Prof. Eduardo Gontijo Carrano - DEE/EE/UFMG

Programação Linear

Algoritmo Simplex.

Hipóteses da Linearidade

- Proporcionalidade.
- Aditividade.
- Divisibilidade.
- Certeza.

Hipóteses Adicionais Não-Restritivas

- **Não negatividade:** deve ser sempre possível desenvolver dada atividade em qualquer nível não negativo e qualquer proporção de um dado recurso deve sempre poder ser utilizado.
- **Forma padrão:** todo problema de otimização linear deve ser expresso na forma padrão.

Forma Padrão

$$\min f(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$
$$x_1, \ldots, x_n \geq 0$$

$$\min f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

Solução Factível, Região Factível e Solução Ótima

- **Solução factível:** Uma solução x é dita factível se satisfaz todas as restrições do problema e as condições de não-negatividade.
- **Região factível:** O conjunto de todas as soluções factíveis é chamado região factível.
- **Solução ótima:** A solução factível que fornece o menor valor de função objetivo é chamada de solução ótima.

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{x} \geq 0$$

Transformação de Problemas para a Forma Padrão

Problemas de Maximização

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \text{ para todo } \mathbf{x} \text{ factível}$$

multiplicando a inequação por -1:

$$-f(\mathbf{x}^*) \leq -f(\mathbf{x}) \text{ para todo } \mathbf{x} \text{ factível}$$

logo:

$$\max f(\mathbf{x}) \Rightarrow \min -f(\mathbf{x})$$

Exercício 1

$$\max 2x_1 - x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_2 + 2x_3 & = & 4 \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

Restrições de Desigualdade: ≤

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

Variável de folga:

$$x_k = b_i - (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)$$

logo:

$$\begin{array}{c} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \\ \Downarrow \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + x_k = b_i \end{array} \qquad x_k \geq 0$$

Restrições de Desigualdade: ≥

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

Variável de folga:

$$-x_k = b_i - (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n)$$

logo:

$$\begin{array}{c} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \\ \Downarrow \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n - x_k = b_i \end{array} \qquad x_k \geq 0$$

Exercício 2

$$\min 2x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 & \leq & -1 \end{cases}$$

$$x \geq 0$$

Variáveis Livres

$$x_i = x_i^+ - x_i^- \quad , \quad \text{com } x_i^+, x_i^- \geq 0$$

Exercício 3

$$\min 2x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 & = & 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = & -1 \end{cases}$$

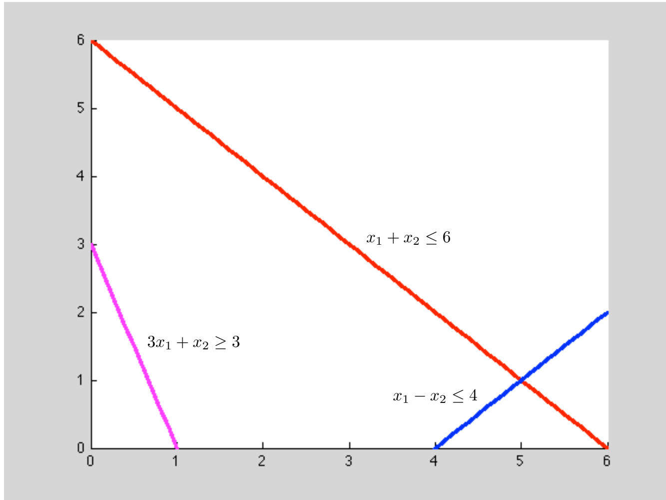
$$x_1 \text{ livre}, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Estratégia Simplex

Teoria Básica

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 + x_2 & \geq & 3 \end{array}\right.$$

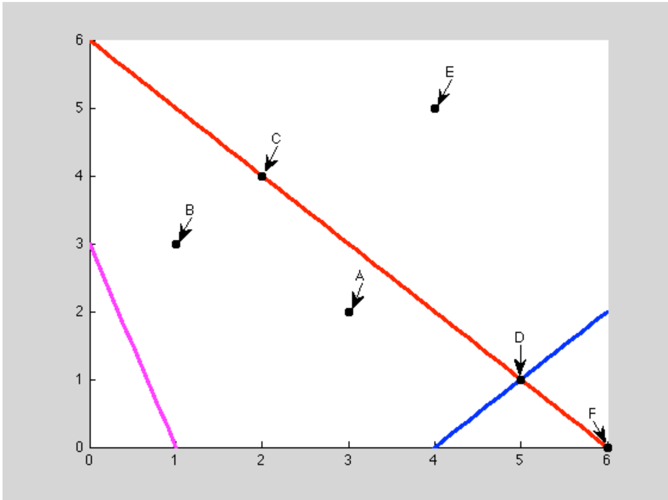
$$x_1, x_2 \geq 0$$

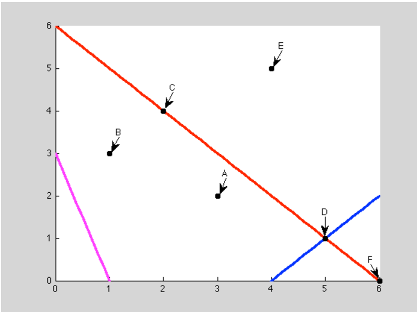


Na forma padrão:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 & = & 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 & = & 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq \quad 0$$

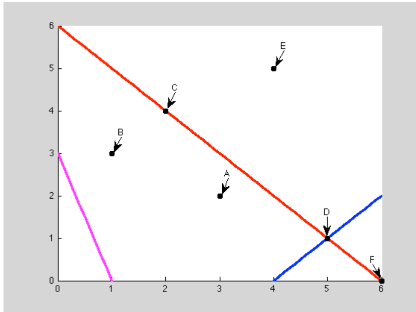




Ponto A:

$x_1 = 3$
$x_2 = 2$
$x_3 = 1$
$x_4 = 3$
$x_5 = 8$

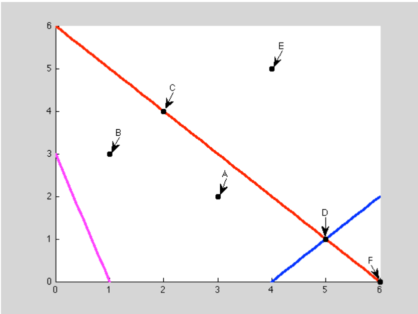
19



Ponto B:

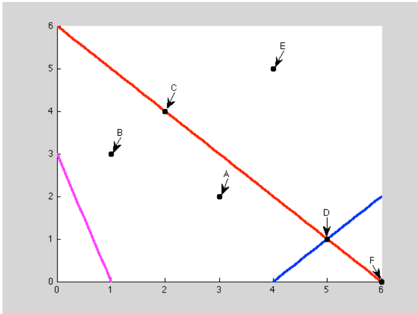
$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$x_3 = 2$
$x_4 = 6$
$x_5 = 3$

20



Ponto C:

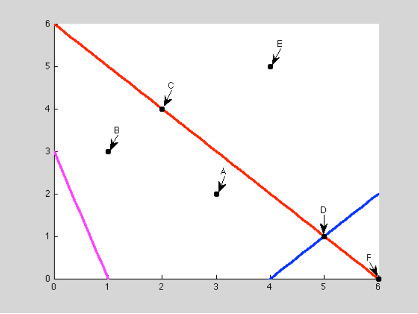
$x_1 = 2$
$x_2 = 4$
$x_3 = 0$
$x_4 = 6$
$x_5 = 7$



Ponto D:

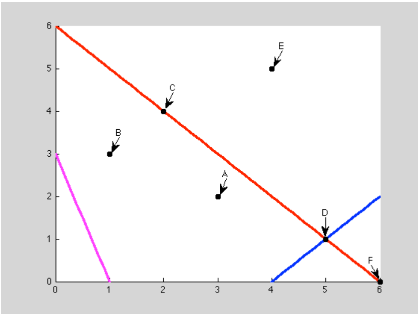
$x_1 = 5$
$x_2 = 1$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$x_5 = 13$

- Os pontos **A**, **B**, **C** e **D** são factíveis:
  - o sistema $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ é atendido;
  - as restrições de não-negatividade são atendidas.
- O ponto C está sobre uma restrição (aresta do politopo).
- O ponto D está sobre a interseção de duas restrições (vértice do politopo).



Ponto E:

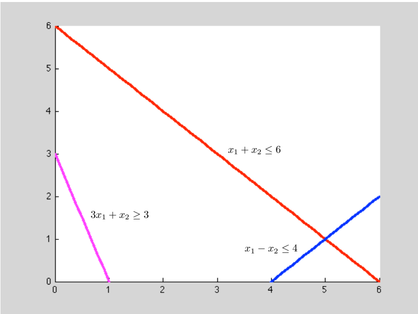
$x_1 = 4$
$x_2 = 5$
$x_3 = -3$
$x_4 = 5$
$x_5 = 14$



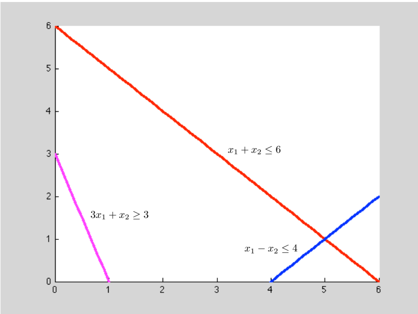
Ponto F:

$x_1 = 6$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = -2$
$x_5 = 15$

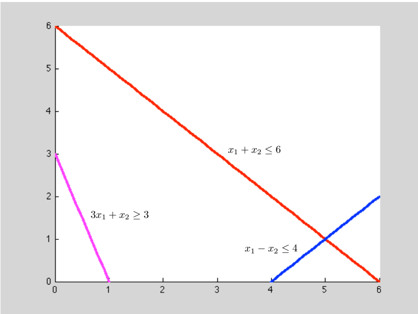
- Os pontos **E** e **F** não são factíveis:
  - o sistema $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ é atendido;
  - as restrições de não-negatividade não são atendidas.
- O ponto F está sobre a interseção de duas restrições.



$$
\begin{aligned}
x_3 = 0 \quad &\rightarrow \quad x_1 + x_2 = 6 \\
x_3 < 0 \quad &\rightarrow \quad x_1 + x_2 > 6 \\
x_3 > 0 \quad &\rightarrow \quad x_1 + x_2 < 6
\end{aligned}
$$



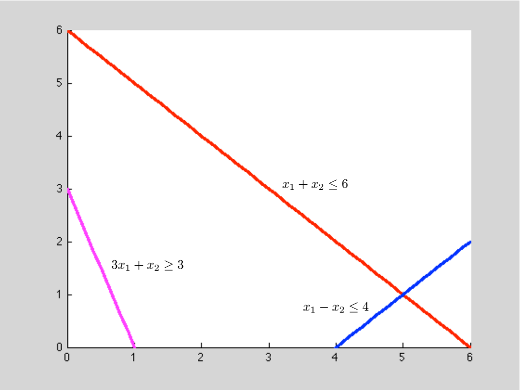
$$
\begin{aligned}
x_4 = 0 \quad &\rightarrow \quad x_1 - x_2 = 4 \\
x_4 < 0 \quad &\rightarrow \quad x_1 - x_2 > 4 \\
x_4 > 0 \quad &\rightarrow \quad x_1 - x_2 < 4
\end{aligned}
$$



$$
\begin{array}{lcl}
x_5 = 0 & \rightarrow & 3x_1 + x_2 = 3 \\
x_5 < 0 & \rightarrow & 3x_1 + x_2 < 3 \\
x_5 > 0 & \rightarrow & 3x_1 + x_2 > 3
\end{array}
$$

- O sistema linear resultante é sub-determinado:
  - possui *n* incógnitas e *m* equações:
    - sempre: $n > m$;
    - geralmente: $n >> m$.
  - possui *m* variáveis dependentes e *n*-*m* variáveis independentes (as quais devem ser associados valores);
    - múltiplas soluções.

