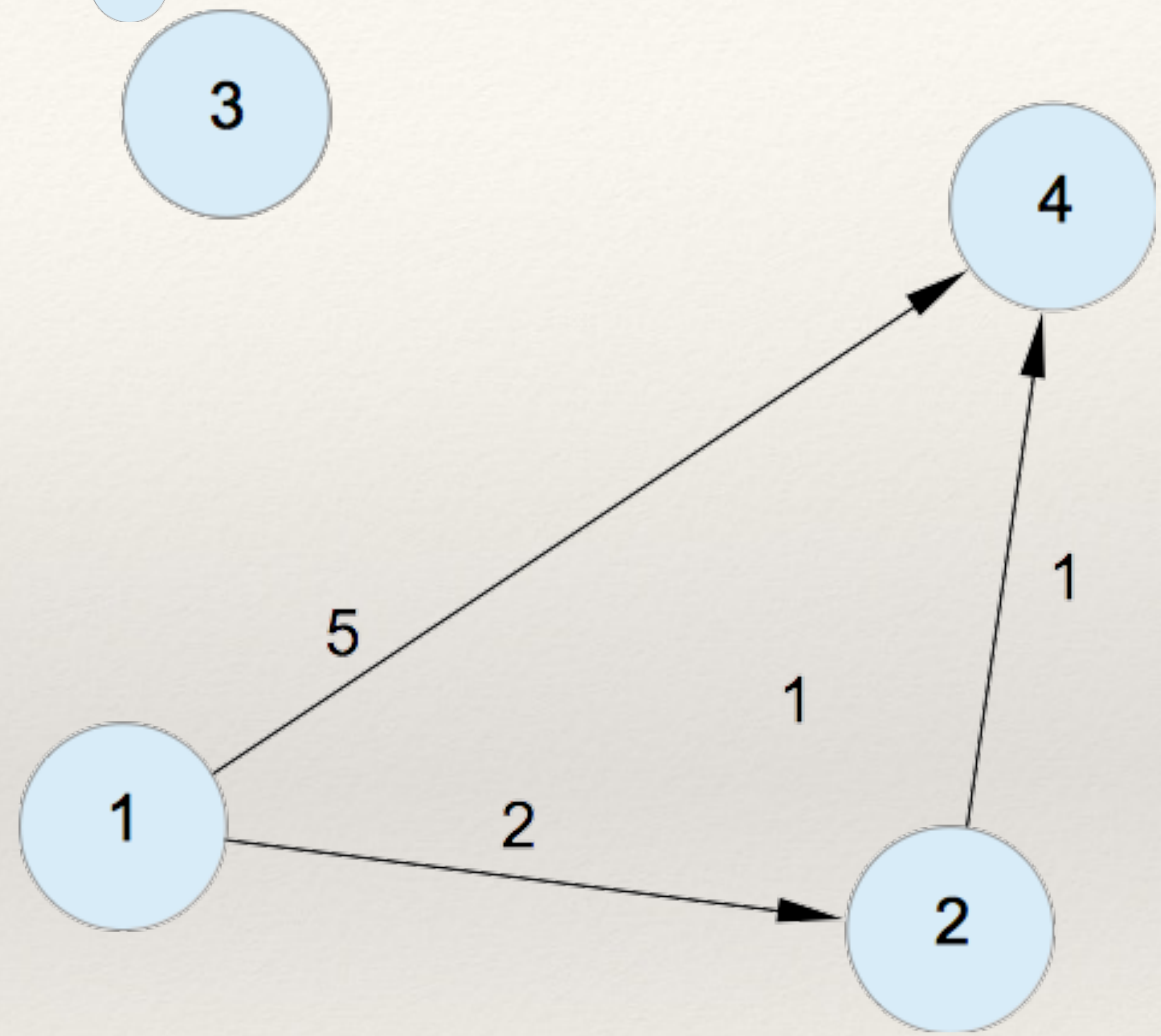




- São árvores geradoras do grafo exemplo.





