Branch and Bound

Prof. Eduardo Gontijo Carrano

Departamento de Engenharia Elétrica – DEE
Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Introdução

- Método de enumeração implícita.
- Baseado em relaxações lineares sucessivas.
- Utiliza a melhor solução inteira conhecida como condição para eliminação de problemas candidatos.
- Classes de problemas:
  - Programação Linear Inteira (PI).
  - Programação Linear Inteira Mista (PIM).
  - Programação Linear Binária (PB).

Relaxação Linear

Sejam X_{PI} e X_{PL} os conjuntos de soluções factíveis do problema inteiro e do problema linear relaxado correspondente.

como:

- $X_{PI} \subset X_{PL}$.

logo:

- $\max\limits_{x \in X_{PL}} f(x) \geq \max\limits_{x \in X_{PI}} f(x)$.

Conclusão

PL é um limitante superior para o problema PI (maximização).

Problema Considerado e Notação

Formulação

$$\max z = c^T x$$

$$\text{sujeito a:} \begin{cases} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n_+ \end{cases}$$

Notação:
z^*: valor de função da solução ótima (inteira).
x^*: solução ótima (inteira).
$\overline{z}^i$: limitante superior do problema P_i.
$\overline{x}^i$: solução correspondente ao limitante $\overline{z}_i$.

Branch and Bound – Algoritmo

Algoritmo Branch and Bound

1. (Inicialização). Faça $\overline{z} = \infty$, $z^* = -\infty$, $x^* = \emptyset$, $\mathcal{P} = \{P_0\}$.
2. (Seleção de nós). Selecione o nó ativo i, associado ao problema P^i, da lista de nós ativos. Se a lista estiver vazia vá ao passo 8.
3. (Solução do problema relaxado). Resolva o problema linear resultante da relação de P^i (PL^i) utilizando o Algoritmo Simplex.
4. (Teste de eliminação 1). Se a região factível de PL^i for vazia, vá ao passo 2.
5. (Teste de eliminação 2). Se o valor $\overline{z}^i$ da solução ótima de PL^i é tal que $\overline{z}^i \leq z^*$, vá para o passo 2.
6. (Teste de eliminação 3). Se a solução ótima $\overline{x}^i$ de PL^i é inteira com valor $\overline{z}^i$:
    1. Se $\overline{z}^i > z^*$: Atualize x^* e z^*. Elimine os nós ativos de $\mathcal{P}$ tais que $\overline{z}^i \leq z^*$.
    2. Volte ao passo 2.
7. (Ramificação). Selecione uma variável não inteira j da solução $\overline{x}_i$ de PL^i e divida P^i em dois problemas ($x^{i+1}(j) \leq \lfloor \overline{x}^i(j) \rfloor$ e $x^{i+2}(j) \geq \lceil \overline{x}^i(j) \rceil$). Adicione estes problemas à $\mathcal{P}$ e vá ao passo 2.
8. (Fim). Se $z^* = -\infty$, não existe solução factível. Caso contrário, a solução corrente x^* é a solução ótima.

Exemplo – Problema Considerado

P_0:

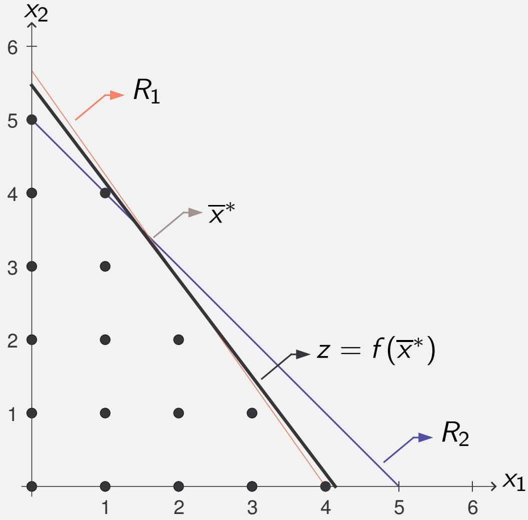
$$\max z = 17x_1 + 12x_2$$

$$\text{sujeito a:} \begin{cases} \begin{array}{rcrcrl} 10x_1 & + & 7x_2 & \leq & 40 & \quad (R_1) \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & \quad (R_2) \\ x_1 & & & \geq & 0 & \quad (R_3) \\ & & x_2 & \geq & 0 & \quad (R_4) \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{Z}^2 & \quad (R_5) \end{array} \end{cases}$$