Um vértice será sempre solução do problema de otimização, se factível.



Deve-se então examinar os vértices para encontrar a solução ótima.

31

- Fazendo-se x_3=0 e x_4=0.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \\ x_5 = 13 \end{cases}$$

Solução/Vértice factível
Ponto D

32

- Deve-se buscar partições do problema para identificar os vértices e encontrar o vértice ótimo:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{B}\ \mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}$$

- $\mathbf{x}_B$: conjunto de variáveis básicas.
- $\mathbf{x}_N = \overrightarrow{0}$: conjunto de variáveis não-básicas.
- $\mathbf{B}$: partição básica de $\mathbf{A}$.
- $\mathbf{N}$: partição não-básica de $\mathbf{A}$.

No exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 & = & 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 & = & 3 \end{array} \right.$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Primeira Estratégia de Solução

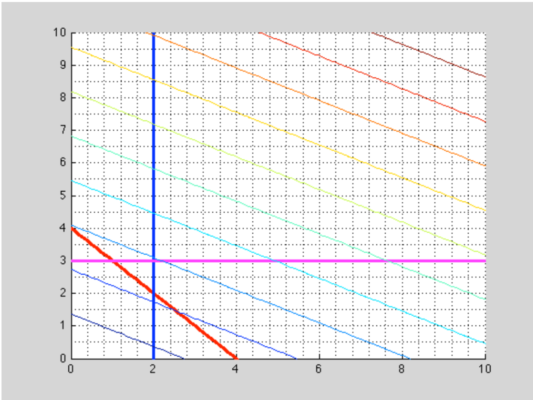
1. Inicialize $\mathbf{x}^*$:= *[]* e $f(\mathbf{x}^*)$:= *inf*;
2. Para cada partição *m* x *m* de *A*:
   1. Encontre o vértice correspondente $\mathbf{x_p}$;
   2. Avalie $\mathbf{x_p}$ para se obter $f(\mathbf{x_p})$;
   3. Se $\mathbf{x_p}$ é uma solução básica factível e $f(\mathbf{x_p}) < f(\mathbf{x}^*)$:
      1. $\mathbf{x}^* := \mathbf{x_p}$;
      2. $f(\mathbf{x}^*) := f(\mathbf{x_p})$.

Problema 1 (RG)

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & & & \leq & 2 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Represente o problema na forma padrão.
- Encontre todos os vértices factíveis do problema.
- Encontre as bases associadas a cada um desses vértices.
- Encontre o valor de função objetivo em cada vértice.
- Encontre a solução ótima do problema.

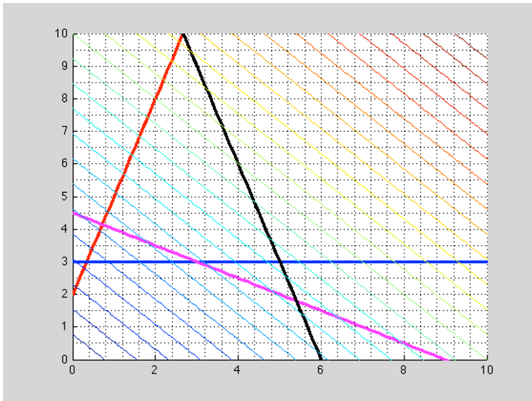


Problema 2 (RG)

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr}
-3x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & x_2 & \leq & 3 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 9 \\
3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

- Represente o problema na forma padrão.
- Encontre todos os vértices factíveis do problema.
- Encontre as bases associadas a cada um desses vértices.
- Encontre o valor de função objetivo em cada vértice.
- Encontre a solução ótima do problema.



Dificuldades

- **Dificuldade 1:**
  - Nem toda partição *m* x *m* é uma partição válida:
    - **Caso 1:** nem todo sistema $\boldsymbol{B}.\mathbf{x}_B = \boldsymbol{b}$ tem solução:
      - A matriz ***B*** deve ser inversível.

Exemplo

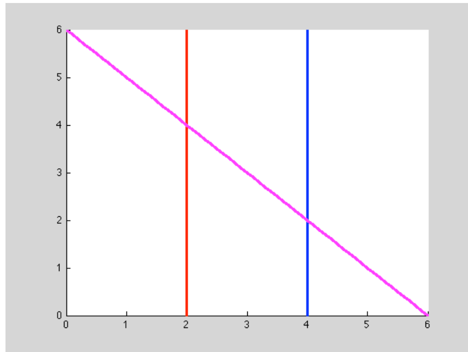
$$\begin{cases} x_1 & \geq & 2 \\ x_1 & \leq & 4 \\ x_1 + x_2 & \leq & 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$



- **Dificuldade 1:**
  - Nem toda partição m x m é uma partição válida:
    - **Caso 2:** mesmo que o sistema $\boldsymbol{B}.\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}$ tenha solução, isso não garante factibilidade:
      - As restrições de não-negatividade não são necessariamente atendidas.
        - Existem vértices infactíveis.