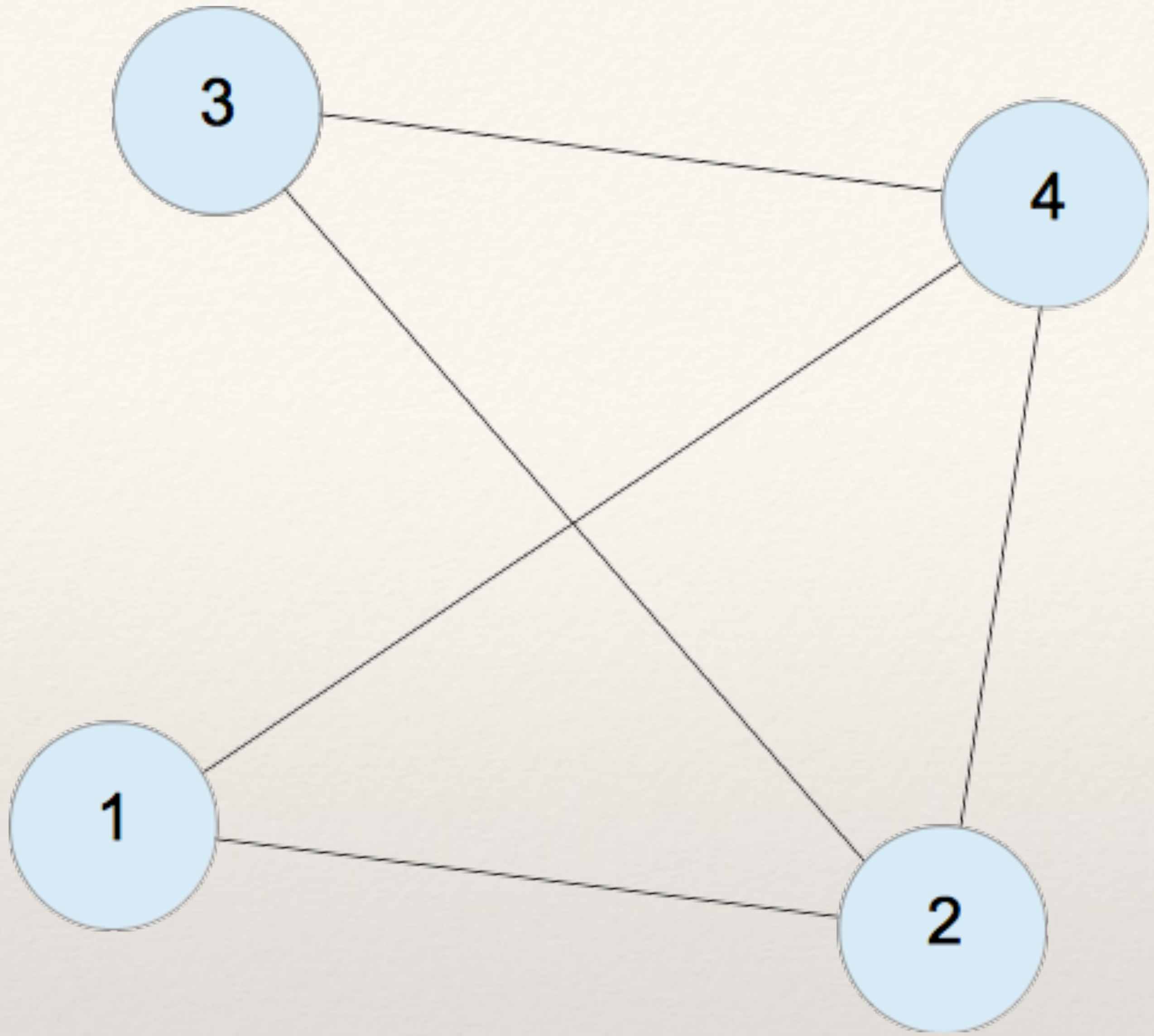


- Não são árvores geradoras do grafo exemplo.
- Necessariamente formam ciclos e são desconectados.