Exemplo extraído de:
R. J. Vanderbei, *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 2nd ed. Princeton University, 2001.

Exemplo – Região Factível

PL_0:



Exemplo – PL_0

$$\max z = 17x_1 + 12x_2$$

$$\text{sujeito a:} \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 10x_1 & + & 7x_2 & \leq & 40 & \quad (R_1) \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & \quad (R_2) \\ x_1 & & & \geq & 0 & \quad (R_3) \\ & & x_2 & \geq & 0 & \quad (R_4) \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{R}^2 & \quad (R_5 r) \end{array} \right.$$

$$PL_0 : \left\{ \begin{array}{l} \overline{x}_0 = (1,67; 3,33) \\ \overline{z}_0 = 68,33 \end{array} \right.$$

$$\text{dois novos problemas:} \left\{ \begin{array}{lcl} \text{nova restrição} & : & x_1 \leq 1 \\ \text{nova restrição} & : & x_1 \geq 2 \end{array} \right.$$

Exemplo – Estado atual

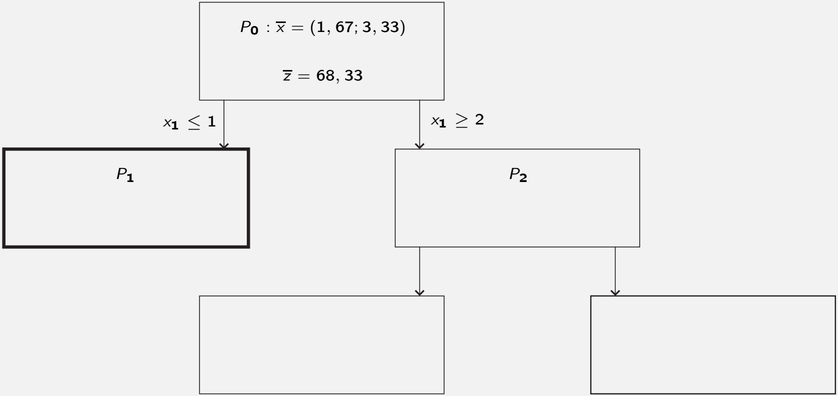
Condição de parada da iteração

7. (Ramificação). Selecione uma variável j da solução $\overline{x}_i$ de PL^i com valor não inteiro e divida P^i em dois problemas ($x^{i+1}(j) \leq \lfloor \overline{x}^i(j) \rfloor$ e $x^{i+2}(j) \geq \lceil \overline{x}^i(j) \rceil$). Adicione estes problemas à $\mathcal{P}$ e vá ao passo 2.

Variáveis

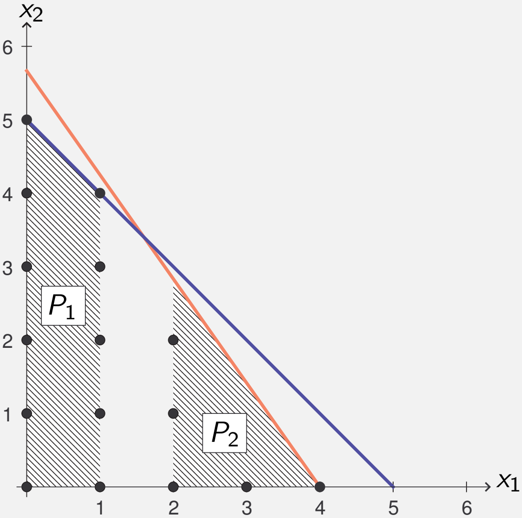
- $\mathcal{P} = \{P_1 \ , \ P_2\}$
- $x^* = \emptyset$
- $z^* = -\infty$