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 + x_2 & \geq & 3 \end{cases}$$

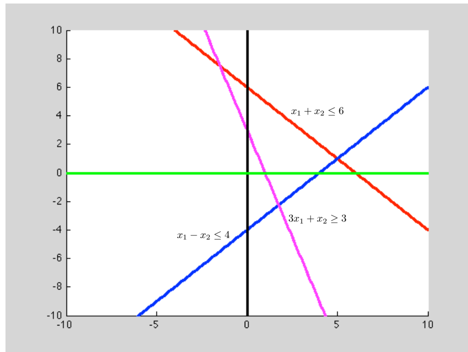
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_4 = -2 \\ x_5 = 15 \end{cases}$$

Solução/Vértice infactível
Ponto F



- **Dificuldade 2:**
  - O número de vértices (bases) cresce fatorialmente com o número de variáveis:

$$N_{bases} = C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

n	m	bases
5	3	10
10	6	210
20	12	125.970
40	24	6,28E+10
80	48	2,19E+22
160	96	3,75E+45

Definições e Propriedades

Partição Básica

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}\ \mathbf{N}]$$

- ***B***: matriz básica *m*x*m*.
- ***N***: matriz não-básica *m*x*(n-m)*.

Solução Geral

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{B}\ \mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Bx}_B + \mathbf{Nx}_N = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Bx}_B = \mathbf{b} - \mathbf{Nx}_N$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx}_N$$

Solução Básica

Dado: $\mathbf{A} = [\mathbf{B}\ \mathbf{N}]$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx}_N$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}_N} = 0 \end{cases}$$

- **Propriedade 1:** considere a região factível S tal que $A\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$. Um ponto $\mathbf{x}$ de S é um vértice S se e somente se $\mathbf{x}$ for uma solução básica factível.

- **Propriedade 2:** se um problema de otimização linear tem solução ótima, então existe um vértice ótimo.

Método Simplex

Método Simplex

Três perguntas devem ser respondidas:

1. Como encontrar uma solução inicial básica factível?
2. Essa solução é ótima?
3. Caso não seja ótima, como determinar outra solução básica factível melhor?

Pergunta 1

<u>Como encontrar uma solução inicial básica factível?</u>

- Será respondida posteriormente.
- Inicialmente serão consideradas apenas problemas do tipo $\boldsymbol{A}\mathbf{x} \leq \boldsymbol{b}$.
  - Solução inicial natural: base formada pelas variáveis de folga.

Exemplo 1

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & \leq & 2 \\ x_2 & \leq & 3 \end{array}\right.$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Exemplo 2

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & \geq & 2 \\ x_2 & \leq & 3 \end{array}\right.$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Pergunta 2

Essa solução é ótima?

Considere uma solução básica factível:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}_B} \\ \hat{\mathbf{x}_N} \end{bmatrix} \text{ tal que } \begin{cases} \hat{\mathbf{x}_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0 \\ \hat{\mathbf{x}_N} = 0 \end{cases}$$

e a solução geral considerando a mesma partição básica:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \text{ tal que } \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$$

Considerando a partição básica, a função objetivo pode ser expressa por:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = [\mathbf{c}_B^T \ \mathbf{c}_N^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N$$

e para a solução geral:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \end{aligned}$$

- Para a solução básica:

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{c}_B^T \hat{\mathbf{x}_B} + \mathbf{c}_N^T \hat{\mathbf{x}_N} \\ &= \mathbf{c}_B^T (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\hat{\mathbf{x}_N}) + \mathbf{c}_N^T \hat{\mathbf{x}_N} \\ &= \mathbf{c}_B^T (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \cdot 0) + \mathbf{c}_N^T \cdot 0 \\ &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

- <u>**Definindo o *vetor multiplicador simplex*:**</u>

$$\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

- Este vetor pode ser calculado sem inversão de matrizes:

$$\lambda^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \Leftrightarrow \lambda = (\mathbf{B}^{-1})^T \mathbf{c}_B \Leftrightarrow \mathbf{B}^T \lambda = \mathbf{c}_B$$

❖ Voltando novamente para a solução geral:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}) + (-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} + \mathbf{c}_N^T)\mathbf{x}_N \\ &= f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{c}_N^T - \lambda^T\mathbf{N})\mathbf{x}_N \end{aligned}$$

❖ Definindo os custos reduzidos (custos relativos):

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_N^T - \lambda^T\mathbf{N} &= (c_{N_1}, \ldots, c_{N_{n-m}}) - \lambda^T(\mathbf{a}_{N_1}, \ldots, \mathbf{a}_{N_{n-m}}) \\ &= (c_{N_1} - \lambda^T\mathbf{a}_{N_1}, \ldots, c_{N_{n-m}} - \lambda^T\mathbf{a}_{N_{n-m}}) \\ &= (c_{\hat{N_1}}, \ldots, c_{\hat{N_{n-m}}}) \end{aligned}$$

$$c_{\hat{N_i}} = c_{N_i} - \lambda^T\mathbf{a}_{N_i}$$

logo:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{c}_N^T - \lambda^T \mathbf{N})\mathbf{x}_N \\
&= f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c_{N_1}} x_{N_1} + \ldots + \hat{c_{N_{n-m}}} x_{N_{n-m}}
\end{aligned}
$$

- **A solução básica atual é ótima se não existe nenhum custo reduzido menor que zero.**

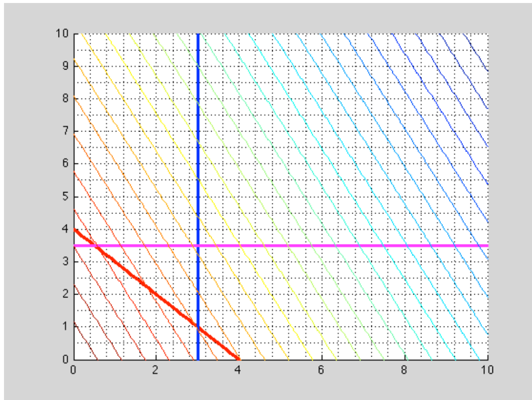
Exemplo 1

$$\min f(x) = -2x_1 - x_2$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 & \leq & 4 \\
x_1 & \leq & 3 \\
x_2 & \leq & \frac{7}{2}
\end{array}
\right.
$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Represente o problema na forma padrão.
- Verifique se a solução associada a base [x_1,x_2,x_3] é ótima.
- Verifique se a solução associada a base [x_1,x_2,x_5] é ótima.
- Verifique se a solução associada a base [x_3,x_4,x_5] é ótima.
- Verifique graficamente onde estão cada uma das soluções associadas às bases.



