Prof. Eduardo Gontijo Carrano - DEE/EE/UFMG

Programação Linear

Dualidade e
Pós-Otimização

Dualidade

Introdução

- Em todos os casos estudados até o momento, as variáveis de otimização significam alguma decisão a ser tomada:
    - quantidade de cada ingrediente em uma mistura, níveis de estoque de produtos em um determinado período, número de barras a ser cortado conforme um padrão de corte, etc.
- Os valores dessas variáveis dependem dos recursos disponíveis (vetor de recursos - b):
    - estoque dos ingredientes, limites de armazenamento, número de barras disponível ou capacidade das máquinas de corte, etc.

- Apesar de serem tratados como fixos (hipótese da certeza), estes recursos podem eventualmente variar, seja por interesse ou necessidade do decisor.
    - Recursos disponíveis para aquisição e armazenamento, demandas de mercado, etc.

- Se possível, o decisor deve considerar variações nas condições iniciais do problema de forma a responder perguntas do tipo:
  - Como o aumento no estoque de uma determinada matéria prima afeta o custo de produção do produto?
  - Qual o efeito do aumento dos reservatórios de uma rede urbana de água no consumo de energia para bombeamento?
  - Como o aumento ou diminuição da demanda de mercado de um produto afeta as perdas de produção?

- O problema tratado até o momento, que é representado pelas decisões "tangíveis" é chamado de *Problema Primal*.
- A análise do efeito da variação dos recursos no problema é possível por meio de uma formulação alternativa, chamada de *Problema Dual*.

Relaxação Lagrangiana e Problema Dual

- Considere um problema na forma padrão:

$$
\begin{gathered}
\min f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \geq 0
\end{gathered}
$$

Problema Motivador

- Precisa-se cortar bobinas de aço para atendimento de dois tipos de demanda:
  - Bobinas de 0,4m: 108 toneladas.
  - Bobinas de 0,3m: 120 toneladas.
- Cada bobina a ser cortada tem largura L = 1m, peso P = 1 tonelada e pode ser cortada seguindo um dos seguintes padrões de corte:
  - P1: [2 0] - P2: [1 2] - P3: [0 3].
- Deseja-se gastar o mínimo possível de material para atendimento da demanda.

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 = 108 \\ \frac{3}{5}x_2 + \frac{9}{10}x_3 = 120 \end{cases}$$

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ \geq 0$$

$$B^* : [x_1 \ x_2]$$

$$\mathbf{x}^* = [35 \ 200 \ 0]^T$$

$$f(\mathbf{x}^*) = 235$$

Pergunta relevante: qual o impacto no custo total (número total de bobinas cortadas) caso haja alteração na demanda de uma ou mais sub-bobinas?

- Considere que o "vetor de recursos" (b) é passível de perturbações:
  - nesse caso a restrição $Ax=b$ se torna $Ax=b-y$ onde y representa as perturbações do vetor b.
  - logo, as perturbações pode ser expressas por:
    - $y=b-Ax$.

Neste caso, o problema de otimização linear pode ser reformulado como:

$$\min f(\mathbf{x}) + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_m y_m$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\text{onde } \mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Onde λ_i, representa o custo unitário de perturbar o recurso i.

Função Lagrangeana e Função Dual

Essa função objetivo é chamada função Lagrangeana:

$$\min f(\mathbf{x}) + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_m y_m$$

$$\text{onde } \mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} \geq 0$$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \lambda) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \lambda^T\mathbf{y} \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \lambda^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{c}^T - \lambda^T\mathbf{A})\mathbf{x} + \lambda^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

mas

$$(\mathbf{c}^T - \lambda^T\mathbf{A}) = (c_1 - \lambda^T\mathbf{a}_1\ ,\ c_2 - \lambda^T\mathbf{a}_2\ ,\ \ldots\ ,\ c_n - \lambda^T\mathbf{a}_n)$$