Exemplo – Árvore de Enumeração Implícita



Exemplo – Região Factível

PL_1 e PL_2:



Exemplo – PL_1

$$\max z = 17x_1 + 12x_2$$

$$\text{sujeito a:} \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 10x_1 & + & 7x_2 & \leq & 40 & (R_1) \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & (R_2) \\ x_1 & & & \leq & 1 & (R_{P_0^a}) \\ x_1 & & & \geq & 0 & (R_3) \\ & & x_2 & \geq & 0 & (R_4) \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{R}^2 & (R_5 r) \end{array} \right.$$

$$PL_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overline{x}_1 = (1; 4) \\ \overline{z}_1 = 65 \end{array} \right.$$

Atualiza-se x^* e z^*.

Exemplo – Estado atual

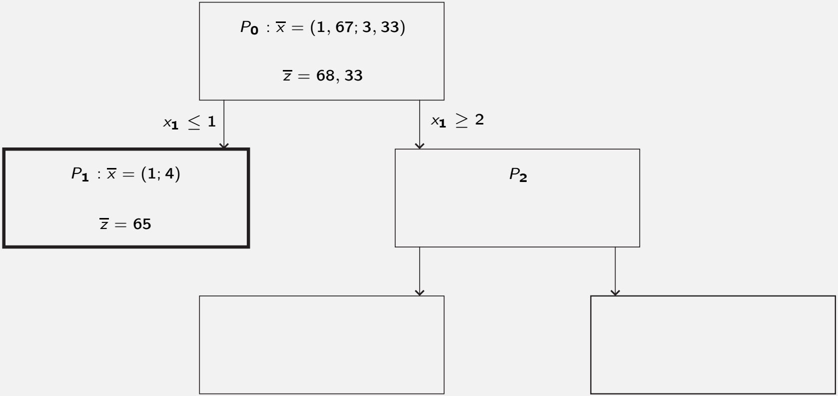
Condição de parada da iteração

6. (Teste de eliminação 3). Se a solução ótima $\overline{x}^i$ de PL^i é inteira com valor $\overline{z}^i$:
   1. Se $\overline{z}^i > z^*$: atualize x^* e z^*. Elimine os nós ativos de $\mathcal{P}$ tais que $\overline{z}^i \leq z^*$.
   2. Volte ao passo 2.

Variáveis

- $\mathcal{P} = \{P_2\}$
- $x^* = (1; 4)$
- $z^* = 65$

Exemplo – Árvore de Enumeração Implícita



Exemplo – PL_2

$$\max z = 17x_1 + 12x_2$$

$$\text{sujeito a:} \begin{cases} 10x_1 & + & 7x_2 & \leq & 40 & (R_1) \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & (R_2) \\ x_1 & & & \geq & 2 & (R_{P_0^b}) \\ x_1 & & & \geq & 0 & (R_3) \\ & & x_2 & \geq & 0 & (R_4) \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{R}^2 & (R_5 r) \end{cases}$$

$$PL_2 : \begin{cases} \overline{x}_2 = (2; 2,86) \\ \overline{z}_2 = 68,29 \end{cases}$$

$$\text{dois novos problemas: } \begin{cases} \text{nova restrição} & : & x_2 \leq 2 \\ \text{nova restrição} & : & x_2 \geq 3 \end{cases}$$