Pergunta 3

Caso não seja ótima, como determinar outra solução básica factível melhor?

- Dado que a solução atual não é ótima então existe ao menos uma variável não-básica com custo reduzido negativo que, se colocada na base, melhora o valor de função objetivo. Então, deve-se escolher uma variável não básica com custo reduzido negativo para que essa variável entre na base.

$$\begin{cases} x_{N_k} = \varepsilon \ , \ (\hat{c_{N_k}} < 0 \ \ , \ \ \varepsilon \geq 0) \\ x_{N_j} = 0 \ , \ j = 1, 2, \ldots, n - m \ , \ j \neq k \end{cases}$$

- **Escolha da variável para entrar na base:**
  - Qualquer variável com custo reduzido negativo pode ser escolhida para entrar na base. A escolha da variável define o trajeto a ser seguido na busca pelo ótimo.
  - **Regra de Dantzig**: escolhe-se a variável com custo reduzido mais negativo para ingressar na base.

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c_{N_1}} x_{N_1} + \ldots + \hat{c_{N_k}} x_{N_k} + \ldots + \hat{c_{N_{n-m}}} x_{N_{n-m}} \\
&= f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c_{N_1}} 0 + \ldots + \hat{c_{N_k}} \varepsilon + \ldots + \hat{c_{N_{n-m}}} 0 \\
&= f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c_{N_k}} \varepsilon \le f(\hat{\mathbf{x}})
\end{aligned}
$$

- Logo a função objetivo decresce quando o passo cresce.
- Deve-se então determinar o maior passo que pode ser aplicado sem que a solução se torne infactível.

- **Tamanho ótimo do passo:**

$$
\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_k} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varepsilon \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k
$$

$$
\mathbf{A} = [\mathbf{B}\ \mathbf{N}] = [\mathbf{a}_{B_1} \ldots \mathbf{a}_{B_m} \quad \mathbf{a}_{N_1} \ldots \mathbf{a}_{N_{n-m}} \ldots \mathbf{a}_{N_{n-m}}]
$$

$$
\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \hat{\mathbf{x}_B} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}\varepsilon
$$

- **Definindo a *direção simplex*:**

$$\gamma = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}$$

- Este vetor também pode ser calculado sem inversão de matrizes:

$$\gamma = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k} \Leftrightarrow \mathbf{B}\gamma = \mathbf{a}_{N_k}$$

- Atualizando a solução básica:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \hat{\mathbf{x}_B} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k}\varepsilon \\ &= \hat{\mathbf{x}_B} - \gamma\varepsilon \end{aligned}$$

- Analisando a nova solução básica quanto ao sistema $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$:
  - O sistema é atendido por definição.
- Analisando a nova solução básica quanto às restrições de não-negatividade:
  - $x_{Ni}\ \forall\ i \neq k$: permanecem com valor 0.
  - x_{Nk}: assume valor $\varepsilon > 0$.
  - x_{Bi}: são afetadas e devem permanecer não negativas.

- Logo:

$$\mathbf{x}_B = \hat{\mathbf{x}_B} - \gamma\varepsilon \geq 0$$

- Ou para cada variável básica:

$$x_{B_i} = \hat{x_{B_i}} - \gamma_i\varepsilon \geq 0 \quad , \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

$$x_{B_i} = \hat{x_{B_i}} - \gamma_i \varepsilon \geq 0 \quad , \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\text{se} \begin{cases} \gamma_i \leq 0, \text{ entao } x_{B_i} \geq 0 \text{ para qualquer } \varepsilon \geq 0 \\ \\ \gamma_i > 0, \text{ entao } x_{B_i} \geq 0 \text{ se, e somente se } \varepsilon \leq \frac{\hat{x_{B_i}}}{\gamma_i} \end{cases}$$

- Logo, o passo ótimo é dado por:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\hat{x_{B_\ell}}}{\gamma_\ell} = \arg_\ell \min \left\{ \frac{\hat{x_{B_i}}}{\gamma_i} \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \mid \gamma_i > 0 \right\}$$

- A variável básica correspondente a este passo se torna 0 e sai da base.

- **Solução ótima ilimitada:** se todas as coordenadas de γ são não positivas, então o passo pode crescer infinitamente. Nesse caso o problema não possui solução ótima. Pode-se ainda dizer que o problema possui solução ótima ilimitada.

$$x_{B_i} = \hat{x_{B_i}} - \gamma_i \varepsilon \geq 0 \quad , \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

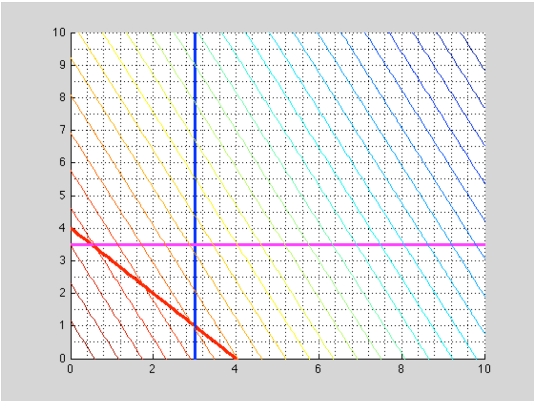
$$\text{se} \begin{cases} \gamma_i \leq 0, \text{ entao } x_{B_i} \geq 0 \text{ para qualquer } \varepsilon \geq 0 \\ \\ \gamma_i > 0, \text{ entao } x_{B_i} \geq 0 \text{ se, e somente se } \varepsilon \leq \frac{\hat{x_{B_i}}}{\gamma_i} \end{cases}$$

Exemplo 1

$$\min f(x) = -2x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & \leq & 3 \\ x_2 & \leq & \frac{7}{2} \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Considere a base [x_3,x_4,x_5]:
  - Encontre um vértice factível melhor que o associado à referida base.
  - Analise graficamente o ponto obtido após a avaliação do passo para cada variável básica.
- Resolva o problema até a otimalidade.