Logo, a função Lagrangeana pode ser escrita por:

$$L(x_1, \ldots, x_n) = (c_1 - \lambda^T\mathbf{a}_1)x_1 + \ldots + (c_n - \lambda^T\mathbf{a}_n)x_n + \lambda^T\mathbf{b}$$

A função *dual* é definida por:

$$
\begin{aligned}
g(\lambda) &= \min_{x\geq 0}\{L(x_1,\ldots,x_2,\lambda)\} \\
&= \min_{x\geq 0}\{(c_1-\lambda^T\mathbf{a}_1)x_1+\ldots+(c_n-\lambda^T\mathbf{a}_n)x_n+\lambda^T\mathbf{b}\} \\
&= \min_{x_1\geq 0}\{(c_1-\lambda^T\mathbf{a}_1)x_1\}+\ldots+\min_{x_n\geq 0}\{(c_n-\lambda^T\mathbf{a}_n)x_n\}+\lambda^T\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

A decomposição em $\underline{n}$ subproblemas é válida porque as variáveis x são independentes entre si.

Analisando

$$g(\lambda) = \min_{x_1\geq 0}\{(c_1-\lambda^T\mathbf{a}_1)x_1\}+\ldots+\min_{x_n\geq 0}\{(c_n-\lambda^T\mathbf{a}_n)x_n\}+\lambda^T\mathbf{b}\}$$

os primeiros n problemas têm solução óbvia:

$$x^* = \min_{x_i\geq 0}\{(c_i-\lambda^T\mathbf{a}_i)x_i\} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad (c_i-\lambda^T\mathbf{a}_i)\geq 0 \\ -\infty & \text{se} \quad (c_i-\lambda^T\mathbf{a}_i)<0 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
g(\lambda) &= \min_{\mathbf{x}\geq 0}\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \lambda^T(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})\} \\
g(\lambda) &\leq \min_{\mathbf{x}\geq 0,\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \lambda^T(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})\} \\
\min_{\mathbf{x}\geq 0,\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \lambda^T(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})\} &= \min_{\mathbf{x}\geq 0,\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}\} \\
\min_{\mathbf{x}\geq 0,\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}}\{\mathbf{c}^T\mathbf{x}\} &\leq f(\mathbf{x})\ \forall\ \{\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq 0\}
\end{aligned}
$$

Propriedade

Para todo $\lambda \in \mathcal{R}^m$ e para todos $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} \geq 0$:

$$g(\lambda) \leq f(\mathbf{x})$$

Ou seja: $g(\lambda)$ é um limitante inferior de $f(\mathbf{x})$.

Formulação do Problema Dual

$$\max_{\lambda \in \mathcal{R}^m} g(\lambda)$$

$\lambda = (\lambda_1 \;,\; \ldots \;,\; \lambda_m)^T$ são as variáveis duais.

sendo $g(\lambda) = \min_{\mathbf{x} \geq 0} L(\lambda, \mathbf{x})$.

Para cada termo dependente de x:

$$x^* = \min_{x_i \geq 0} \{(c_i - \lambda^T \mathbf{a}_i) x_i\} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad (c_i - \lambda^T \mathbf{a}_i) > 0 \\ 0 & \text{se} \quad (c_i - \lambda^T \mathbf{a}_i) = 0 \\ -\infty & \text{se} \quad (c_i - \lambda^T \mathbf{a}_i) < 0 \\ & \quad\quad\; \text{(não faz sentido)} \end{cases}$$

logo, deve-se impor restrições do tipo:

$$c_i - \lambda^T \mathbf{a}_i \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^T \mathbf{a}_i \leq c_i$$

$$\lambda^T \mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \lambda \leq \mathbf{c}$$

mas se:

$$\mathbf{A}^T \lambda \leq \mathbf{c}$$

então:

$$g(\lambda)_{\mathbf{A}^T\lambda\leq\mathbf{c}} = \min_{\mathbf{x}\geq 0}\{(\mathbf{c}^T - \lambda^T\mathbf{A})\mathbf{x}\} + \lambda^T\mathbf{b} = \lambda^T\mathbf{b}$$

Problema Dual

$$\max g(\lambda) = \mathbf{b}^T\lambda$$
$$\mathbf{A}^T\lambda \leq \mathbf{c}$$

- *Problema Primal* (forma padrão):

$$\min f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}\ ,\ \ \mathbf{x} \geq 0$$

- *Problema Dual* (equivalente à forma padrão):

$$\max g(\lambda) = \mathbf{b}^T\lambda$$

$$\mathbf{A}^T\lambda \leq \mathbf{c}$$

Exemplo

- Escreva a formulação do problema motivador (corte de bobinas).