Exemplo – Estado atual

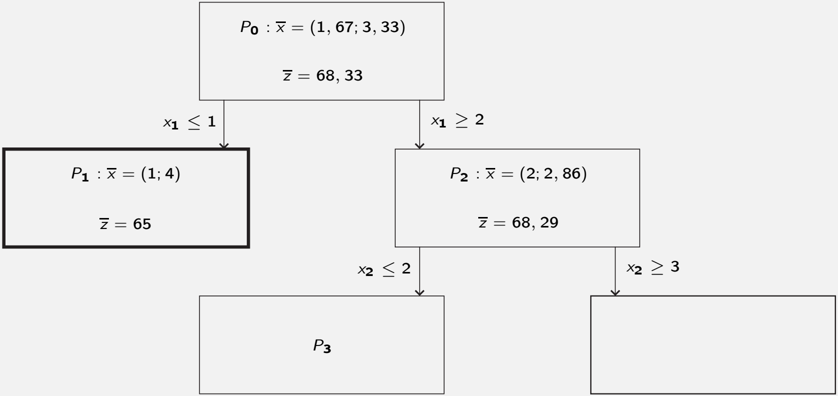
Condição de parada da iteração

7. (Ramificação). Selecione uma variável j da solução $\overline{x}_i$ de PL^i com valor não inteiro e divida P^i em dois problemas ($x^{i+1}(j) \leq \lfloor \overline{x}^i(j) \rfloor$ e $x^{i+2}(j) \geq \lceil \overline{x}^i(j) \rceil$). Adicione estes problemas à $\mathcal{P}$ e vá ao passo 2.

Variáveis

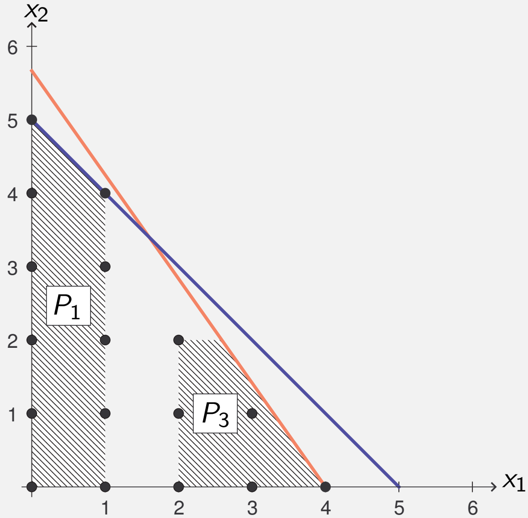
- $\mathcal{P} = \{P_3\}$
- $x^* = (1, 4)$
- $z^* = 65$

Exemplo – Árvore de Enumeração Implícita



Exemplo – Região Factível

PL_1 e PL_3:



Exemplo – PL_3

$$\max z = 17x_1 + 12x_2$$

$$\text{sujeito a:} \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 10x_1 & + & 7x_2 & \leq & 40 & (R_1) \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & (R_2) \\ x_1 & & & \geq & 2 & (R_{P_0^b}) \\ & & x_2 & \leq & 2 & (R_{P_2^a}) \\ x_1 & & & \geq & 0 & (R_3) \\ & & x_2 & \geq & 0 & (R_4) \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{R}^2 & (R_5 r) \end{array} \right.$$

$$PL_3 : \left\{ \begin{array}{l} \overline{x}_3 = (2,6;2) \\ \overline{z}_3 = 68,2 \end{array} \right.$$

$$\text{dois novos problemas:} \left\{ \begin{array}{lcl} \text{nova restrição} & : & x_1 \leq 2 \\ \text{nova restrição} & : & x_1 \geq 3 \end{array} \right.$$