Algoritmo Simplex

Dados: partição básica factível.

- Passo 1: Calcule a solução básica correspondente:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}_N} = 0 \end{cases}$$

- Passo 2: Calcule o *Vetor Multiplicador Simplex (λ^T)* e os custos reduzidos ($\hat{c}$):

$$\lambda^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \Leftrightarrow \lambda = (\mathbf{B}^{-1})^T\mathbf{c}_B \Leftrightarrow \mathbf{B}^T\lambda = \mathbf{c}_B$$

$$\hat{c_{N_i}} = c_{N_i} - \lambda^T\mathbf{a}_{N_i} \quad , \quad \forall i \in \{1, \ldots, n-m\}$$

- Passo 3: Se não existe nenhum custo reduzido negativo:
  - **PARE! Solução ótima.**
- Passo 4: Escolha variável não básica com menor custo reduzido (Regra de Dantzig).
- Passo 5: Calcule o *Vetor Direção Simplex* (γ):

$$\gamma = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{N_k} \Leftrightarrow \mathbf{B}\gamma = \mathbf{a}_{N_k}$$

- Passo 6: Se todas as coordenadas do V*etor Direção Simplex* são não positivas:
  - **PARE! Solução ótima ilimitada.**
- Passo 7: Determine o passo e a variável que sai da base:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{x_{\hat{B}_\ell}}{\gamma_\ell} = \arg_\ell \min \left\{ \frac{x_{\hat{B}_i}}{\gamma_i} \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \mid \gamma_i > 0 \right\}$$

- Passo 8: Atualize a solução básica ($\mathbf{x_B}$ e $\mathbf{x_N}$), partição básica (*B* e *N*) e retorne ao Passo 2.

Problema 1 (RG - Pb1)

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & & & \leq & 2 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

89

Problema 2 (RG - Pb2)

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} -3x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 9 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

90

Problema 3 (RG - Pb3)

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr}
-3x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & x_2 & \leq & 3 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 9 \\
3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Método Simplex em Tabelas

Método Simplex em Tabelas

VB	x_1 c_1	x_2 c_2	$\dots$ $\dots$	x_n c_n	f
x_{B_1}	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\dots$	$a_{1,n}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$\dots$	$a_{m,n}$	b_m

- Mas, inicialmente:

$$\begin{aligned} \lambda^T &= c_B^T \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0} \\ \text{logo: } \hat{c_{N_i}} &= c_{N_i} - \lambda^T \mathbf{a}_{N_i} = c_{N_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^{-1} &= I \\ \text{logo: } \gamma &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{N_k} = \mathbf{a}_{N_k} \end{aligned}$$

- Logo:

	x_{N_1}	x_{N_2}	$\dots$	$x_{N_{n-m}}$	x_{B_1}	x_{B_2}	$\dots$	$x_{B_{n-1}}$	x_{B_n}	
VB	$\hat{c_{N_1}}$	$\hat{c_{N_2}}$	$\dots$	$\hat{c_{N_{n-m}}}$	0	0	$\dots$	0	0	$f=0$
x_{B_1}	$\gamma_{1,1}$	$\gamma_{1,2}$	$\dots$	$\gamma_{1,n-m}$	1	0	$\dots$	0	0	b_1
x_{B_2}	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{2,2}$	$\dots$	$\gamma_{2,n-m}$	0	1	$\dots$	0	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B_{m-1}}$	$\gamma_{m-1,1}$	$\gamma_{m-1,2}$	$\dots$	$\gamma_{m-1,n-m}$	0	0	$\dots$	1	0	b_{m-1}
x_{B_m}	$\gamma_{m,1}$	$\gamma_{m,2}$	$\dots$	$\gamma_{m,n-m}$	0	0	$\dots$	0	1	b_m

Exemplo

$$\min f(x) = -x_1 - 2x_2$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 & = & 4 \\ -x_1 + x_2 + x_5 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

	x1	x2	x3	x4	x5	b
	-1	-2	0	0	0	f
x3	1	1	1	0	0	6
x4	1	-1	0	1	0	4
x5	-1	1	0	0	1	4

97

	x1	**x2 entra**	x3	x4	x5	b	
	-1	**-2**	0	0	0	f	
x3	1	1	1	0	0	6	ε=6÷1=6
x4	1	-1	0	1	0	4	ε livre
x5 sai	-1	**1**	0	0	1	4	**ε=4÷1=4**

98

	x1	x2	x3	x4	x5	b
	-3	0	0	0	2	f+8
x3	2	0	1	0	-1	2
x4	0	0	0	1	1	8
x2	-1	1	0	0	1	4

	<u>**x1 entra**</u>	x2	x3	x4	x5	b	
	<u>**-3**</u>	0	0	0	2	f+8	
<u>**x3 sai**</u>	<u>**2**</u>	0	1	0	-1	2	**ε=2÷2=1**
x4	0	0	0	1	1	8	ε livre
x2	-1	1	0	0	1	4	ε livre

	x1	x2	x3	x4	x5	b
	0	0	3/2	0	1/2	f+11
x1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x4	0	0	0	1	1	8
x2	0	1	1/2	0	1/2	5

Problema 1 (RG - Pb1)

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & & & \leq & 2 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Problema 2 (RG - Pb2)

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rcrcr} -3x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 9 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Voltando à Pergunta 1:
Como encontrar uma base inicial factível?