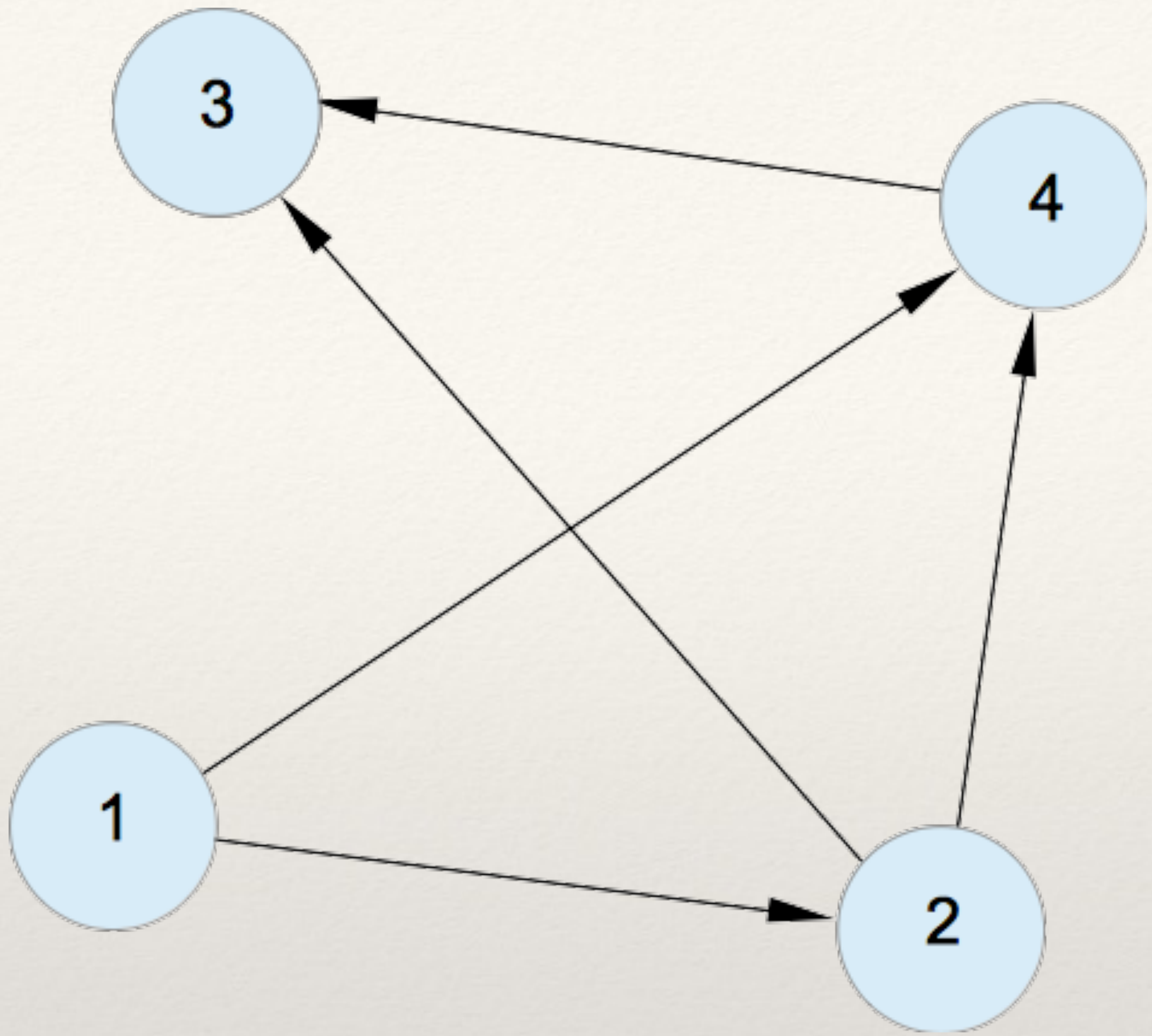
Representação de Grafos

Matriz de Adjacências

- Seja G(N,E) um grafo em que $|N| = n$. A matriz de adjacências M (n x n) é formada de tal forma que:
  - $m(i,j) = 1$ se $(i,j) \in$ E (ou $m(i,j) = c_{ij}$)
  - $m(i,j) = 0$ caso contrário