Exemplo – Estado atual

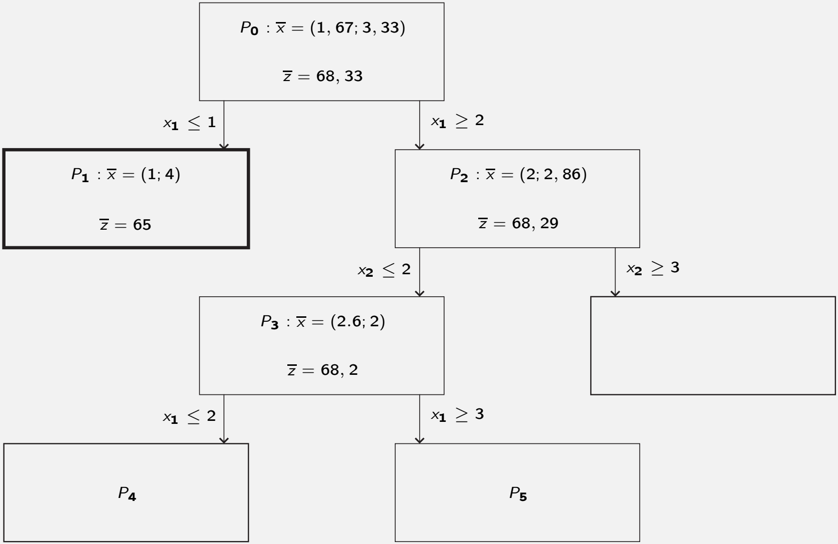
Condição de parada da iteração

7. (Ramificação). Selecione uma variável j da solução $\overline{x}_i$ de PL^i com valor não inteiro e divida P^i em dois problemas ($x^{i+1}(j) \leq \lfloor \overline{x}^i(j) \rfloor$ e $x^{i+2}(j) \geq \lceil \overline{x}^i(j) \rceil$). Adicione estes problemas à $\mathcal{P}$ e vá ao passo 2.

Variáveis

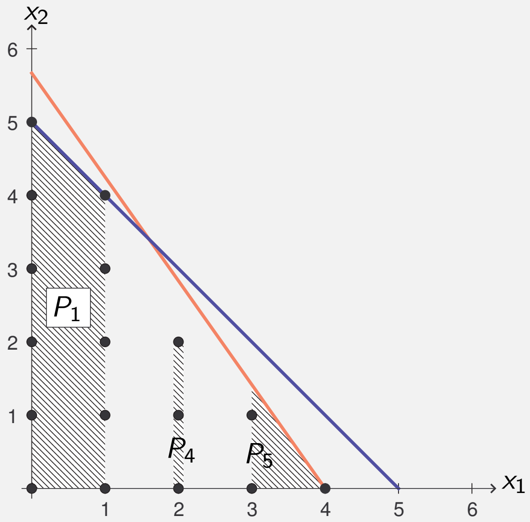
- $\mathcal{P} = \{P_4\ ,\ P_5\}$
- $x^* = (1, 4)$
- $z^* = 65$

Exemplo – Árvore de Enumeração Implícita

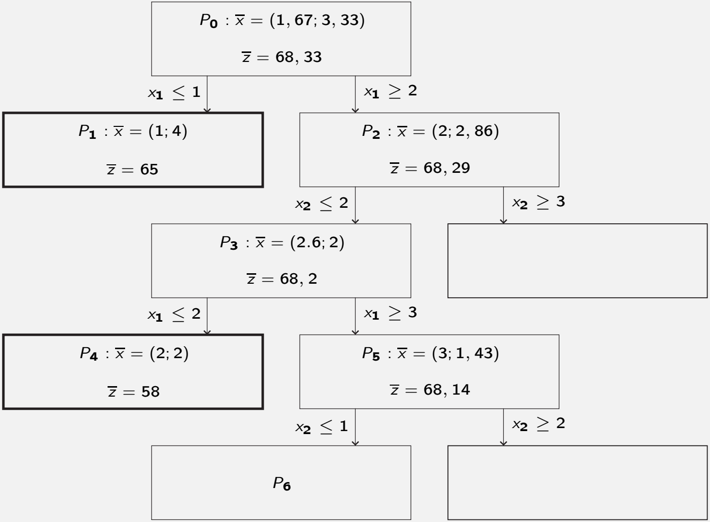


Exemplo – Região Factível

PL_1, PL_4 e PL_5:

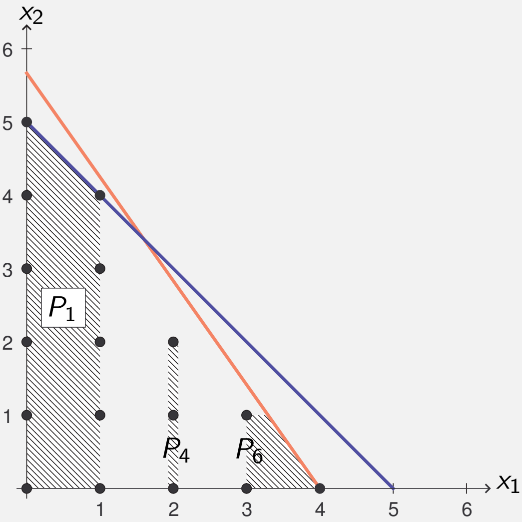


Exemplo – Árvore de Enumeração Implícita

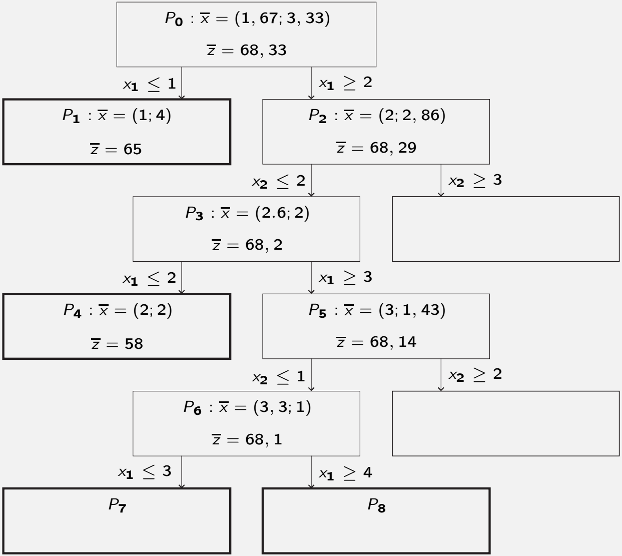


Exemplo – Região Factível

PL_1, PL_4, e PL_6:

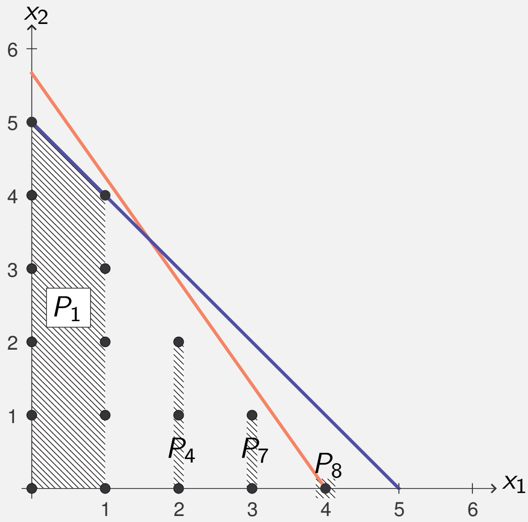


Exemplo – Árvore de Enumeração Implícita

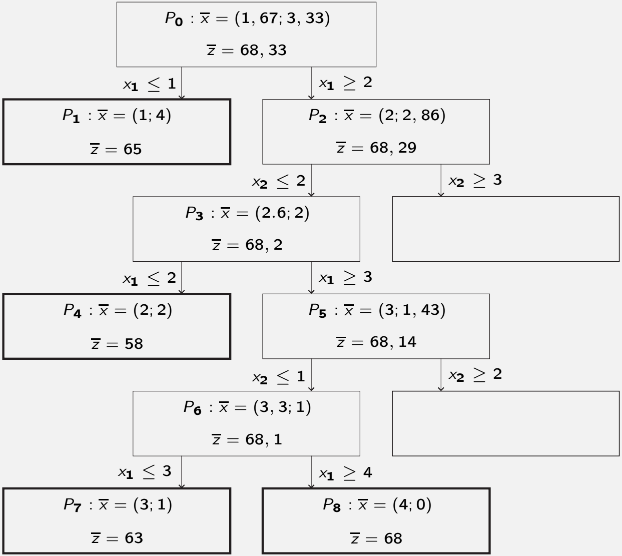


Exemplo – Região Factível

PL_1, PL_4, PL_7 e PL_8:



Exemplo – Árvore de Enumeração Implícita



Exemplo – Estado atual

Condição de parada da iteração

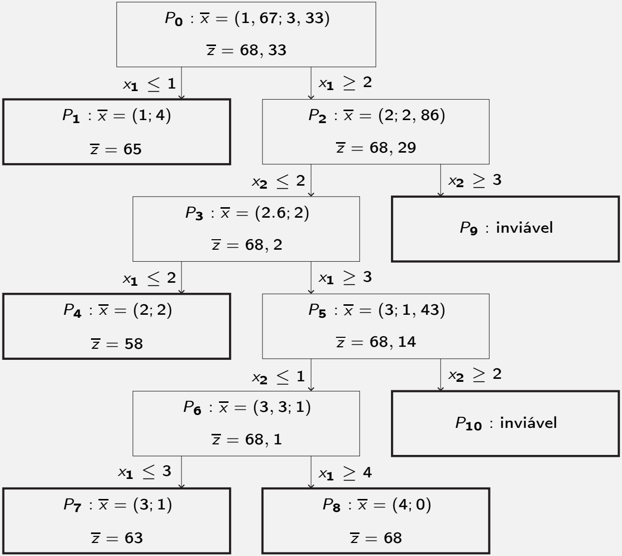
2. (Seleção de nós). Selecione o nó ativo i, associado ao problema P^i, da lista de nós ativos. Se a lista estiver vazia vá ao passo 8.

8. (Fim). Se $z^* = -\infty$, não existe solução factível. Caso contrário, a solução corrente x^* é a solução ótima.

Variáveis

- $\mathcal{P} = \{ \}$
- $x^* = (4, 0)$
- $z^* = 68$

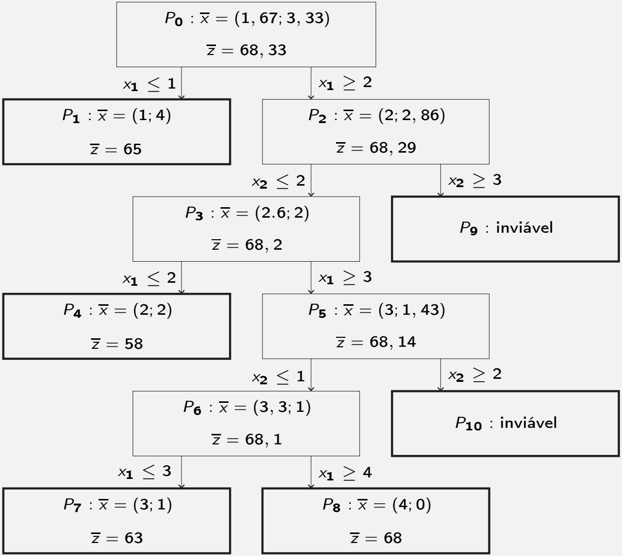
Exemplo – Árvore de Enumeração Implícita



Estratégia de Prosseguimento

- Busca em largura (*Breadth-first search*).
- Busca em profundidade (*Depth-first search* – adotada no exemplo).

Estratégia de Prosseguimento – Exemplo



Estratégia de Prosseguimento – Busca em Profundidade

- Todas as soluções inteiras se encontram em folhas da árvore:
  - O conhecimento de uma solução inteira pode acelerar o algoritmo.
- Facilita a implementação do algoritmo e reduz a quantidade de memória utilizada.
- Permite o uso da formulação dual para resolver o próximo problema.

Critérios de Parada Alternativos

- Numero de camadas (níveis) na árvore.
- Número de sub-problemas resolvidos.
- Tempo de processamento.