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 = 108 \\ \frac{3}{5}x_2 + \frac{9}{10}x_3 = 120 \end{cases}$$

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ \geq 0$$

Primal / Dual	Dual / Primal
min	max
b	c
c	b
restrição	**variável**
$=$	livre
$\leq$	$\leq$
$\geq$	$\geq$
variável	**restrição**
$\geq$	$\leq$
$\leq$	$\geq$
livre	$=$

Exercício 1

$$\min f(x) = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ 3x_1 + 4x_2 & \leq & 5 \\ x_1 - x_2 & \leq & 2 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Exercício 2

$$\min g(\lambda) = 3\lambda_1 + 5\lambda_2$$

$$\begin{array}{rcl} -2\lambda_1 + 3\lambda_2 & \geq & 1 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1 & \leq & 0 \\ \lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \geq 0 & & \end{array}$$

Propriedades e Relações Primais-Duais

Sejam:

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \ , \ \mathbf{x} \geq 0\}$$

$$D = \{\lambda \in \mathcal{R}^m \mid \mathbf{A}^T \lambda \leq \mathbf{c}\}$$

$$g(\lambda) \leq f(\mathbf{x}) \ , \ \forall \lambda \in D \ , \ \forall \mathbf{x} \in P$$

Propriedade 1:

- O *dual* do *Problema Dual* é o *Problema Primal*.

Propriedade 2:

- Suponha que $P \neq \emptyset$ (existe solução factível *primal*). O problema *primal* não tem solução ótima se e somente se $D = \emptyset$ (não existe solução factível *dual*).
  - No caso de minimização, $f(\boldsymbol{x}) \to -\infty$, se e somente se não existir solução factível *dual*.

Propriedade 3:

- Suponha que $D \neq \emptyset$ (existe solução factível *dual*). O problema dual não tem solução ótima se e somente se $P = \emptyset$ (não existe solução factível *primal*).

Propriedade 4:

- O problema *primal* tem solução ótima se e somente se o *dual* tiver solução ótima.

Propriedade 5:

- Sejam:

$$\mathbf{x}^* \in P \text{ e } \lambda^* \in D$$

- Se:

$$f(\mathbf{x}^*) = g(\lambda^*)$$

- Então:

$\mathbf{x}^*$ é solução ótima primal e λ^* é solução ótima dual.

Propriedade 6 (folgas complementares):

As soluções $\mathbf{x}^* \in \mathcal{R}^n$ e $\lambda^* \in \mathcal{R}^m$ são ótimas, primal e dual respectivamente se, e somente se:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\ ,\ \mathbf{x} \geq 0 & (\mathbf{x} \text{ é factível primal}) \\ \mathbf{A}^T\lambda + \mu = \mathbf{c}\ ,\ \mu \geq 0 & (\lambda \text{ é factível dual}) \\ \mu_j x_j = 0\ ,\ j = 1, \ldots, n & (\text{folgas complementares}) \end{array}$$

Exemplo

- Encontre a solução ótima *dual* utilizando folgas complementares.