$$M = M^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

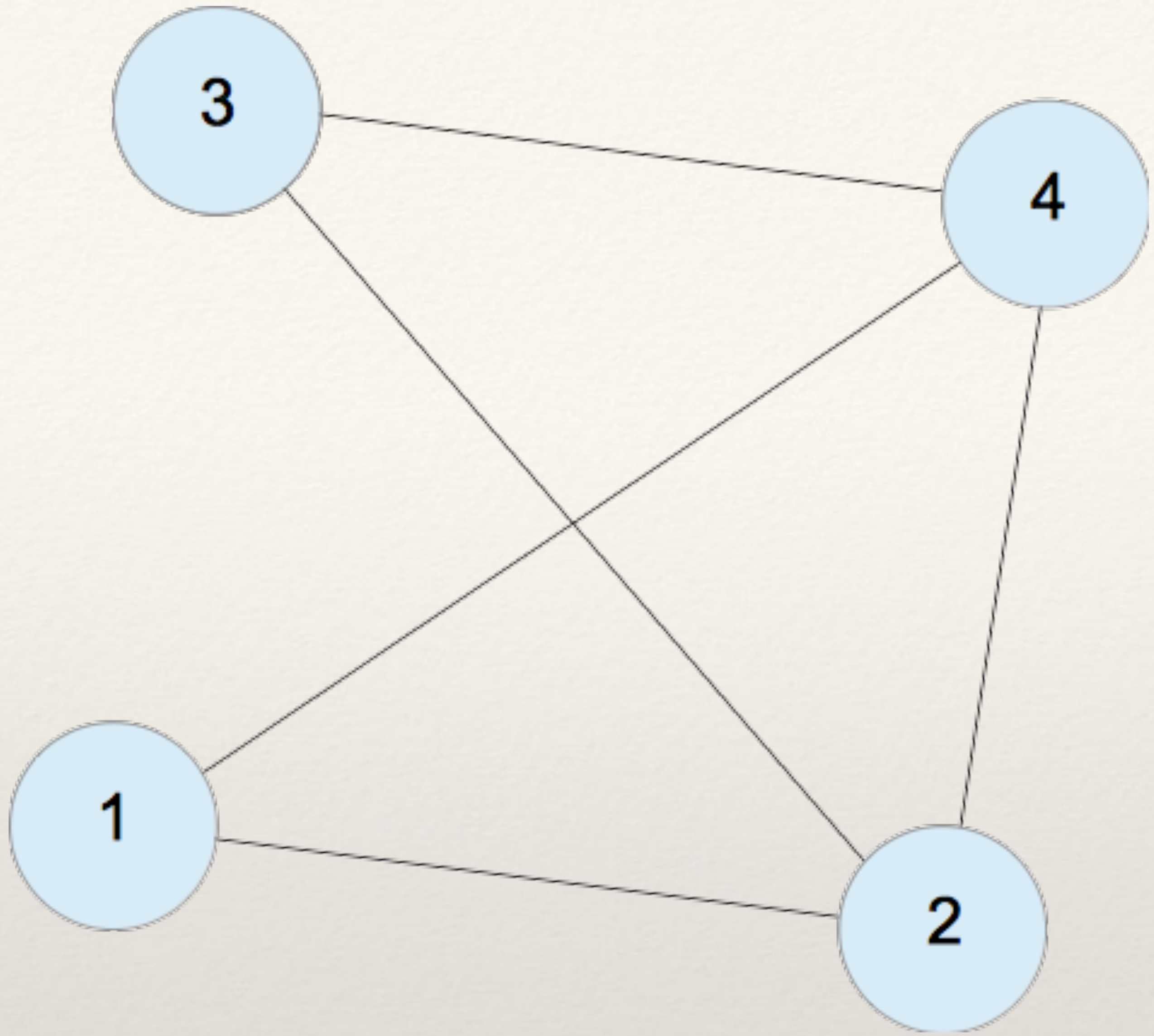


M =

0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0
0	0	1	0

Matriz de Incidência Nó-Aresta

- Seja G = (N,E) um grafo não orientado em que $|N| = n$ e $|E| = m$. A matriz de incidência nó-aresta P $(n \times m)$ é formada de tal forma que:
  - $p(i,k) = 1$ se a aresta k é incidente no nó i.
  - $p(i,k) = 0$ caso contrário.