Como encontrar uma base inicial factível?

- Na maior parte dos casos não existe base inicial factível óbvia, pois o problema possui restrições do tipo maior ou igual e restrições de igualdade.
  - Restrição maior ou igual: acrescenta-se uma variável de folga -x_s: não atende as restrições de não negatividade.
  - Restrição de igualdade: não se acrescenta variável de folga.

Exemplo

$$\max f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & \geq & 2 \\ x_2 & \leq & 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Estratégia 1:

- Encontrar uma partição básica factível inspecionando as bases do problema.
- Encontrar uma base inicial factível por inspeção exaustiva é, por si só, um problema combinatório:

$$N_{bases} = C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- **Pior caso:** o problema não tem solução factível.
  - **TODAS** as bases devem ser inspecionadas antes de se chegar a conclusão de que o problema não tem solução.

n	m	bases
5	3	10
10	6	210
20	12	125.970
40	24	6,28E+10
80	48	2,19E+22
160	96	3,75E+45

Problema Artificial

- Para cada restrição do tipo maior ou igual e de igualdade, acrescenta-se uma nova variável (variável artificial), que irá compor a base junto com as variáveis de folga das restrições do tipo menor ou igual.
- Diferentemente das variáveis de folga, que fazem parte da formulação original, as variáveis artificiais não existem no problema e precisam ser eliminadas. Variáveis artificiais na base (com valor positivo) implicam em soluções infactíveis.
- Logo, as variáveis de folga devem ser eliminadas de forma a encontrar uma solução básica factível:
  - Cria-se uma nova função objetivo: **minimização do somatório das variáveis de folga.**

$$\min f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum y_i$$

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \ , \ \mathbf{y} \geq 0 \end{cases}$$

onde $\mathbf{y}$ é o vetor de variáveis artificiais.

Interpretação geométrica:

- O conjunto de restrições do problema artificial é uma relaxação do conjunto de restrições do problema original.
- Aumenta-se a dimensão do problema original de tal forma em que é obvia a escolha de uma base inicial factível.
- A resolução do problema artificial equivale a eliminar a relaxação inicialmente feita, de tal forma a encontrar um vértice factível no espaço de busca do problema original (problema de factibilidade).
- A solução final do problema artificial é a solução inicial do problema original.

Exemplo 1

$$\min x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & \leq & 4 \end{array}\right.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- Na forma padrão:

$$\min x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Problema artificial:

$$\min x_5^a$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_5^a & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5^a \geq 0$$

- A base obtida imediatamente após a a eliminação de todas as variáveis artificiais (solução ótima do problema artificial) é base factível para o problema original. Nesse caso, deve-se resolver o problema original considerando essa base.
- Caso a solução ótima do problema artificial inclua ao menos uma variável artificial na base, então o problema original não tem solução factível.

Algoritmo Simplex de Duas Fases

Simplex de Duas Fases

1. Construa o problema artificial.
2. **Fase 1:** Resolva o problema artificial (problema de factibilidade) utilizando o *Algoritmo Simplex*.
3. Caso exista alguma variável artificial com valor não nulo após a solução da **Fase 1**, então **PARE!** <u>O problema não tem solução factível</u>.
4. **Fase 2:** Caso contrário, resolva o problema original a partir da base ótima obtida na **Fase 1**, utilizando o *Algoritmo Simplex*.

Problema 1

$$\min x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & \leq & 4 \end{array}\right.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Exercício 1

$$\min x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & \geq & 2 \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq \quad 0$$

Algoritmo Simplex de Duas Fases em Tabelas

Problema 1

$$\min x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & \leq & 4 \end{array}\right.$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- Na forma padrão:

$$\min x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- Problema artificial:

$$\min x_5^a$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5^a & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 4 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5^a \geq 0$$

Primeira Fase
Problema de Factibilidade

	x1	x2	x3	x4	x5a	b
art	0	0	0	0	**1**	fa
orig.	1	-1	2	0	0	f
x5a	1	1	1	0	1	3
x4	2	-1	3	1	0	4

	x1	x2	x3	x4	x5a	b
art	-1	-1	-1	0	0	fa-3
orig.	1	-1	2	0	0	f
x5a	1	1	1	0	1	3
x4	2	-1	3	1	0	4

	x1 entra	x2	x3	x4	x5a	b	
art	**-1**	-1	-1	0	0	fa-3	
orig.	1	-1	2	0	0	f	
x5a	1	1	1	0	1	3	ε=3÷1=3
x4 sai	**2**	-1	3	1	0	4	**ε=4÷2=2**

127

	x1	x2	x3	x4	x5a	b	
art	0	-1.5	0.5	0.5	0	fa-1	
orig.	0	-0.5	0.5	-0.5	0	f-2	
x5a	0	1.5	-0.5	-0.5	1	1	
x1	1	-0.5	1.5	0.5	0	2	

128

	x1	**x2 entra**	x3	x4	x5a	b	
art	0	**-1.5**	0.5	0.5	0	fa-1	
orig.	0	-0.5	0.5	-0.5	0	f-2	
x5a sai	0	**1.5**	-0.5	-0.5	1	1	**ε=1÷1.5= 0.67**
x1	1	-0.5	1.5	0.5	0	2	ε livre

	x1	x2	x3	x4	x5a	b	
art	0	0	0	0	1	fa	
orig.	0	0	0.33	-0.67	0.33	f-1.67	
x2	0	1	-0.33	-0.33	0.67	0.67	
x1	1	0	1.33	0.33	0.33	2.33	

