Prof. Eduardo Gontijo Carrano - DEE/EE/UFMG

Programação Linear

Programação Linear Inteira (PLI), Programação Linear Inteira Mista (PLIM) e Programação Binária

Introdução

Em muitas situações a hipótese de divisibilidade não é válida: muitas variáveis de decisão podem ser binárias ou inteiras.

- Por exemplo:
  - **Binárias:** um item deve ou não ser levado em um transporte, deve-se passar ou não por determinada estrada para chegar a uma cidade, deve atribuir ou não uma tarefa a um determinado funcionário, etc.
  - **Inteiras:** quantas unidades de um determinado produto devem ser produzidas, quantas vezes um determinado padrão de corte deve ser executado, quantas máquinas serão utilizadas para executar uma determinada tarefa, etc.

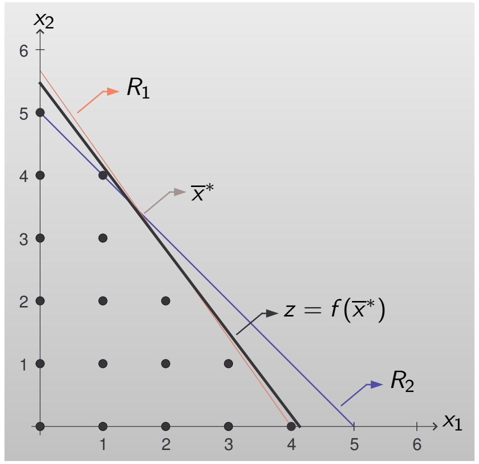
Nesses casos o Algoritmo Simplex tradicional não se aplica:

- Os vértices, que são as soluções candidatas do problema contínuo, não precisam necessariamente ser inteiros.

Exemplo

$$\max z = 17x_1 + 12x_2$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40 & (R_1) \\ x_1 + x_2 \leq 5 & (R_2) \\ x_1 \geq 0 & (R_3) \\ x_2 \geq 0 & (R_4) \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^2 & (R_5) \end{cases}$$



- Considerando o problema relaxado:

$$\max z = 17x_1 + 12x_2$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} 10x_1 & + & 7x_2 & \leq & 40 & (R_1) \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 5 & (R_2) \\ x_1 & & & \geq & 0 & (R_3) \\ & & x_2 & \geq & 0 & (R_4) \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{R}^2 & (R_5 r) \end{cases}$$

- Vértices factíveis:
  - x = [0,00 ; 0,00] f(x) = 00,00
  - x = [0,00 ; 5,00] f(x) = 60,00
  - x = [4,00 ; 0,00] f(x) = 68,00
  - **x = [1,67 ; 3,33] f(x) = 68,33**

  - A solução ótima do problema relaxado não é inteira e, logo, não é solução do problema original.
  - Muitas vezes não serão avaliados vértices inteiros no percurso até o ótimo.

Formulações

Programação Linear Inteira Mista (PLIM)

$$z = \max \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{d}^T\mathbf{y}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n_+ \ , \ \mathbf{y} \in \mathcal{Z}^p_+$$

Programação Linear Inteira (PLI)

$$z = \max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \in \mathcal{Z}^n_+$$

Programação Linear Binária (PLB)

$$z = \max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$$

Possíveis Estratégias de Solução

No Exemplo

- Solução do problema relaxado:
  - **x = [1,67 ; 3,33]** **f(x) = 68,33**
- Solução ótima do problema original:
  - **x = [4,00 ; 0,00]** **f(x) = 68**

Estratégia 1: Arredondamento da Solução

- Solução do problema relaxado:
  - **x = [1,67 ; 3,33]** **f(x) = 68,33**
- Solução arredondada:
  - **x = [2,00 ; 3,00]** **Infactível - R_1 é violada.**
- **Não garante sequer uma solução factível.**

Estratégia 2: Avaliação das Soluções Vizinhas

- Solução do problema relaxado:
  - **x = [1,67 ; 3,33]** **f(x) = 68,33**
- Soluções vizinhas:
  - x = [1,00 ; 3,00] f(x) = 53
  - x = [1,00 ; 4,00] f(x) = 65
  - x = [2,00 ; 3,00] infactível
  - x = [2,00 ; 4,00] infactível
- Não garante a solução ótima.
- Tem complexidade computacional exponencial: 2^N.

Referências

- [Arenales et al, 2007] M. Arenales; V. Armentano; R. Morabito; H. Yanasse. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**, Editora Campus / Elsevier, 2007.
- [Goldbarg et al, 2005] M. C. Goldbarg; H. P. Luna. **Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos**, 2a ed., Editora Campus / Elsevier, 2005.
- [Hillier et al, 2013] F. S. Hillier; G. J. Lieberman. **Introdução à Pesquisa Operacional**, 9a ed., Editora Mc Graw Hill, 2013.