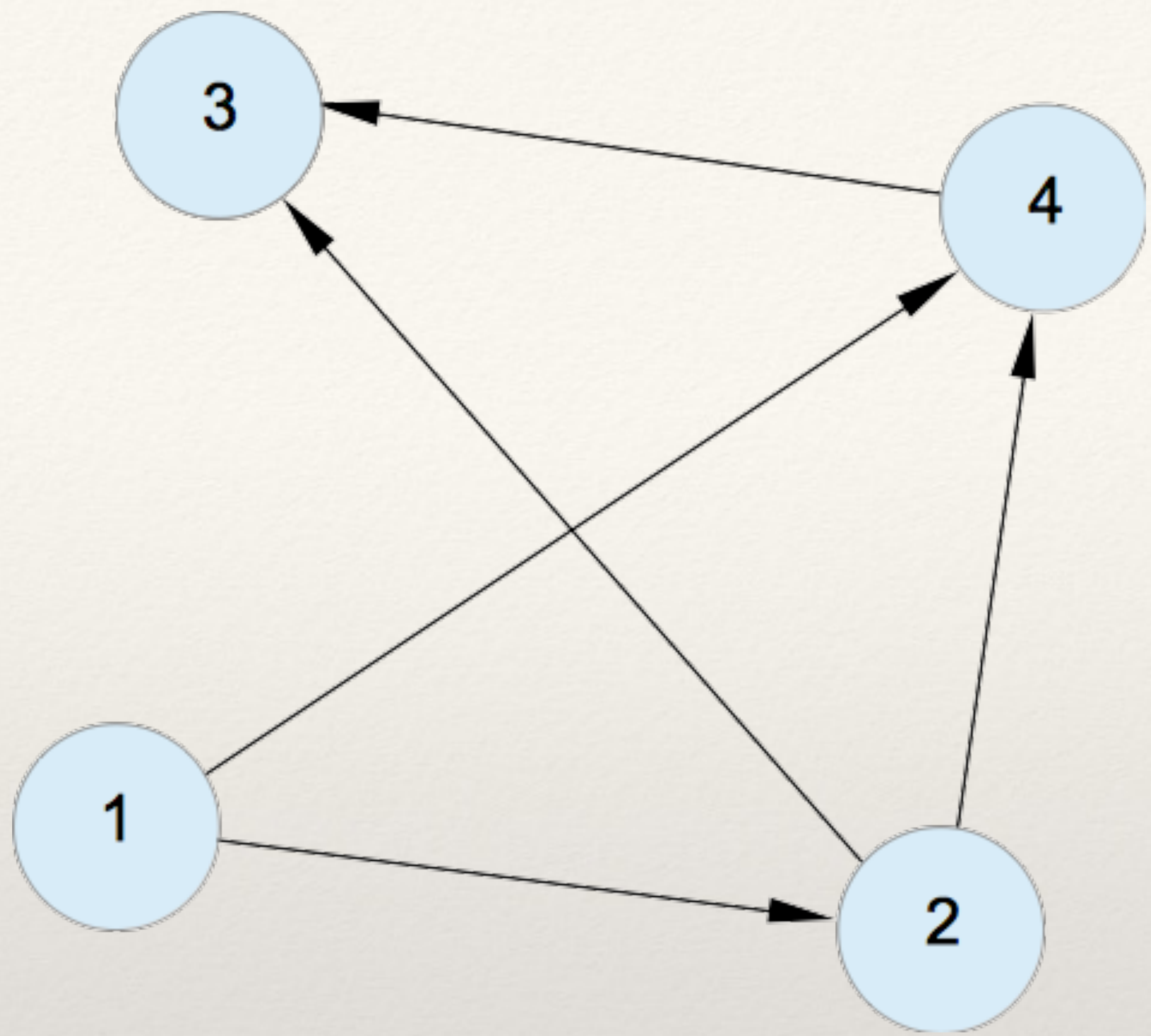


$P =$

	(1,2)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	1	0
3	0	0	1	0	1
4	0	1	0	1	1