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 = 108 \\ \frac{3}{5}x_2 + \frac{9}{10}x_3 = 120 \end{cases}$$

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ \geq 0$$

$$B^* : [x_1 \ x_2]$$

$$\mathbf{x}^* = [35 \ 200 \ 0]^T$$

$$f(\mathbf{x}^*) = 235$$

$$\max 108\lambda_1 + 120\lambda_2$$

$$\begin{cases} \frac{4}{5}\lambda_1 + \mu_1 = 1 \\ \frac{2}{5}\lambda_1 + \frac{3}{5}\lambda_2 + \mu_2 = 1 \\ \frac{9}{10}\lambda_2 + \mu_3 = 1 \end{cases}$$

$$\mu_1 \ , \ \mu_2 \ , \ \mu_3 \ \geq 0$$

Propriedade 7:

- O vetor *multiplicador simplex* (λ) da solução ótima *primal* é uma solução ótima *dual*.

Método Simplex Dual

Introdução

- O método *Simplex Dual* é muito utilizado para aplicações de reotimização (variações do modelo original pós-otimização) e em Programação Linear Inteira.
- Adequado para situações onde o modelo original se torna mais restrito (redução da disponibilidade de recursos ou acréscimo de restrições).

- Após as variações do modelo, é possível que a base ótima atual se torne infactível no novo problema.
- Para solução do problema utilizando o algoritmo *Simplex*, seria necessário utilizar o algoritmo de duas fases.
- No problema *dual*:
  - A variação do vetor de recursos afeta o custo dos coeficientes do problema *dual*.
  - A inclusão de uma nova restrição ao modelo original implica em uma nova variável no problema *dual*.
    - Em ambos os casos a factibilidade do problema *dual* não é afetada.

- O algoritmo *Simplex Dual* consiste em, dada uma base ótima conhecida para o problema original, aplicar o algoritmo *Simplex* no problema dual, a partir da base *dual* correspondente.
- A solução obtida ao fim da execução do algoritmo *Simplex*, uma vez transformada na solução *primal* correspondente, é a solução ótima do modelo modificado.

Pós-Otimização

Introdução

- A análise pós-otimização constitui uma parte importante na solução de um problema de pesquisa operacional.
  - Ao se obter uma solução para um problema inicial é necessário derivar conclusões relativas a viabilidade do modelo e avaliar variações deste que sejam favoráveis e, ao mesmo tempo, possíveis.

Análise Pós-Otimização

Técnica	Propósito
Validação	Encontrar erros no modelo.
Reotimização	Avaliar o desempenho do modelo em situações alternativas.
Preços-sombra	Tomar decisões gerenciais sobre a alocação de recursos.
Análise de Sensibilidade	Determinar condições que possam afetar a solução ótima.

Validação

- Em geral a primeira versão de modelos PL complexos contém muitas falhas.
  - Restrições desconsideradas.
  - Parâmetros estimados de forma incorreta.
  - Variáveis modeladas de forma inadequada, etc.
- Todo modelo deve ser validado, e devidamente corrigido, até apresentar resultados válidos.

- Não existe uma metodologia sistemática e geral para validação de modelos.
- Boas práticas de validação:
  - Revisão geral do modelo.
  - Verificação da consistência das expressões matemáticas e das unidades dimensionais.
  - Verificação da adequabilidade das respostas fornecidas pelo modelo quando sujeito à variações sutis dos parâmetros.

- **Teste de retrospectiva:** verificar qual teria sido o comportamento da solução oferecida pelo modelo se ela tivesse sido aplicada no passado.
  - Auxilia na estimativa do ganho proporcionado.
  - Depende da representatividade dos dados passados.
- **A documentação do processo de validação do modelo é essencial.**

Reotimização

- Modelos que descrevem problemas reais são, em geral, muito grandes.
  - Variações do modelo básico podem ser objeto de interesse (cenários alternativos).
- A abordagem óbvia para este tipo de problema é a aplicação do algoritmo Simplex para cada variação do modelo.
  - O algoritmo pode levar milhares de iterações para convergir em cada um dos problemas.

- Uma abordagem mais eficiente para lidar com este tipo de situação é chamada de *Reotimização*.
- Na *Reotimização*, a solução final do modelo original é utilizada como solução inicial do novo problema:
  - Se essa for uma solução básica factível, então o método *Simplex* é aplicado diretamente, a partir dessa solução.
  - Se essa não for uma solução básica factível, então o método *Simplex Dual* geralmente pode ser aplicado para encontrar a nova solução ótima partindo da solução do problema original.