Segunda Fase
Problema Original

	x1	x2	x3	x4	b
orig.	0	0	0.33	-0.67	f-1.67
x2	0	1	-0.33	-0.33	0.67
x1	1	0	1.33	0.33	2.33

	x1	x2	x3	**x4 entra**	b	
orig.	0	0	0.33	**-0.67**	f-1.67	
x2	0	1	-0.33	-0.33	0.67	ε livre
x1 sai	1	0	1.33	**0.33**	2.33	**ε=2.33÷0.33=7**

	x1	x2	x3	x4	b	
orig.	2	0	3	0	f+3	
x2	1	1	1	0	3	
x4	3	0	4	1	7	

Exercício 1

$$\min x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & \geq & 2 \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq \quad 0$$

Método do *M*-Grande

Uma alternativa ao Algoritmo Simplex de Duas Fases é o Método do *M*-Grande:

- Nesse método, associa-se a variável artificial à função objetivo do problema com um custo muito grande, de tal forma que essa venha a ser eliminada da base rapidamente.
- Com essa abordagem pode-se aplicar o Algoritmo Simplex tradicional para solução do problema.

Exemplo 1

$$\min x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & \leq & 4 \end{array}\right.$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min x_1 - x_2 + 2x_3 + 1000x_5^a$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_5^a & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5^a \geq 0$$

Apesar de mais simples, o Método do M-Grande apresenta duas dificuldades principais:

- O conceito de “grande" varia de problema para problema.
- A escolha de valores de M muito grandes pode levar a problemas de condicionamento numérico.

Na prática esse método não é indicado para problema reais e de grande porte.

Problemas sem Solução e Casos Especiais

Problema com Solução Ótima Ilimitada

- Caso o problema tenha solução ótima ilimitada, então existe variável para entrar na base mas o passo pode crescer arbitrariamente (não existe variável para sair).

	x1 entra	x2	x3	x4	x5	b	
	-3	0	0	0	2	f+8	
x3	-1	0	1	0	-1	2	E livre
x4	0	0	0	1	1	8	E livre
x2	-1	1	0	0	1	4	E livre

Problema sem Solução Factível

- Caso o problema não tenha nenhuma solução factível, então a base ótima do problema original conta com ao menos uma variável artificial.

	x1	x2	x3	x4	x5a	b
art	1	1	1	0	0	fa-3
orig.	1	-1	2	0	0	f
x5a	1	1	1	0	1	3
x4	2	-1	3	1	0	4

Múltiplas Soluções Ótimas

- Ao fim da otimização, variáveis não-básicas com custo reduzido zero indicam a presença de múltiplas soluções ótimas.

	x1	x2	x3	x4	x5	b
	0	0	0	0	1	f+9
x3	0	0	1	2	-1	2
x2	0	1	0	1	0	4
x1	1	0	0	-2	1	1

Degeneração e Ciclagem

- A propriedade de melhoria a cada geração do Simplex permite que o algoritmo convirja em tempo computacional finito.
- No entanto existem configurações patológicas que podem fazer com que o algoritmo fique preso em conjunto de vértices, caso não seja implementado nenhum mecanismo de controle. Esse processo é chamado de degeneração ou ciclagem.

Situação crítica:

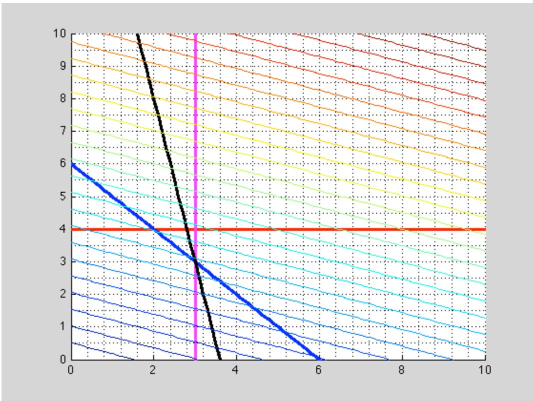
- Duas ou mais variáveis têm o mesmo valor de custo reduzido (negativo) e podem entrar na base.
- Os passos admissíveis (E) para ambas as variáveis são os mesmos.
- As variáveis que devem sair da base têm valor nulo.

	x1	x2	x3	**x4 entra?**	**x5 entra?**	x6	x7	b	
	0	0	0	**-1**	**-1**	1	0	f	
x1 sai?	1	0	0	**1**	**3**	1	0	0	**ε=0**
x2	0	1	0	**0**	**-2**	-1	0	1	**ε livre**
x7 sai?	0	0	0	**1**	**2**	0	1	0	**ε=0**
x3	0	0	1	**-1**	**0**	0	0	2	**ε livre**

- É uma situação rara, mas possível, principalmente em problemas de grande porte.
- Pode ser facilmente corrigida:

Regra de Bland:

- Entre todas as a candidatas a entrar na base, selecione a variável x_k que possui o menor índice.
- Entre todas as variáveis candidatas a sair da base, selecione a variável x_r que possui o menor índice.



151

Referências

- [Arenales et al, 2007] M. Arenales; V. Armentano; R. Morabito; H. Yanasse. **Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia**, Editora Campus / Elsevier, 2007.
- [Goldbarg et al, 2005] M. C. Goldbarg; H. P. Luna. **Otimização Combinatória e Programação Linear - Modelos e Algoritmos**, 2a ed., Editora Campus / Elsevier, 2005.
- [Hillier et al, 2013] F. S. Hillier; G. J. Lieberman. **Introdução à Pesquisa Operacional**, 9a ed., Editora Mc Graw Hill, 2013.