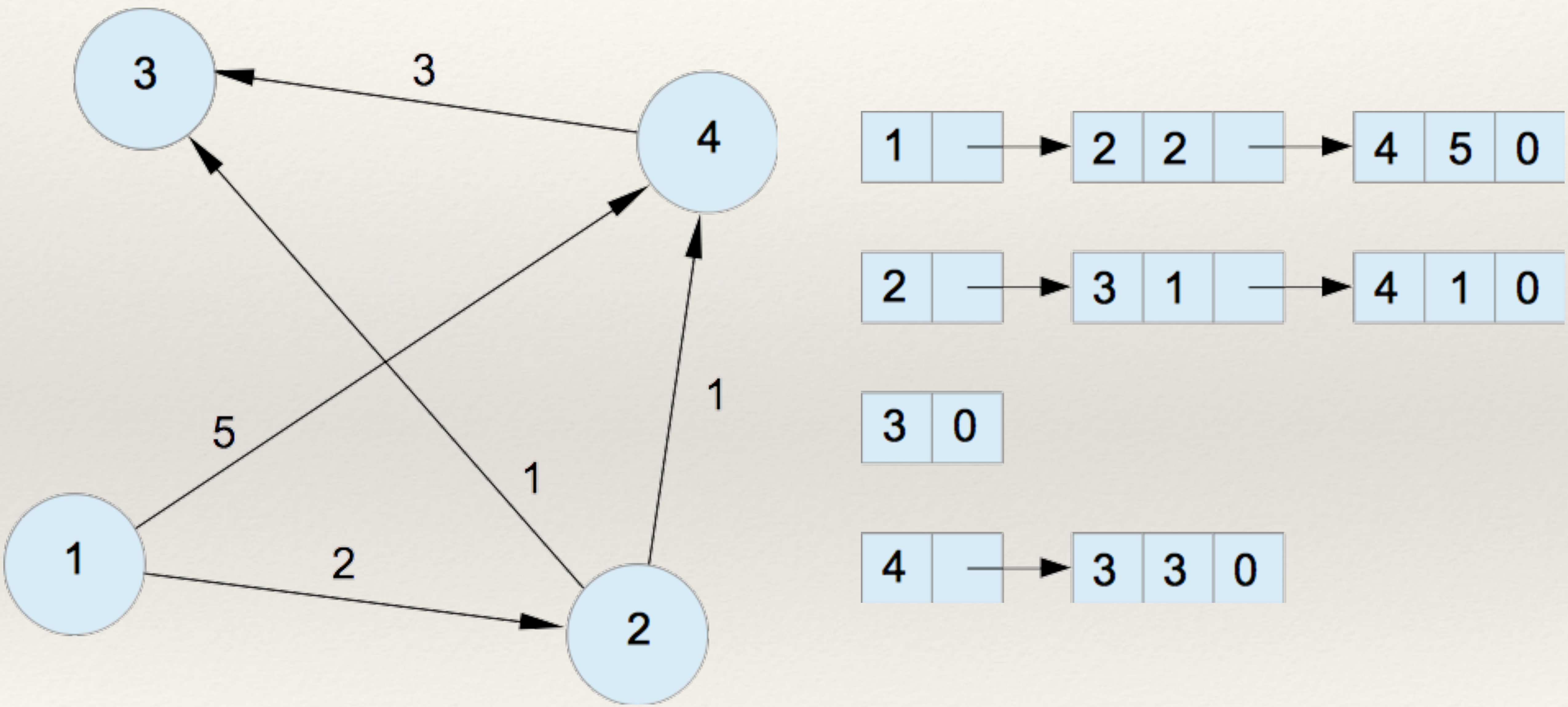
Matriz de Incidência Nó-Arco

- Seja G = (N,E) um grafo orientado em que $|N| = n$ e $|E| = m$. A matriz de incidência nó-arco P $(n \times m)$ é formada de tal forma que:
  - $p(i,k) = +1$ se o arco k é (i,j) — i.e., se k sai do nó i.
  - $p(i,k) = -1$ se o arco k é (j,i) — i.e., se k entra no nó i.
  - $p(i,k) = 0$ caso contrário.