- O uso da *Reotimização* é justificado pelo fato da solução ótima do modelo modificado estar geralmente muito mais próxima da solução ótima do modelo original que da solução básica inicial considerada.
  - Em muitos casos não há alteração da base ótima.
    - O algoritmo *Simplex* converge na primeira iteração.
  - Especialmente válido para pequenas variações do modelo.

Preços-Sombra

- Um problema PL pode ser interpretado como a alocação de recursos a atividades.
- Em muitos casos pode haver flexibilidade dos recursos disponíveis.
  - Os valores de b_i no modelo inicial (validado) podem representar uma decisão gerencial inicial.
    - Pode-se avaliar se existem decisões gerenciais que sejam mais favoráveis e, ao mesmo tempo, plausíveis.
- A contribuição dos recursos para a função objetivo é uma informação extremamente útil para essa avaliação.

O **preço-sombra** para um recurso *i* mede o valor marginal desse recurso, i.e., a taxa com a qual a função objetivo é afetada por pequenas variações do recurso *i*.

- O preço-sombra é identificado pelos valores de λ na solução ótima obtida pelo *Simplex*.

No problema motivador:

- Demanda de bobinas de 0,4m: 108 toneladas.
- Demanda de bobinas de 0,3m: 120 toneladas.

Solução ótima primal:

- $x_1 = 35$
- $x_2 = 200$

Solução ótima dual (preços-sombra):

- $\lambda_1 = 5/4$
- $\lambda_2 = 5/6$

Análise de Sensibilidade

Considere o problema primal na forma padrão:

$$F(\mathbf{b}) = \min f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

E as soluções primais e duais ótimas:

$$\mathbf{x}_B^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\ ,\ \mathbf{x}_N^* = 0$$
$$\lambda^{T*} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{b}) &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B \\
&= \mathbf{c}_B^T B^{-1} \mathbf{b} \\
&= \lambda^T \mathbf{b} \\
&= b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \ldots + b_m\lambda_m
\end{aligned}
$$

Se F for diferenciável (válido para pequenas variações de b), então:

$$\frac{\partial F(\mathbf{b})}{\partial b_i} = \lambda_i \quad , \quad i = 1, \ldots, m$$

Seja:

$$\mathbf{b}' = [b_1 \ b_2 \ \ldots \ (b_i + \delta) \ \ldots \ b_m]'$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{b}') &= b_1\lambda_1 + \ldots + (b_i + \delta)\lambda_i + \ldots + b_m\lambda_m \\
&= F(\mathbf{b}) + \delta\lambda_i
\end{aligned}
$$

Lembrando que λ_i depende da base:

$$\lambda^{T*} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

Se: $\mathbf{b}' = [b_1 \ b_2 \ \dots \ (b_i + \delta) \ \dots \ b_m]'$

$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

então:

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta)$$

$$\Delta = [0 \ \dots \ \Delta_i = \delta \ \dots 0]^T$$

$$\mathbf{x}'_B \geq 0$$

Exemplo

- Para o problema motivador (corte de bobinas).
  - A. Considerando a solução ótima dual, identifique alguma demanda que deveria ser estimulada ou desestimulada.
  - B. Encontre a perturbação máxima que pode ser imposta à segunda restrição sem alteração na base ótima.
  - C. Analise a perda de material para a situação da letra (B).

Referências

- [Arenales et al, 2007] M. Arenales; V. Armentano; R. Morabito; H. Yanasse. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**, Editora Campus / Elsevier, 2007.
- [Goldbarg et al, 2005] M. C. Goldbarg; H. P. Luna. **Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos**, 2a ed., Editora Campus / Elsevier, 2005.
- [Hillier et al, 2013] F. S. Hillier; G. J. Lieberman. **Introdução à Pesquisa Operacional**, 9a ed., Editora Mc Graw Hill, 2013.