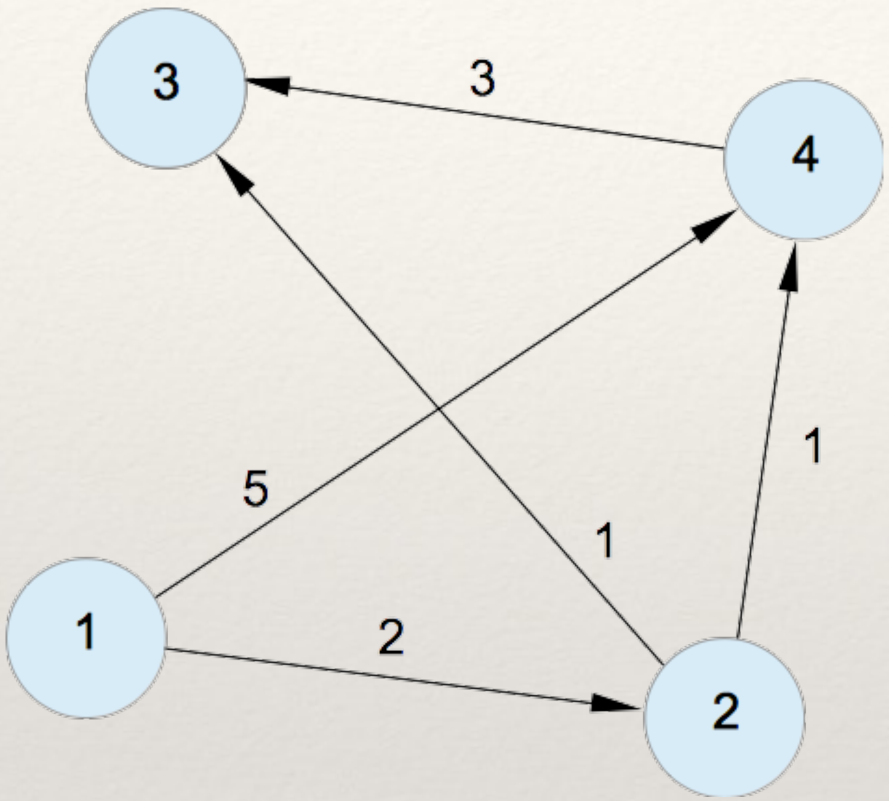


$$P = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & (1,2) & (1,4) & (2,3) & (2,4) & (4,3) \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 4 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Lista de Adjacências de Nós



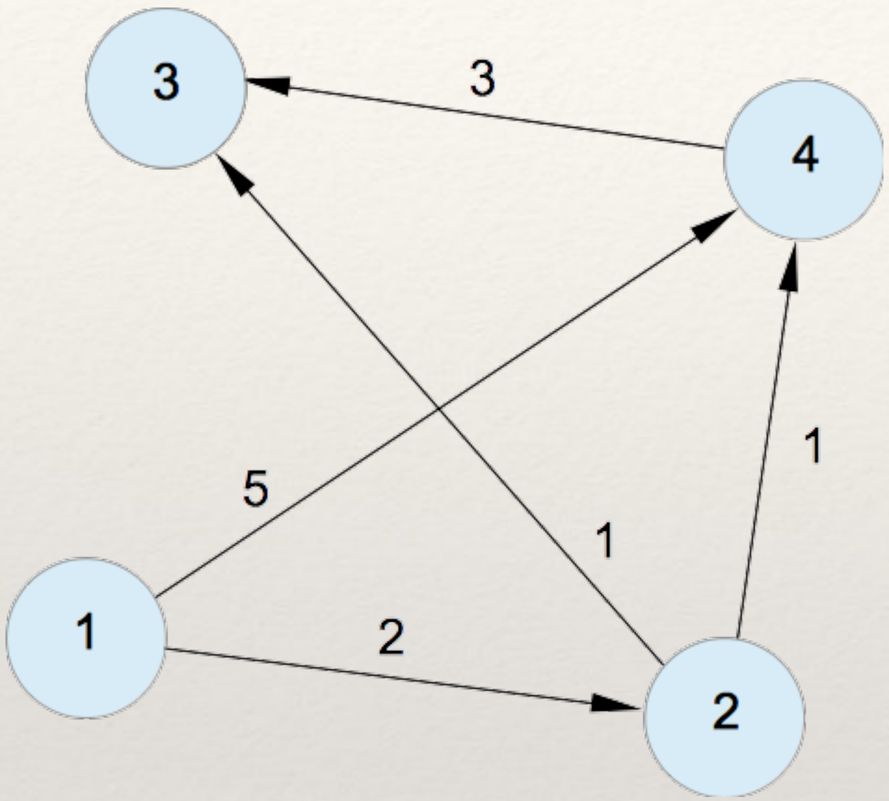
Representação por Nós Sucessores



1	2	2
1	4	5
2	4	1
2	3	1
4	3	3

- Enumere os arcos:
  - (1,2): arco 1; (1,4): arco 2; (2,4): arco 3; (2,3): arco 4; (4,3): arco 5.
- Obtém matriz (m x (k+2))
- Todos os arcos que emergem de um mesmo nó têm numeração sucessiva.

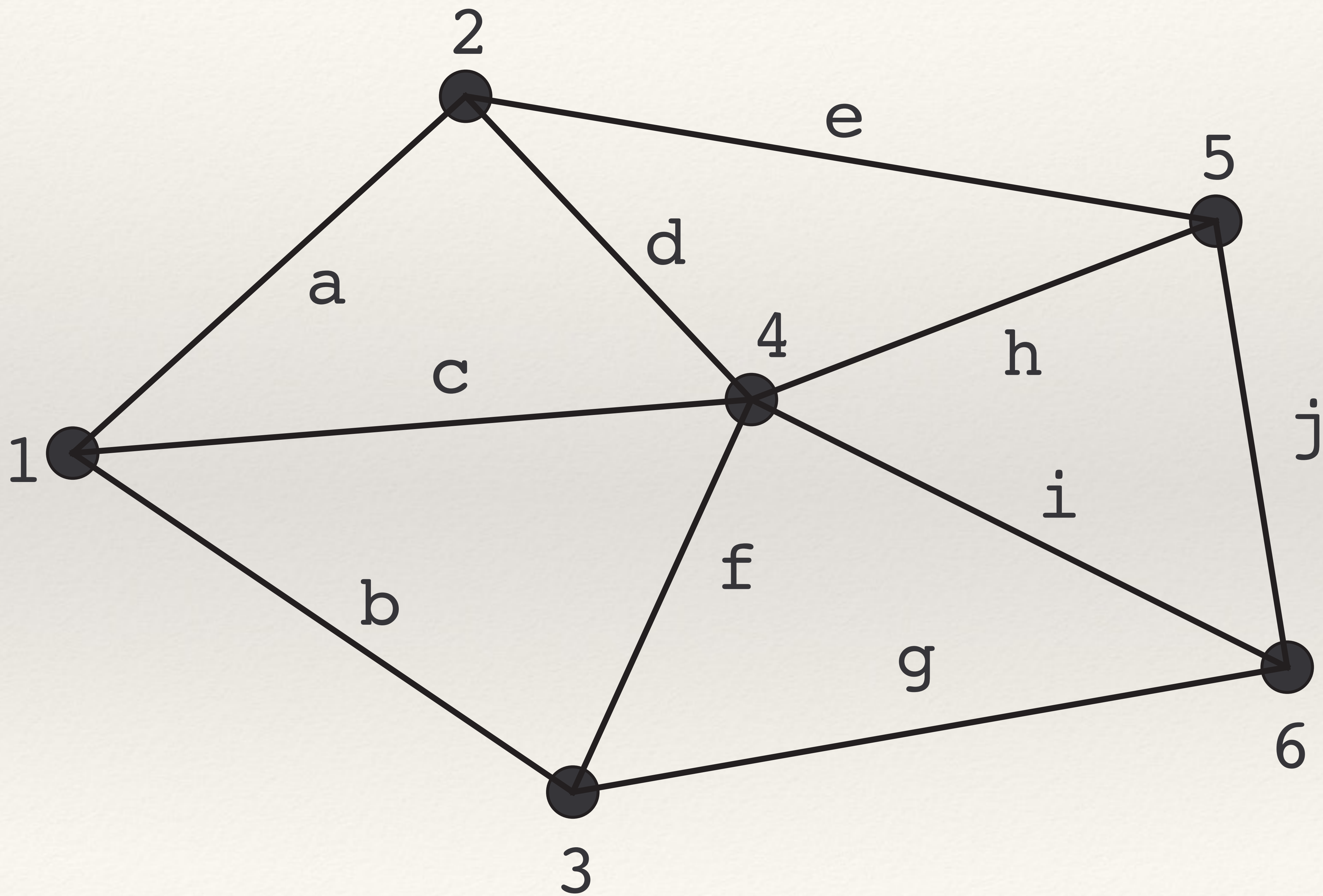
Representação por Nós Predecessores



1	2	2
2	3	1
4	3	3
1	4	5
2	4	1

- Enumere os arcos:
  - (1,2): arco 1; (2,3): arco 2; (4,3): arco 3; (1,4): arco 4; (2,4): arco 5.
- Obtém matriz (m x (k+2))
- Todos os arcos que chegam a um mesmo nó têm numeração sucessiva.

Exercício



- Encontrar:
    - Conjunto de vértices.
    - Conjunto de arestas.
    - Duas cadeias.
    - Dois ciclos.
    - Uma árvore geradora.

- Represente o grafo:
  - Utilizando matriz de adjacências.
  - Utilizando lista de adjacências.

Referências

- [Arenales et al, 2007] M. Arenales; V. Armentano; R. Morabito; H. Yanasse. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**, Editora Campus / Elsevier, 2007.
- [Goldbarg et al, 2005] M. C. Goldbarg; H. P. Luna. **Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos**, 2a ed., Editora Campus / Elsevier, 2005.
- [Hillier et al, 2013] F. S. Hillier; G. J. Lieberman. **Introdução à Pesquisa Operacional**, 9a ed., Editora Mc Graw Hill, 2013.